UNIVERZITET U NIŠU
MAŠINSKI FAKULTET U NIŠU

Ljiljana Petković, Predrag Rajković, Melanija Mitrović,
Ljiljana Radović, Dragan Živković, Dragan Rakić

ZBIRKA

REŠENIH ZADATAKA SA PRIJEMNIH ISPITA IZ MATEMATIKE

Niš

Za izdavača: *Prof. dr Vlastimir Nikolić, dekan*

Prepress: *Saša Đorđević, samostalni viši knjižničar*

Štampa: "*UNIGRAF*"

Tiraž: *300*

ISBN 978-86-6055-052-3

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51(079.1)

ZBIRKA rešenih zadataka sa prijemnih ispita iz matematike / Ljiljana Petković ... [et al.]. - Niš : Mašinski fakultet, 2014 (Niš : Unigraf). - IV, 138 str. : graf. prikazi ; 30 cm

Na vrhu nasl. str.: Univerzitet u Nišu. - Tiraž 300.

ISBN 978-86-6055-052-3
1. Петковић, Љиљана [аутор], 1953-
a) Математика - Задаци
COBISS.SR-ID 206922252

Sadržaj

Predgovor

Ova zbirka zadataka namenjena je budućim studentima koji se pripremaju za polaganje prijemnog ispita iz matematike na Mašinskom fakultetu u Nišu a može korisno poslužiti i kandidatima na svim drugim fakultetima gde se polaže matematika. Namena zbirke je da omogući budućim studentima dobru i adekvatnu pripremu za polaganje.

Zbirka sadrži sve osnovne oblasti matematike iz kojih se zadaju zadaci na ispitu i sastoji se iz sledećih poglavlja: *Kvadratne funkcije, Eksponencijalne i logaritamske jednačine i nejednačine, Trigonometrija, Analitička geometrija, Geometrija.* Svako poglavlje sadrži uvod sa teorijskim objašnjenjima i formulama neophodnim za izradu zadataka a zatim sledi niz zadataka s kompletnim rešenjima. Na kraju, kao poslednje poglavlje, nalazi se deo pod nazivom *Zadaci s prethodnih prijemnih ispita* u kome je dat pregled većeg broja ispitnih blanketa. Ovo treba da omogući kandidatima da steknu uvid u to kako će ispit izgledati i koja težina zadataka može da se očekuje na ispitu.

Na pripremi ove publikacije učestvovali su svi članovi Katedre za prirodno-matematičke nauke tako što je svako poglavlje pripremio jedan nastavnik, odnosno saradnik. Zaduženja po poglavljima su bila sledeća:

Dragan Rakić, asistent - Kvadratne funkcije;
dr Melanija Mitrović, red. prof. - Eksponencijalne i logaritamske jednačine i nejednačine;
dr Dragan Živković, docent - Trigonometrija;
dr Predrag Rajković, red. prof. - Analitička geometrija;
dr Ljiljana Radović, van. prof. - Geometrija.

S obzirom da Katedra za prirodno-matematičke nauke godinama obavlja pripremu i realizaciju prijemnog ispita, sakupljeni materijal predstavlja dobru bazu za kreiranje ovakve zbirke zadataka. Prethodna publikacija *Rešeni zadaci sa prijemnih ispita*, koju je izdao Mašinski fakultet u Nišu 2011. godine a čijom je izradom rukovodio dr Dušan Milovančević, redovni profesor u penziji, takođe je korišćena u pripremi ove zbirke. U ovom izdanju, osim zadataka koji su uzeti s prethodnih prijemnih ispita, dodati su i neki novi zadaci i izvršena je klasifikacija zadataka po oblastima. Selekcija zadataka vršena je tako da određena oblast bude celovito prikazana i obuhvaćena. U većem broju zadataka rešenja su ilustrovana slikom ili tabelom gde god je to bilo neophodno radi lakšeg razumevanja dobijenog rešenja.

Jedan deo tehničke pripreme ove publikacije izvršio je Saša Đorđević, operater Računskog centra Mašinskog fakulteta u Nišu, kome se ovom prilikom zahvaljujemo.

Šef Katedre za prirodno-matematičke nauke

dr Ljiljana Petković, red. prof.

1

Kvadratna funkcija

1.1 Teorijski uvod

Definicija kvadratne jednačine. Jednačina oblika

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.1}$$

gde je x nepoznata, a a, b i c dati realni brojevi, $a \neq 0$, je kvadratna jednačina po x, sa koeficijentima a, b i c.

Rešenja kvadratne jednačine. Kvadratna jednačina (1.1) ima dva (ne obavezno različita) rešenja koja su data formulama:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Obično pišemo

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.2}$$

Rešenja jednačine se drugačije nazivaju koreni jednačine.

Priroda rešenja kvadratne jednačine. Diskriminanta. Izraz $D = b^2 - 4ac$ se naziva diskriminanta kvadratne jednačine (1.1). Iz (1.2) izvodimo sledeće zaključke u vezi jednačine $ax^2 + bx + c = 0$:

1) jednačina ima dva različita realna rešenja ako i samo ako je $D = b^2 - 4ac > 0$;

2) jednačina ima jedno dvostruko realno rešenje ako i samo ako je $D = b^2 - 4ac = 0$;

3) jednačina ima jedan par konjugovano kompleksnih rešenja ako i samo ako je $D = b^2 - 4ac < 0$.

Nepotpune kvadratne jednačine. Ako je $b = 0$ ili $c = 0$ jednačina (1.1) je nepotpuna. Izdvajaju se sledeći specijalni slučajevi nepotpunih kvadratnih jednačina:

1) $ax^2 = 0$.
Pošto se pretpostavlja da je $a \neq 0$, ova jednačina ima dvostruko rešenje $x_{1,2} = 0$.

2) $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$.
Zbog $a \neq 0$, ova jednačina je ekvivalentna sa $x^2 = -\frac{c}{a}$. Sledi

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad \text{ako je } \frac{c}{a} < 0$$
$$x_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{c}{a}}, \quad \text{ako je } \frac{c}{a} > 0,$$

gde je i imaginarna jedinica, $i^2 = -1$.

3) $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$.
Ova jednačina je ekvivalentna sa $x(ax + b) = 0$. Dakle, $x = 0$ ili $ax + b = 0$, pa su rešenja jednačine

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Naravno, rešenja jednačina iz prethodna tri slučaja se uklapaju u opšte rešenje dato formulom (1.2).

Vijetove formule. Brojevi x_1 i x_2 su rešenja kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ ako i samo ako je

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Rastavljanje kvadratnog trinoma na linearne činioce. Kvadratni trinom po x je izraz oblika $ax^2 + bx + c$, gde su a, b i c dati brojevi i $a \neq 0$. Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c = 0$, onda se kvadratni trinom može rastaviti na činioce na sledeći način:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Dakle, kada imamo jedno dvostruko realno rešenje ($D = 0$, $x_1 = x_2$) onda je

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Grafik funkcije $y = ax^2 + bx + c$. U zavisnosti od znaka koeficijenta a i znaka diskriminante $D = b^2 - 4ac$, razlikujemo šest karakterističnih slučajeva prikazanih na slikama Sl. 1–Sl. 6.

U svakom slučaju funkcija je definisana za sve realne brojeve. Ako je $D > 0$ onda ona ima dve različite realne nule; ako je $D = 0$, ona ima jednu dvostruku realnu nulu; ako je $D < 0$, ona nema realnih nula. U slučaju $a > 0$, funkcija ima minimum, a u slučaju $a < 0$ funkcija ima maksimum. U oba slučaja ekstremna vrednost (minimum ili maksimum) je postignuta za $x = -\frac{b}{2a}$ i njena vrednost iznosi $\frac{4ac-b^2}{4a}$. Dakle, teme parabole u svakom slučaju ima koordinate

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Kvadratne nejednačine. Kvadratne nejednačine su nejednačine oblika

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0,\\ ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \end{aligned}$$

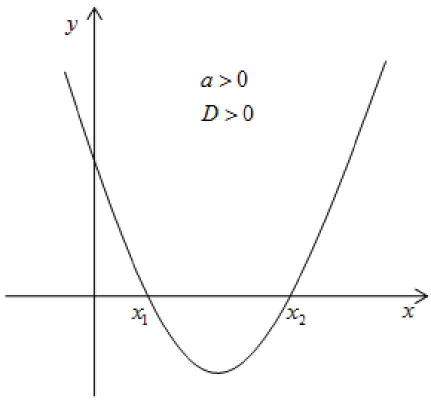
gde je x realna promenljiva (nepoznata), a a, b i c realni brojevi, $a \neq 0$. Najpre rešimo kvadratnu jednačinu $ax^2+bx+c = 0$ i dobijemo korene x_1 i x_2. Za rešavanje kvadratnih nejednačina najčešće se koriste grafici odgovarajućih kvadratnih funkcija, Sl. 1 – Sl. 6. Jedino što nam je neophodno da znamo jeste znak broja a i znak izraza D. Na osnovu ovih podataka zaključujemo koji oblik, od šet mogućih, ima grafik kvadratne funkcije koja se javlja u nejednačini. Iz grafika zaključujemo za koje ikseve je grafik iznad x-ose. U tim tačkama je vrednost izraza $ax^2 + bx + c$ veća od nule. Za one ikseve za koje je grafik ispod x-ose, vrednost izraza $ax^2 + bx + c$ je manja od nule.

Na primer, posmatrajmo nejednačine

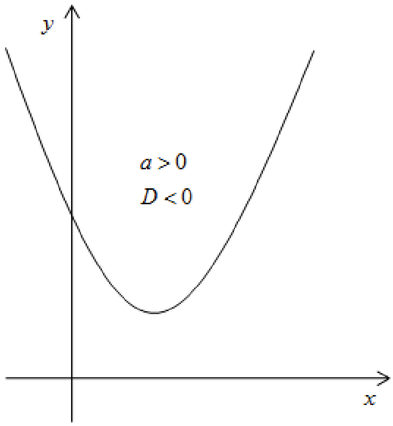
$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{i} \quad ax^2 + bx + c < 0$$

i pretpostavimo da je $a < 0$ i $D = b^2 - 4ac > 0$. U pitanju je slučaj prikazan na slici Sl. 4. Sa slike se vidi da je $ax^2 + bx + c > 0$ ako i samo ako je

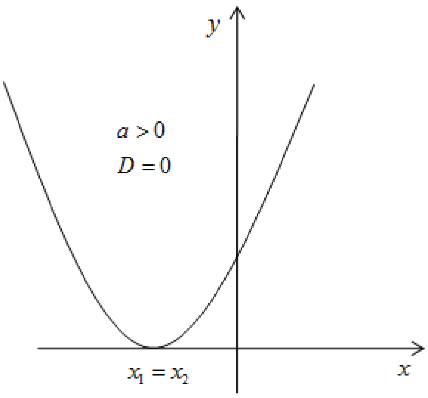
$$x_1 < x < x_2, \quad \text{tj.} \quad x \in (x_1, x_2),$$



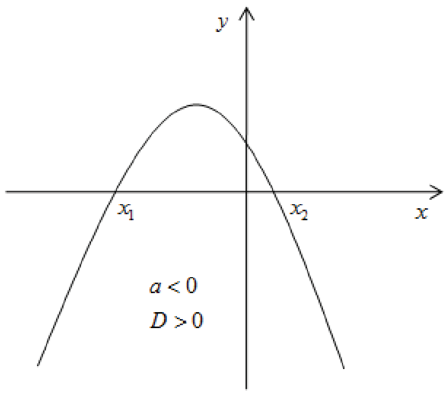
Sl. 1



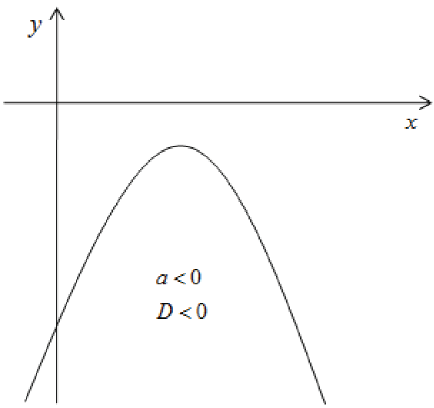
Sl. 2



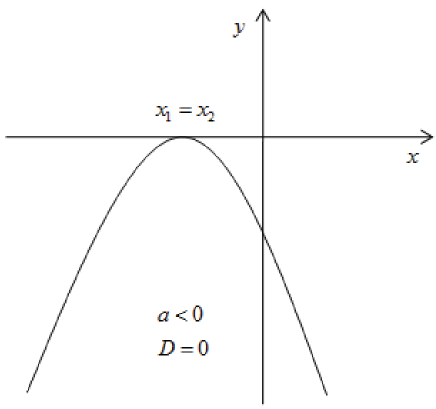
Sl. 3



Sl. 4



Sl. 5



Sl. 6

a da je $ax^2 + bx + c < 0$ ako i samo ako je

$$x < x_1 \quad \text{ili} \quad x > x_2, \quad \text{tj.} \quad x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty).$$

Primetimo da mogu nastupiti slučajevi kada kvadratna nejednačina nema rešenja kao i slučajevi kada je ona zadovoljena za svaki realan x. Na primer, kada je $a > 0$ i $D < 0$, Sl. 2, tada nejednačina $ax^2+bx+c < 0$ nema rešenja, dok je rešenje nejednačine $ax^2 + bx + c > 0$ svaki realan broj.

1.1.1 Zadaci

Zadatak 1. Odrediti vrednost izraza

$$\frac{(x^2 - xy + y^2)^{-2}}{xy\sqrt{x+y}} : \frac{\sqrt{x^3y^2 + x^2y^3}}{(x^4y + xy^4)^2},$$

ako je $x = 0.95$ i $y = 0.5$.

Rešenje: U ovakvim i sličnim zadacima pogodno je znati sledeće osnovne algebarske identitete:

$$\begin{aligned}
x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y) \\
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x-y)^3 &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \\
x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\
x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2).
\end{aligned}$$

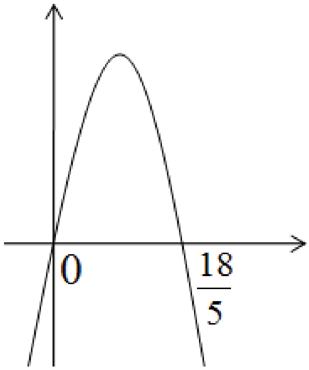
Najpre ćemo srediti izraz u zadatku.

$$\begin{aligned}
&\frac{(x^2 - xy + y^2)^{-2}}{xy\sqrt{x+y}} : \frac{\sqrt{x^3y^2 + x^2y^3}}{(x^4y + xy^4)^2} \\
=&\frac{1}{xy\sqrt{x+y}(x^2 - xy + y^2)^2} \cdot \frac{(xy(x^3+y^3))^2}{\sqrt{x^2y^2(x+y)}} \\
=&\frac{1}{xy\sqrt{x+y}(x^2 - xy + y^2)^2} \cdot \frac{x^2y^2((x+y)(x^2-xy+y^2))^2}{xy\sqrt{x+y}} \\
=&\frac{x^2y^2(x+y)^2(x^2-xy+y^2)^2}{x^2y^2(x+y)(x^2-xy+y^2)^2} = x+y
\end{aligned}$$

Zbog toga je vrednost izraza jednaka 1.

Zadatak 2. U jednačini $(p-3)x^2 - 2px + 6p = 0$ odrediti one vrednosti realnog parametra p za koje jednačina ima realna rešenja.

Rešenje:



U zadacima u kojima se javlja kvadratna funkcija uvek najpre treba identifikovati koeficijente koji stoje uz x^2 i x kao i slobodan član. Ove koeficijente obično označavamo sa a, b i c respektivno. Iz jednačine vidimo da je $a = p-3$, $b = -2p$ i $c = 6p$. Kao što znamo kvadratna jednačina ima realna rešenja ako i samo ako je $D = b^2 - 4ac \geq 0$. U našem slučaju dobijamo

$$\begin{aligned} D &= (-2p)^2 - 4 \cdot (p-3) \cdot 6p \geq 0 \\ &-20p^2 + 72p \geq 0 \\ &-5p^2 + 18p \geq 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Rešenja jednačine $-5p^2+18p = 0$ su $p = 0$ i $p = \frac{18}{5}$. (Ova rešenja dobijamo ili primenom poznate formule ili, još lakše, rastavljanjem na činioce $p(-5p+18) = 0$. Sledi $p = 0$ ili $-5p+18 = 0$, tj. $p = 0$ ili $p = \frac{18}{5}$.) Koeficijent uz p^2 u nejednačini $-5p^2 + 18p \geq 0$ je -5 što je negativan broj, pa zbog toga grafik parabole $y = -5p^2 + 18p$ ima oblik kao na slici. Sa slike vidimo da je rešenje nejednačine (1.3) svaki broj p za koji važi

$$0 \leq p \leq \frac{18}{5}.$$

Dakle, jednačina $(p-3)x^2 - 2px + 6p = 0$ ima realna rešenja za $0 \leq p \leq \frac{18}{5}$.

Zadatak 3. Data je jednačina $(k-2)x^2 - 2kx + k - 3 = 0$. Odrediti vrednost realnog parametra k tako da su zadovoljeni sledeći uslovi.

1) Jednačina nema realnih rešenja.

2) Jednačina ima jedno dvostruko realno rešenje.

3) Grafik funkcije $y = (k-2)x^2 - 2kx + k - 3$ se ceo nalazi iznad x-ose.

Rešenje: Imamo da je $a = k-2$, $b = -2k$, $c = k-3$,

$$D = b^2 - 4ac = 4k^2 - 4(k-2)(k-3) = 20k - 24 = 4(5k-6).$$

1) Data kvadratna jednačina nema realnih rešenja ako i samo ako je $D < 0$. To važi za $k < \frac{6}{5}$.

2) Jednačina ima jedno dvostruko realno rešenje ako i samo ako je $D = 0$. To važi za $k = \frac{6}{5}$.

3) Grafik funkcije $y = (k-2)x^2 - 2kx + k - 3$ se ceo nalazi iznad x-ose ako je to slučaj kao na slici Sl. 2. Dakle, ako i samo ako je $a > 0$ i $D < 0$ tj. ako i samo ako je $k > 2$ i $k < \frac{6}{5}$. Nemoguće je da važe oba uslova, pa ne postoji realan broj k za koje je ceo grafik iznad x-ose.

Zadatak 4. U jednačini

$$x^2 - 3ax + 1 - 2a^2 = 0$$

odrediti realan parametar a tako da za njene korene x_1 i x_2 važi jednakost $x_1^2 + x_2^2 = 50$.

Rešenje: U ovoj jednačini imamo parametar a pa treba voditi računa sa oznakama jer sa a takođe označavamo i koeficijent uz x^2. Iz jednačine nalazimo da je $a = 1$, $b = -3a$, $c = 1 - 2a^2$. Iz Vijetovih formula važi

$$\begin{aligned} 50 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 &= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} \\ = \frac{9a^2}{1} - 2 \cdot \frac{1 - 2a^2}{1} &= 13a^2 - 2. \end{aligned}$$

Odavde je $13a^2 = 52$, pa je $a^2 = 4$. Sledi $a = 2$ ili $a = -2$.

Zadatak 5. Data je funkcija $y = (p^2 - 1)x^2 + 2(p-1)x + 2$. Odrediti realan parametar p tako da funkcija bude pozitivna za svaki realan broj x.

Rešenje: Imamo da je $a = p^2 - 1$, $b = 2(p-1)$, $c = 2$,

$$D = b^2 - 4ac = (2(p-1))^2 - 4(p^2 - 1)2 = -4p^2 - 8p + 12.$$

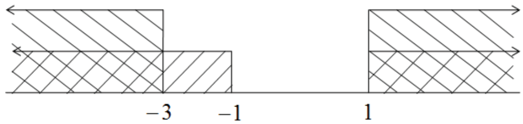
Da bi funkcija bila pozitivna za svaki realni x mora da je $a > 0$ i $D < 0$, slika Sl. 2.

$$\begin{aligned} &a > 0 \\ &p^2 - 1 > 0 \\ &p_1 = -1, \quad p_2 = 1 \end{aligned}$$

$$p \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \tag{1.4}$$

$$
\begin{aligned}
&D < 0\\
&-4p^2 - 8p + 12 < 0 \ / : (-4)\\
&p^2 + 2p - 3 > 0\\
&p_1 = -3, \quad p_2 = 1\\
&p \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

Mora važiti i (1.4) i (1.5) pa dobijamo sledeću sliku.



Konačno rešenje je

$$p \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty).$$

Zadatak 6. Koliki je zbir kvadrata svih rešenja jednačine:

$$x^2 + 4x + 3|x + 2| = 0?$$

Rešenje: Znamo da je

$$|x+2| = \begin{cases} x + 2, & x + 2 \geq 0 \ \text{tj.}\ x \geq -2 \\ -(x+2), & x + 2 < 0 \ \text{tj.}\ x < -2, \end{cases}$$

Zbog toga moramo posebno razlikovati slučaj $x \geq -2$ i $x < -2$.

1) $x \geq -2$

$$
\begin{aligned}
&x^2 + 4x + 3(x + 2) = 0\\
&x^2 + 7x + 6 = 0\\
&x_1 = -6 \quad \text{otpada jer je ovo slučaj kada je } x \geq -2\\
&x_2 = -1
\end{aligned}
$$

2) $x < -2$

$$
\begin{aligned}
&x^2 + 4x + 3(-(x + 2)) = 0\\
&x^2 + x - 6 = 0\\
&x_1 = 2 \quad \text{otpada jer je ovo slučaj kada je } x < -2\\
&x_2 = -3
\end{aligned}
$$

Dakle jednačina ima ukupno dva rešenja -1 i -3, a njihov zbir kvadrata iznosi

$$(-1)^2 + (-3)^2 = 10.$$

Zadatak 7. Rešiti nejednačinu

$$\frac{x(x+1)}{(x-2)(3-x)} \geq -1.$$

Rešenje: Zbog definisanosti je $x \neq 2$ i $x \neq 3$. Nejednačine rešavamo tako što najpre sve izraze prebacimo na jednu stranu nejednakosti tako da na drugoj strani ostane samo 0.

$$\begin{aligned}
& \frac{x(x+1)}{(x-2)(3-x)} \geq -1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x(x+1)}{(x-2)(3-x)} + 1 \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x(x+1) + (x-2)(3-x)}{(x-2)(3-x)} \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{6x-6}{(x-2)(3-x)} \geq 0 \quad :6 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x-1}{(x-2)(3-x)} \geq 0
\end{aligned}$$

Bitno je da na kraju dobijemo izraz koji se sastoji iz proizvoda ili količnika linearnih ili kvadratnih funkcija. Zatim pravimo tablicu znaka. Objašnjenje sledi nakon tablice.

$-\infty$ 1 2 3 $+\infty$

$x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x-1}{(x-2)(3-x)}$	$+$	$-$	$+$	$-$
	$\uparrow$		$\uparrow$	

Za svaki od izraza pravimo po jednu vrstu u tablici, a u poslednjoj vrsti je ono što nam treba, tj. ceo izraz. Zamislimo da gornja stranica tablice predstavlja brojevnu pravu od $-\infty$ do $+\infty$. Tu brojevnu pravu podelimo na četiri intervala, tako što ćemo upisati brojeve. Koje? Ti brojevi su rešenja svih jednačina koje se dobijaju kada svaki od izraza izjednačimo sa nulom. Te brojeve nazivamo karakterističnim tačkama. Dakle, posmatramo jednačine $x-1=0$, $x-2=0$, $3-x=0$ i dobijamo rešenja $x=1$, $x=2$, $x=3$. Bitno je da ih poređamo u rastućem redosledu. Na taj način smo dobili intervale $(-\infty,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ i $(3,+\infty)$. Primetimo da smo u tačkama gde funkcija nije definisana stavili duplu liniju u tablici. Te brojeve moramo isključiti iz konačnog rešenja. Sada za svaku vrstu određujemo znak izraza na svakom intervalu. Kada je u pitanju linearan izraz, npr. $x-2$, onda znak lako određujemo. Naime, za brojeve manje od 2 ovaj izraz je negativan, a za brojeve veće od 2 izraz je pozitivan. Izraz $3-x$ je pozitivan za $x<3$, a negativan za $x>3$. Tablicu redom popunjavamo dok ne dođemo do poslednje vrste. Znakove polja u poslednjoj vrsti određujemo na sledeći način. Gledamo sve prethodno određene znakove u koloni koja sadrži određeno polje. Ako imamo paran broj minuseva onda u to polje upisujemo $+$. Ako imamo neparan broj minuseva onda u to polje upisujemo $-$. To sledi iz pravila "$+\cdot-=-$" i "$-\cdot-=+$". S obzirom da rešavamo nejednačinu u kojoj konačni izraz treba da bude ≥ 0, to su rešenja nejednačine oni iksevi koji pripadaju intervalima izpod kojih se nalazi znak $+$ u poslednjoj vrsti. Dakle, rešenje je

$$x\in(-\infty,1]\cup(2,3).$$

Zadatak 8. Rešiti nejednačinu

$$\frac{-3x^2-x+6}{x^2+x-2}\leq -2.$$

Rešenje: Imamo

$$\begin{aligned}
& \frac{-3x^2-x+6}{x^2+x-2}\leq -2\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{-3x^2-x+6}{x^2+x-2}+2\leq 0\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{-3x^2-x+6+2(x^2+x-2)}{x^2+x-2}\leq 0\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{-x^2+x+2}{x^2+x-2}\leq 0
\end{aligned}$$

Rešenja jednačine $-x^2 + x + 2 = 0$ su

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)2}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = -1,\ 2.$$

Rešenja jednačine $x^2+x-2 = 0$ su $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$. Dakle, karakteristične tačke su -2, -1, 1 i 2. Zbog definisanosti je $x \neq -2$ i $x \neq 1$. Zatim pravimo tablicu. Objašnjenje sledi nakon tablice.

	$-\infty$	-2	-1	1	2 $\quad +\infty$
$-x^2 + x + 2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x^2 + x - 2$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{-x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
	$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$

Primetimo da smo u vrste stavljali kvadratne funkcije. Naime, nema potrebe da razlažemo $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ pa da pravimo posebne vrste za $x + 2$ i $x - 1$. Već smo naučili da određujemo znak kvadratne funkcije. Treba se samo setiti slika Sl.1–Sl.6, tj. setiti se da oblik zavisi samo od znaka koeficijenta uz x^2. Oblik kvadratne funkcije smo ilustrovali sličicom na kraju vrste sa koje se jasno vidi gde je kvadratna funkcija pozitivna a gde negativna. Sada iz zadnje vrste čitamo intervale u kojima je konačna funkcija negativna. Vodeći računa da izraz nije definisan za $x \neq -2$ i $x \neq 1$ dobijamo konačno rešenje:

$$x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup [2, +\infty).$$

Zadatak 9. Rešiti nejednačinu

$$\frac{x^2 + 15x + 26}{x^2 - 2x - 15} \geq -2.$$

Rešenje: $\quad x \in (-\infty, -4] \cup \left(-3, \dfrac{1}{3}\right] \cup (5, +\infty).$

Zadatak 10. Rešiti nejednačinu

$$\frac{5}{3 - x} + 2 < \frac{2x - 3}{x + 5}.$$

Rešenje: $\quad x \in (-\infty, -5) \cup (3, 8).$

Zadatak 11. Data je jednačina $px^2 + 2(p+2)x + 2p + 4 = 0$. Odrediti vrednost realnog parametra p tako da su zadovoljeni sledeći uslovi.

1) Jednačina ima dva različita realna rešenja.
2) Jednačina ima jedno dvostruko realno rešenje.
3) Jednačina nema realnih rešenja.
4) Funkcija $y = px^2 + 2(p+2)x + 2p + 4$ je pozitivna za svaki realan x.
5) Funkcija $y = px^2 + 2(p+2)x + 2p + 4$ je negativna za svaki realan x.

Rešenje: 1) $p \in (-2, 2)$; 2) $p = -2$ ili $p = 2$; 3) $p \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; 4) $p \in (2, +\infty)$; 5) $p \in (-\infty, -2)$.

Zadatak 12. Danas, 24. juna 1989. godine, Perica ima onoliko godina koliko iznosi zbir cifara u njegovoj godini rođenja. Koje godine je Perica rođen, ako se zna da je rođen u 20. veku?

Rešenje: Kako je Perica rođen u 20. veku to je njegova godina rođenja $19cd$, gde je $c, d \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Iz uslova zadatka imamo

$$1989 - 19cd = 1 + 9 + c + d.$$

Kako je

$$1989 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 9, \quad 19cd = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d,$$

to je

$$1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 9 - (1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d) = 10 + c + d.$$

Odavde dobijamo $11c + 2d = 79$, tj. $d = \frac{79-11c}{2}$. Kako je $0 \leq d \leq 9$ to mora biti

$$0 \leq \frac{79 - 11c}{2} \leq 9.$$

Iz prve nejednakosti se dobija $c \leq \frac{79}{11}$ pa je c jedan od brojeva $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ Iz druge nejednakosti se dobija da je $c \geq \frac{61}{11}$, pa je c jedan od brojeva $6, 7, 8, 9$. Zaključujemo da je $c = 6$ ili $c = 7$. Može se proveriti da je jedina mogućnost $c = 7$, $d = 1$. Perica je rođen 1971. godine.

Zadatak 13. Uprostiti izraz

$$\sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}\right)^2-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}\right)}$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}\right)^2-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}\right)}\\
=&\sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \frac{x-2\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}+x-a^2-\left(x+2\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}+x-a^2\right)}{x-(x-a^2)}\\
=&\sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \frac{-4\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}}{a^2}\\
=&\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}} \cdot \frac{a^2}{-4\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}} = -\frac{a^2}{4(x-a^2)}.
\end{aligned}$$

Zadatak 14. Rešiti nejednačinu

$$\frac{x^2+1}{x-3} < -1.$$

Rešenje: $x \neq 3$

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2+1}{x-3} < -1\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{x^2+1}{x-3} + 1 < 0\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{x^2+1+x-3}{x-3} < 0\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{x^2+x-2}{x-3} < 0
\end{aligned}$$

Potrebno je odrediti znak brojioca i imenioca. Rešenja jednačine $x^2+x-2 = 0$ su $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$. Odgovarajuća tablica znaka je:

	$-\infty$ … -2	-2 … 1	1 … 3	3 … $+\infty$
x^2+x-2	$+$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x^2+x-2}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\uparrow$		$\uparrow$	

Iz poslednje vrste tablice zaključujemo da je rešenje nejednačine

$$x \in (-\infty, -2) \cup (1, 3).$$

Zadatak 15. Dat je broj $A = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\sqrt{\sqrt{3}+2}$. Izračunati A^2 i na osnovu toga odrediti broj A.

Rešenje: Kako je $3 < 4$ to je $\sqrt{3} < 2$. Sledi $\sqrt{3}-2 < 0$, pa je $A < 0$. Dalje je

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{3}-2\right)^2\left(\sqrt{3}+2\right)\\
&= \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{3}-2\right)\left[\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)\right]\\
&= \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{3}-2\right)(3-4) = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{3}-2\right)\cdot(-1)\\
&= \left(6+2\sqrt{12}+2\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = \left(8+4\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\\
&= 4\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 4\,(4-3) = 4.
\end{aligned}$$

Dakle, $A^2 = 4$, pa je $A = 2$ ili $A = -2$. Kako je $A < 0$ to je $A = -2$.

Zadatak 16. Rešiti nejednačinu

$$\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}.$$

Rešenje: $x \neq -2$ i $x \neq 2$

$$\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-4}{x^2-4} < 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{4}{x^2-4} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-4 > 0.$$

Kako je $x^2 - 4 = 0$ za $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$ i kako je $a = 1 > 0$ to je $x^2 - 4 > 0$ za

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

što je ujedno i rešenje početne nejednačine.

Zadatak 17. Odrediti parametar p $(p \in R)$ u jednačini

$$x^2 - px - (p-3)^2 = 0$$

tako da rešenja budu realna.

Rešenje: Koeficijenti ove kvadratne jednačine su $a = 1$, $b = -p$ i $c = -(p-3)^2$. Potreban i dovoljan uslov da kvadratna jednačina ima realna rešenja je $D = b^2 - 4ac \geq 0$. U našem slučaju je $D = p^2 + 4(p-3)^2$. Kako je kvadrat bilo kog realnog broja nenegativan i kako p^2 i $(p-3)^2$ ne mogu istovremeno biti jednaki 0, zaključujemo da je $D > 0$ za svaki realan broj p. Zbog toga ova jednačina ima realna i različita rešenja za svako $p \in \mathbb{R}$.

Zadatak 18. Rešiti nejednačinu

$$\frac{5x-3}{2-x} > 3$$

Rešenje: $x \neq 2$

$$\frac{5x-3}{2-x} > 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5x-3}{2-x} - 3 > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{5x-3-3(2-x)}{2-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8x-9}{2-x} > 0.$$

Kritične vrednosti za x su one u kojima je $8x - 9 = 0$ i $2 - x = 0$ tj. $x = \frac{9}{8}$ i $x = 2$.

	$-\infty$ … $\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$ … 2	2 … $+\infty$
$8x-9$	$-$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$-$
$\frac{8x-9}{2-x}$	$-$	$+$	$-$
		$\uparrow$	

Dakle, skup rešenja nejednačine je interval $(\frac{9}{8}, 2)$, tj. $\frac{9}{8} < x < 2$.

Zadatak 19. Rešiti nejednačinu

$$\left|x + x^{-1} - 4\right| \leq 2$$

Rešenje: $x \neq 0$

$$\left|x + x^{-1} - 4\right| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq x + x^{-1} - 4 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 \leq \frac{x^2 - 4x + 1}{x} \leq 2$$

Skup rešenja polazne nejednačine je presek skupa rešenja nejednačina

$$-2 \leq \frac{x^2 - 4x + 1}{x} \quad \text{i} \quad \frac{x^2 - 4x + 1}{x} \leq 2$$

Prvo rešavamo prvu nejednačinu.

$$-2 \leq \frac{x^2 - 4x + 1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 4x + 1}{x} + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$

A zatim i drugu.

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{x} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 4x + 1}{x} - 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 6x + 1}{x} \leq 0$$

Kako je $x^2 - 6x + 1 = 0$ za $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$, to ove vrednosti stavljamo u tablicu znaka. Takođe stavljamo i nulu jer se u imeniocu nalazi x.

$$-\infty \qquad 0 \qquad 3 - 2\sqrt{2} \qquad 3 + 2\sqrt{2} \qquad +\infty$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3-2\sqrt{2})$	$(3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$	$(3+2\sqrt{2}, +\infty)$
$x^2 - 6x + 1$	$+$	$+$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x^2 - 6x + 1}{x}$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\uparrow$		$\uparrow$	

Dakle, $x \in (-\infty, 0) \cup \left[3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}\right]$. Kako smo iz prve nejednačine dobili da je $x > 0$ to je konačno rešenje

$$3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Zadatak 20. Rešiti nejednačinu:

$$\frac{1}{5-x} + \frac{2}{1+x} < 1.$$

Rešenje: $x \neq 5$ i $x \neq -1$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{5-x} + \frac{2}{1+x} - 1 < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1 + x + 2(5-x) - (5-x)(1+x)}{(5-x)(1+x)} < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1 + x + 10 - 2x - (5 + 5x - x - x^2)}{(5-x)(1+x)} < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x^2 - 5x + 6}{(5-x)(1+x)} < 0
\end{aligned}$$

Rešenja jednačine $x^2 - 5x + 6$ su $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$. Kritične vrednosti su takođe i $x = 5$ i $x = -1$.

	$-\infty$ — -1	-1 — 2	2 — 3	3 — 5	5 — $+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$5 - x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$1 + x$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x^2 - 5x + 6}{(5-x)(1+x)}$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
	$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$

Dakle, rešenje je

$$x \in (-\infty,\ -1) \cup (2, 3) \cup (5, +\infty).$$

Zadatak 21. Rešiti jednačinu:

$$\frac{1}{x-4} + 3 = \frac{6-x}{x-4}.$$

Rešenje: Redom dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x-4}+\frac{3\,(x-4)}{x-4}-\frac{6-x}{x-4}=0\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1+3x-12-6+x}{x-4}=0\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{4x-17}{x-4}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x-17=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{17}{4}.
\end{aligned}$$

Zadatak 22. Srediti izraz:

$$\left(\frac{3}{a-1}-\frac{3a^2+3a+3}{a^2-1}:\frac{a^4-a}{a^3+1}\right)\cdot\frac{a-a^2}{3}.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3}{a-1}-\frac{3a^2+3a+3}{a^2-1}:\frac{a^4-a}{a^3+1}\right)\cdot\frac{a-a^2}{3}\\
&=\left(\frac{3}{a-1}-\frac{3\,(a^2+a+1)}{(a-1)\,(a+1)}\cdot\frac{a^3+1}{a\,(a^3-1)}\right)\cdot\frac{a\,(1-a)}{3}\\
&=3\cdot\left(\frac{1}{a-1}-\frac{a^2+a+1}{(a-1)\,(a+1)}\cdot\frac{(a+1)\,(a^2-a+1)}{a\,(a-1)\,(a^2+a+1)}\right)\cdot\frac{a\,(1-a)}{3}\\
&=\left(\frac{1}{a-1}-\frac{a^2-a+1}{a\,(a-1)^2}\right)\cdot a\,(1-a)\\
&=\frac{a(a-1)-(a^2-a+1)}{a(a-1)^2}\cdot a(1-a)\\
&=\frac{a^2-a-a^2+a-1}{a(a-1)^2}\cdot a\cdot(-1)\cdot(a-1)\\
&=\frac{-1}{a-1}\cdot(-1)=\frac{1}{a-1}.
\end{aligned}$$

Zadatak 23. U jednačini $x^2-2\,(m-2)\,x-(2m-4)=0$ odrediti parametar m tako da rešenja po x budu jednaka.

Rešenje: Koeficijenti su $a=1$, $b=-2(m-2)$, $c=-(2m-4)=-2(m-2)$ pa je

$$\begin{aligned}
D=b^2-4ac&=4\,(m-2)^2+4\cdot 2\,(m-2)\\
&=4(m-2)(m-2+2)=4(m-2)m.
\end{aligned}$$

Potreban i dovoljan uslov da kvadratna jednačina ima jednaka realna rešenja je $D = 0$. Dakle, $m = 0$ ili $m = 2$.

Zadatak 24. Za koje vrednosti x je razlomak $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3}$ veći od -3?

Rešenje:

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} > -3 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} + 3 > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x^2 - 2x + 3 + 3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 4x + 3} > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{4x^2 - 14x + 12}{x^2 - 4x + 3} > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4x + 3} > 0
\end{aligned}$$

Rešenja jednačine $2x^2 - 7x + 6 = 0$ su $x_1 = \frac{3}{2}$ i $x_2 = 2$, a rešenja jednačine $x^2 - 4x + 3 = 0$ su $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Ova četiri broja su kritične vrednosti u tablici znaka. Pored toga je $x \neq 1$ i $x \neq 3$ zbog definisanosti.

$-\infty \qquad 1 \qquad \frac{3}{2} \qquad 2 \qquad 3 \qquad +\infty$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$2x^2 - 7x + 6$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$x^2 - 4x + 3$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4x + 3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$

Rešenje je

$$x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (3, +\infty).$$

2

Eksponencijalne i logaritamske jednačine i nejednačine

2.1 Eksponencijalne jednačine i nejednačine

2.2 Uvod - definicije i osnovne osobine

Definicija. *Eksponencijalna funkcija* je funkcija oblika

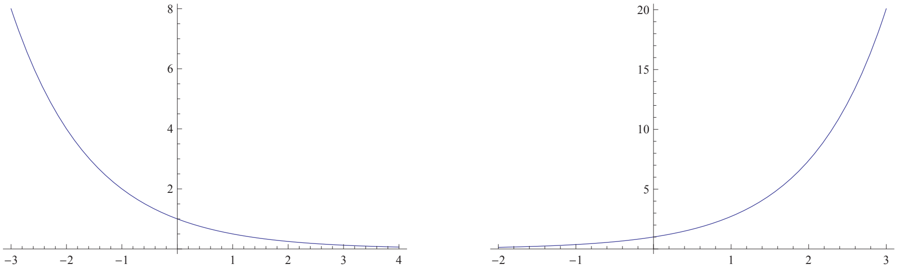
$$y = a^x,$$

gde je $a > 0$, $a \neq 1$. Broj a se naziva osnova, a x je eksponenet.

Postoje dve grupe eksponencijalnih funkcija:

- $0 < a < 1$,
- $a > 1$.

Najvažnije osobine eksopnencijalnih funkcija su:
– domen je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$;
– kodomen je skup pozitivnih realnih brojeva, tj. $(0, +\infty)$;
– grafik seče y-osu u tački $(0, 1)$; nema preseka sa x-osom;



(a) $f(x) = a^x, 0 < a < 1$ (b) $f(x) = a^x, a > 1$

Grafici eksponencijalnih funkcija

– x-osa je horizontalna asimptota grafika;
– monotonost - ako je $0 < a < 1$ funkcija je opadajuća, a ako je $a > 1$ funkcija je rastuća.

Od posebne važnosti u primenama su sledeće osobine:

$$\begin{aligned}
a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\
\frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\
(a^x)^y &= a^{xy} \\
a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\
(ab)^x &= a^x b^y \\
\left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x}.
\end{aligned}$$

2.3 Eksponencijalne jednačine

Definicija. *Eksponencijalna jednačina* je jednačina kod koje se nepoznata nalazi u izložiocu stepena.

Važna napomena. Za rešavanje eksponencijalnih jednačina koristi se definicija jednakosti eksponencijalnih funkcija:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x).$$

2.3.1 Zadaci

Zadatak 1. $100 \cdot 10^{2x-2} = 1000^{\frac{x+1}{9}}$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad &\Leftrightarrow \quad 10^{2+2x-2} = 10^{\frac{3(x+1)}{9}} \\ &\Leftrightarrow \quad 10^{2x} = 10^{\frac{x+1}{3}} \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{x+1}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Zadatak 2. $0,5^{x^2-20x+61,5} = \frac{8}{\sqrt{2}}$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad &\Leftrightarrow \quad 2^{-(x^2-20x+61,5)} = 2^{3-\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow \quad -x^2 + 20x - 61,5 = \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 40x + 128 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = 4,\ x_2 = 16. \end{aligned}$$

Zadatak 3. $4^x - 3^{x+\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x+1}$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J &\Leftrightarrow 4^x + 2^{2x+1} = 2 \cdot 3^{x+\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow 4^x(1+2) = 2 \cdot 3^x \cdot \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot 4^x = 2 \cdot 3^x \cdot \sqrt{3} \,/\, : 3^{x+1} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow 2x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 4. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J &\Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow 2^{2x}(1+\frac{1}{2}) = 3^x(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ &\Leftrightarrow 2^{2x} \cdot \frac{3}{2} = 3^x \frac{4}{\sqrt{3}} \,/\, : 3^x \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 5. $3^{2x-1} = 3^{x+2} + \sqrt{3^{2(x+1)} - 6 \cdot 3^x + 1}$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J &\Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3^{-1} = 3^x \cdot 3^2 + \sqrt{(3^{x+1} - 1)^2} \\ &\Leftrightarrow (3^x)^2 \cdot 3^{-1} = 9 \cdot 3^x + 3^{x+1} - 1 \\ &\Leftrightarrow (3^x)^2 \cdot 3^{-1} = 12 \cdot 3^x - 1 \,/\, \cdot 3 \\ &\Leftrightarrow (3^x)^2 - 36 \cdot 3^x + 3 = 0. \end{aligned}$$

Smenom $t = 3^x$ (jasno važi $t > 0$) data jednačina se svodi na $t^2 - 36t + 3 = 0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_{1,2} = 18 \pm \sqrt{321}$, što dalje daje

$$3^x = 18 \pm \sqrt{321} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \log_3(18 \pm \sqrt{321}).$$

Zadatak 6. $4^{4x+8} - 5 \cdot 4^{2x+5} + 64 = 0$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad &\Leftrightarrow \quad 4^8 \cdot 4^{4x} - 5 \cdot 4^5 \cdot 4^{2x} + 4^3 = 0 \,/\, : 4^3 \\ &\Leftrightarrow \quad 4^5 \cdot (4^{2x})^2 - 5 \cdot 4^2 \cdot 4^{2x} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Smenom $t = 4^{2x}$ (jasno važi: $t > 0$) data jednačina se svodi na $1024t^2 - 80t + 1 = 0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_1 = \frac{1}{16}$ i $t_2 = \frac{1}{64}$, što dalje daje

$$\begin{aligned} 4^{2x} = 4^{-2} \quad &\Leftrightarrow \quad 2x = -2 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -1 \\ 4^{2x} = 4^{-3} \quad &\Leftrightarrow \quad 2x = -3 \;\Leftrightarrow\; x_2 = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 7. $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad &\Leftrightarrow \quad 3^{2(x^2-1)} - 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3^{2(x^2-1)} - 4 \cdot 3^{x^2-1} + 3 = 0. \end{aligned}$$

Smenom $t = 3^{x^2-1}$ (jasno važi $t > 0$) data jednačina se svodi na $t^2 - 4t + 3 = 0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_1 = 1$ i $t_2 = 3$, što dalje daje

$$\begin{aligned} 3^{x^2-1} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -1,\, x_2 = 1 \\ 3^{x^2-1} = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 1 \;\Leftrightarrow\; x_3 = -\sqrt{2},\, x_4 = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 8. $\sqrt[x]{64} - 5 \cdot \sqrt[x]{2^{x+3}} + 16 = 0$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt[x]{2^6} - 5 \cdot \sqrt[x]{2^{x+3}} + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(2^{\frac{3}{x}}\right)^2 - 5 \cdot 2^{1+\frac{3}{x}} + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(2^{\frac{3}{x}}\right)^2 - 10 \cdot 2^{\frac{3}{x}} + 16 = 0. \end{aligned}$$

Smenom $t = 2^{\frac{3}{x}}$ (jasno važi: $t > 0$) data jednačina se svodi na $t^2 - 10t + 16 = 0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_1 = 2$ i $t_2 = 8$, što dalje daje

$$\begin{aligned} 2^{\frac{3}{x}} = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{x} = 1 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 3 \\ 2^{\frac{3}{x}} = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{x} = 3 \;\Leftrightarrow\; x_2 = 1. \end{aligned}$$

Zadatak 9. $3 \cdot \sqrt[x]{10} = 5(50 + \sqrt[2x]{10})$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad &\Leftrightarrow \quad 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} = 5(50 + 10^{\frac{1}{2x}}) \\ &\Leftrightarrow \quad 3 \cdot (10^{\frac{1}{2x}})^2 - 5 \cdot 10^{\frac{1}{2x}} - 250 = 0. \end{aligned}$$

Smenom $t = 10^{\frac{1}{2x}}$ (jasno važi: $t > 0$) data jednačina se svodi na $3t^2 - 5t - 250 = 0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_1 = -\frac{25}{3}$ i $t_2 = 10$, što dalje daje

$$10^{\frac{1}{2x}} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2x} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}.$$

Zadatak 10. $12 \cdot \sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$J \quad \Leftrightarrow \quad 12 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} - (3^{\frac{1}{2x}})^2 = 27$$

Smenom $t = 3^{\frac{1}{2x}}$ (jasno važi: $t > 0$) data jednačina se svodi na $t^2 - 12t + 27 = 0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_1 = 3$ i $t_2 = 9$, što dalje daje

$$\begin{aligned} 3^{\frac{1}{2x}} = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2x} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2} \\ 3^{\frac{1}{2x}} = 9 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2x} = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Zadatak 11. $12 \cdot 16^x - 25 \cdot 12^x + 12 \cdot 9^x = 0$

Rešenje. $x_1 = 1,\ x_2 = -1.$

Zadatak 12. $3 \cdot 18^x + 2 \cdot 8^x = 5 \cdot 12^x$

Rešenje. $x_1 = -1,\ x_2 = 0.$

Zadatak 13. $125 + 124 \cdot 5^{\sqrt{x-2}} = 25^{\sqrt{x-2}}$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$J \quad \Leftrightarrow \quad (5^{\sqrt{x-2}})^2 - 124 \cdot 5^{\sqrt{x-2}} - 125 = 0$$

Smenom $t = 5^{\sqrt{x-2}}$ (jasno važi: $t > 0$) data jednačina se svodi na $t^2 - 124t - 125 = 0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_1 = -1$ i $t_2 = 125$, što dalje, imajući u vidu uslov $t > 0$, daje

$$5^{\sqrt{x-2}} = 125 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x-2} = 3 \ \Leftrightarrow \ x = 11.$$

Važna napomena. Oblast definisanosti $\mathrm{D_j}$ date jednačine dobije se iz uslova $x - 2 \geq 0$, tj. važi $\mathrm{D_j} = [2, +\infty)$. Traženo rešenje pripada tom skupu.

Zadatak 14. $4^{\sqrt{x-2}} - 12 = 2^{\sqrt{x-2}}$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$J \quad \Leftrightarrow \quad (2^{\sqrt{x-2}})^2 - 2^{\sqrt{x-2}} = 12.$$

Smenom $t = 2^{\sqrt{x-2}}$ (jasno važi: $t > 0$) data jednačina se svodi na $t^2 - t - 12 = 0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_1 = -3$ i $t_2 = 4$, što dalje, imajući u vidu uslov $t > 0$, daje

$$2^{\sqrt{x-2}} = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x-2} = 2 \ \Leftrightarrow \ x = 6.$$

Važna napomena. Oblast definisanosti $\mathrm{D_j}$ date jednačine dobije se iz uslova $x - 2 \geq 0$, tj. važi $\mathrm{D_j} = [2, +\infty)$. Traženo rešenje pripada tom skupu.

Zadatak 15. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$

Rešenje. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$J \quad \Leftrightarrow \quad (2^{x+\sqrt{x^2-2}})^2 - 5 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6.$$

Smenom $t = 2^{x+\sqrt{x^2-2}}$ (jasno važi: $t > 0$) data jednačina se svodi na $2t^2 - 5t - 12 = 0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_1 = -\frac{3}{3}$ i $t_2 = 4$, što dalje, imajući u vidu uslov $t > 0$, daje

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad x + \sqrt{x^2-2} = 2 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{3}{2}.$$

Važna napomena. Oblast definisanosti $\mathrm{D_j}$ date jednačine dobije se iz uslova $x^2 - 2 \geq 0$, tj. važi $\mathrm{D_j} = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. Traženo rešenje pripada tom skupu.

2.4 Eksponencijalne nejednačine

Definicija. *Eksponencijalna nejednačina* je nejednačina kod koje se nepoznata nalazi u izložiocu stepena.

Važna napomena. Za rešavanje eksponencijalnih nejednačina koristi se osobina monotonosti eksponencijalnih funkcija:

- ako je $0 < a < 1$ tada važi
  - $a^{f(x)} < a^{g(x)} \ \Leftrightarrow \ f(x) > g(x)$;
  - $a^{f(x)} > a^{g(x)} \ \Leftrightarrow \ f(x) < g(x)$;
- ako je $a > 0$ tada važi
  - $a^{f(x)} < a^{g(x)} \ \Leftrightarrow \ f(x) < g(x)$;
  - $a^{f(x)} > a^{g(x)} \ \Leftrightarrow \ f(x) > g(x)$.

2.4.1 Zadaci

Zadatak 16. $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$
Rešenje. Ako označimo datu nejednačinu sa N, tada je

$$\begin{aligned} N &\Leftrightarrow 3^x(x^2-3) \le 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3 \le 0 \\ &\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]. \end{aligned}$$

Zadatak 17. $\frac{4^x+2x-4}{x-1} \le 2$

Rešenje. Ako označimo datu nejednačinu sa N, tada je

$$\begin{aligned} N &\Leftrightarrow \frac{4^x+2x-4}{x-1} - 2 \le 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4^x-2}{x-1} \le 0 \\ &\Leftrightarrow (4^x - 2 \le 0 \ \wedge \ x-1>0) \vee (4^x-2 \ge 0 \ \wedge \ x-1<0) \\ &\Leftrightarrow (2^{2x} \le 2 \ \wedge \ x>1) \vee (2^{2x} \ge 2 \ \wedge x<1) \\ &\Leftrightarrow (x \le \frac{1}{2} \ \wedge \ x>1) \vee (x \ge \frac{1}{2} \ \wedge x<1) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x < 1. \end{aligned}$$

Zadatak 18. $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \ge 1$

Rešenje. Ako označimo datu nejednačinu sa N, tada je

$$\begin{aligned} N &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \ge \left(\frac{3}{7}\right)^0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{x^2} \le 0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x \le 0 \\ &\Leftrightarrow x \in (0,2]. \end{aligned}$$

Napomena. Pri određivanju konačnog rešenja treba imati u vidu da je nejednačina definisana za sve realne brojeve različite od 0.

Zadatak 19. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$

Rešenje. Ako označimo datu nejednačinu sa N, tada je

$$\begin{aligned} N \quad &\Leftrightarrow \quad 2^x(4-8-16) > 5^x(5-25) \\ &\Leftrightarrow \quad -20 \cdot 2^x > -20 \cdot 5^x \;/\; : (-20) \\ &\Leftrightarrow \quad 2^x < 5^x \;/\; : 5^x \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x > 0. \end{aligned}$$

Zadatak 20. $0,2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$

Rešenje. Ako označimo datu nejednačinu sa N, tada je

$$\begin{aligned} N \quad &\Leftrightarrow \quad 5^{-\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 5^2 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{x^2+2}{x^2-1} > 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+2}{x^2-1} + 2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3x^2}{x^2-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (-1,1) \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad (-1,0) \cup (0,1). \end{aligned}$$

Zadatak 21. $5^{2x+1} > 5^x + 4$

Rešenje. Ako označimo datu nejednačinu sa N, tada je

$$N \quad \Leftrightarrow \quad 5 \cdot 5^{2x} - 5^x - 4 > 0.$$

Smenom $t = 5^x$ (jasno važi: $t > 0$) data nejednačina se svodi na $5t^2 - t - 4 > 0$. Rešavanjem ove kvadratne nejednačine dobijaju se uslovi $t < -\frac{4}{5}$ ili $t > 1$, što dalje, imajući u vidu uslov $t > 0$, daje

$$5^x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x > 5^0 \;\Leftrightarrow\; x > 0.$$

Zadatak 22. $2^x + 2^{-x+1} - 2 \leq 1$

Rešenje. Ako označimo datu nejednačinu sa N, tada je

$$N \quad \Leftrightarrow \quad 2^x + \frac{2}{2^x} - 3 \leq 0.$$

Smenom $t = 2^x$ $(t > 0)$ dobijamo nejednačinu

$$\begin{aligned} t + \frac{2}{t} - 3 \leq 0 \,/ \cdot t \quad &\Leftrightarrow \quad t^2 - 3t + 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \leq t \leq 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^0 \leq 2^x \leq 2^1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Zadatak 23. $\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}$

Rešenje. Smenom $t = 3^x$ dobijamo

$$\frac{1}{t+5} - \frac{1}{3t-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2t-6}{(t+5)(3t-1)} < 0,$$

što povlači $t < -5$ ili $\frac{1}{3} < t < 3$. Imajući u vidu uslov $t > 0$ imamo

$$3^{-1} < 3^x < 3^1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} < x < 3.$$

Zadatak 24. $\frac{1}{2^{2x}+3} \geq \frac{1}{2^{x+2}-1}$

Rešenje. Smenom $t = 2^x$ dobijamo nejednačinu

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2+3} - \frac{1}{4t-1} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(t-2)^2}{(t^2+3)(4t-1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4t - 1 < 0 \ \vee \ t - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t < \frac{1}{4} \ \vee \ t = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^x < 2^{-2} \ \vee \ 2^x = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x < -2 \ \vee \ x = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -2) \cup \{1\}. \end{aligned}$$

Zadatak 25. $8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Rešenje. Ako označimo datu nejednačinu sa N, tada je

$$
\begin{aligned}
N \quad &\Leftrightarrow \quad 8 \cdot \frac{\frac{3^x 3^{-2}}{3^x}}{\frac{3^x - 2^x}{3^x}} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 > 0.
\end{aligned}
$$

Smenom $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $(t > 0)$ dobijamo nejednačinu

$$
\begin{aligned}
\frac{9t^2 - 1}{9(1-t)} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (9t^2 - 1 > 0 \ \wedge \ 1 - t > 0) \vee (9t^2 - 1 < 0 \ \wedge \ 1 - t \\
&\Leftrightarrow \quad \left(t \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \ \wedge \ t < 1\right) \\
&\qquad \vee \ \left(t \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \ \wedge \ t > 1\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} < t < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3} > x > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (0, \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}).
\end{aligned}
$$

Zadatak 26. $\frac{3^x}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Rešenje. Postupak je sličan opisanom u Zadatku 10. Smenom $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $(t > 0)$ dobijamo nejednačinu

$$
\begin{aligned}
\frac{t^2}{1-t} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - t > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0.
\end{aligned}
$$

Zadatak 27. $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x \leq 0$

Rešenje. Ako označimo datu nejednačinu sa N, tada je

$$\begin{aligned} N \quad &\Leftrightarrow \quad 6 \cdot (3^2)^x - 13 \cdot (2 \cdot 3)^x + 6 \cdot 4^x \leq 0 \,/ \,: 4^x \\ &\Leftrightarrow \quad 6 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 \leq 0. \end{aligned}$$

Smenom $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ $(t > 0)$ dobijamo kvadratnu nejednačinu

$$\begin{aligned} 6t^2 - 13t + 6 \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} \leq t \leq \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \left(\frac{3}{2}\right)^1 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Zadatak 28. $9^x - 10 \cdot 3^x \cdot 2^x + 9 \cdot 4^x \leq 0$

Rešenje. $0 \leq x \leq \log_{\frac{3}{2}} 9$. (Postupak sličan Zadatku 12)

2.5 Logaritamske jednačine i nejednačine

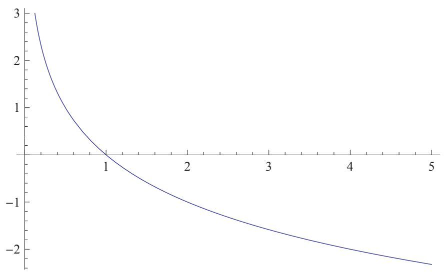
2.6 Uvod

Definicija. *Logaritamska funkcija* sa osnovom $a > 0$, $a \neq 1$, je definisana na sledeći način

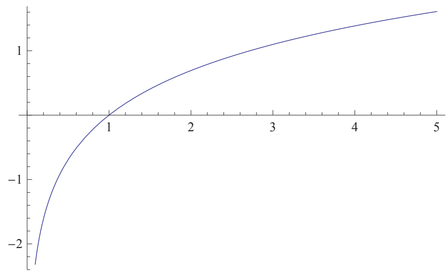
$$\mathbf{y} = \log_{\mathbf{a}} \mathbf{x} \qquad \text{ako i samo ako} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{a}^{\mathbf{y}}.$$

Postoje dve grupe logaritamskih funkcija:

- $0 < a < 1$,
- $a > 1$.



(a) $f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$



(b) $f(x) = \log_a x, a > 1$

Grafici logaritamske funkcije

Najvažnije osobine logaritamskih funkcija su:
– domen funkcije je skup pozitivnih realnih brojeva, tj. $D = (0, +\infty)$;
– kodomen je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$;
– grafik seče x-osu u tački $(1, 0)$ (nula funkcije); nema preseka sa y-osom;
– y-osa je vertikalna asimptota grafika;
– monotonost - ako je $0 < a < 1$ funkcija je opadajuća, a ako je $a > 1$ funkcija je rastuća.

Od posebne važnosti u primenama su sledeće osobine:

$$\begin{aligned} \log_a 1 &= 0 \\ a^{\log_a x} &= x \\ \log_a a^z &= z. \end{aligned}$$

TEOREMA. Zakoni logaritmovanja. Za sve $a > 0$, $a \neq 1$, pozitivne brojeve M i N i realni broj c važi:

1. $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$;

2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;

3. $\log_a M^c = c \log_a M$.

2.6.1 Zadaci

Zadatak 29. Za funkciju $y = \log(-x^2 + 6x - 5)$ naći:
(a) skup vrednosti x za koje je funkcija definisana,
(b) vrednost x za koju funkcija ima maksimum i izračunati taj maks

Rešenje. (a) Data funkcija je definisana za $-x^2+6x-5 > 0$ ili $x^2-6x+5 < 0$. Rešavanj]em ove kvadratne nejednačine dobija se oblast definisanosti $\mathrm{D_f} = (1, 5)$.

(b) Prvi izvod date funkcije je

$$\begin{aligned} y' &= \big(\log(-x^2 + 6x - 5)\big)' = \frac{1}{-x^2 + 6x - 5} \cdot (-2x + 6) \\ &= \frac{2(x-3)}{(x-1)(x-5)} \end{aligned}$$

Nula prvog izvoda (tj. rešenje jednačine $y' = 0$) je $x = 3$. Posle ispitivanja znaka prvog izvoda dobija se da funkcija na intervalu $(1, 3)$ raste a na intervalu $(3, 5)$ opada, što, dalje povlači da u $x = 3$ funkcija postiže maksimum koji iznosi $y(3) = \log 4$.

Zadatak 30. Data je funkcija $y = \log\left(-2x^2 + 7x - 3\right)$. Odrediti:
(a) oblast definisanosti date funkcije,
(b) vrednost(i) x za koju funkcija ima maksimalnu vrednost.

Rešenje. (a) Domen ove funkcije određujemo iz uslova $-2x^2 + 7x - 3 > 0$. rešavanjem ove kvadratne nejednačine dobijamo $\mathrm{D_f} = (\frac{1}{2}, 3)$.

(b) Prvi izvod je $y' = \frac{7-4x}{-2x^2+7x-3}$; nula prvog izvoda i tačka maksimima je $x = \frac{4}{7}$; maksimalna vrednost je

$$y_{max} = \log\left(-2 \cdot \frac{16}{49} + 7 \cdot \frac{4}{7} - 3\right) = \log\frac{15}{49}.$$

2.7 Logaritamske jednačine

Definicija. *Logaritamska jednačina* je jednačina kod koje se nepoznata nalazi i u logaritmu ili čini osnovu logaritma.

Važna napomena. Za rešavanje logaritamskih jednačina koristi se definicija jednakosti logaritamskih funkcija:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x).$$

2.7.1 Zadaci

Zadatak 31. $\frac{3}{\log_3 x} = -\frac{1}{6}$

Rešenje. Domen jednačine je skup $\mathrm{D_j} = (0, \infty)$. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad &\Leftrightarrow \quad \log_3 x = -18 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 3^{-18}. \end{aligned}$$

Zadatak 32. $\log_{x-2}(x^2 - 6x + 10) = 1$

Rešenje. Najpre treba odrediti domen jednačine $\mathrm{D_j}$, tj. skup u kome data jednačina može imati rešenja. Isti se određuje iz uslova $x^2 - 6x + 10 > 0$, $x - 2 > 0$ i $x - 2 \neq 1$. Kako je kvadratni trinom $x^2 - 6x + 10$ pozitivan za sve realne brojeve, to se iz poslednja dva uslova dobija $x > 2$ i $x \neq 3$, tj. $\mathrm{D_j} = (2, +\infty) \setminus \{3\}$.

Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 10 = x - 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = 3 \ \vee \ x_2 = 4. \end{aligned}$$

Imajući u vidu da $x_1 \notin \mathrm{D_j}$, to je rešenje jednačine $x = 4$.

Zadatak 33. $9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} = 5^{\log_{\frac{1}{5}}(2x^2+1)}$

Rešenje. Domen jednačine $\mathrm{D_j}$ određuje se iz uslova $x + 1 > 0$, tj. važi $\mathrm{D_j} = (-1, +\infty)$.

Primenjujući osobine logaritmovanja dobijamo

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{3}}(x+1) &= \frac{1}{\log_{x+1}\frac{1}{3}} = \frac{1}{\log_{x+1}1 - \log_{x+1}3}\\ &= -\frac{1}{\log_{x+1}3} = -\frac{1}{\frac{1}{\log_3(x+1)}}\\ &= -\log_3(x+1) = \log_3(x+1)^{-1}.\end{aligned}$$

Sada, ako označimo datu jednačinu sa J, dobijamo

$$\begin{aligned} J \quad &\Leftrightarrow \quad 3^{\log_3(x+1)^{-2}} = 5^{\log_5(2x^2+1)^{-1}}\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2+1}\\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x = 0\\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = 2.\end{aligned}$$

Napomena. Oba rešenja pripadaju domenu jednačine.

Zadatak 34. $\log(x^2+19) - \log(x-8) = 2$

Rešenje. Domen jednačine $\mathrm{D_j}$ određuje se iz uslova $x - 8 > 0$, tj. važi $\mathrm{D_j} = (8, +\infty)$.

Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad &\Leftrightarrow \quad \log\frac{x^2+19}{x-8} = 2\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+19}{x-8} = 10^2\\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 100x + 819 = 0\\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = 9 \ \vee \ x_2 = 91.\end{aligned}$$

Zadatak 35. $\log_2(x+14) = 6 - \log_2(x+2)$

Rešenje. Najpre treba odrediti domen jednačine $\mathrm{D_j}$, tj. skup u kome data jednačina može imati rešenja. Rešavanjem sistema nejednačina $x + 14 > 0$,

$x+2>0$ dobijamo $\mathrm{D_j}=(-2,+\infty)$. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad &\Leftrightarrow \quad \log_2(x+14)+\log_2(x+2)=6 \\ &\Leftrightarrow \quad \log_2(x+14)(x+2)=6 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+14)(x+2)=2^6 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+16x-36=0. \end{aligned}$$

Rešenja kvadratne jednačine su $x_1=-18$ i $x_2=2$. S obzirom da $x_1 \notin \mathrm{D_j}$, to je rešenje date jednačine $x=2$.

Zadatak 36. $\log\sqrt[5]{x}=\frac{18-\log x}{3+\log x^2}$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_j}$ treba tražiti iz uslova: $x>0$ i $3+\log x^2\neq 0$. Dakle $\mathrm{D_j}=(0,+\infty)\setminus\{10^{-\frac{3}{2}}\}$.

Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}\log x=\frac{18-\log x}{3+2\log x} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{5}\log x+\frac{2}{5}\log^2 x=18-\log x \\ &\Leftrightarrow \quad \log^2 x+4\log x-45=0. \end{aligned}$$

Uvođenjem smene $t=\log x$ data jednačina prelazi u $t^2+4t-45=0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_1=-9$ i $t_2=5$, pa to dalje daje

$$\begin{aligned} \log x=-9 \quad &\Leftrightarrow \quad x_1=10^{-9}, \\ \log x=5 \quad &\Leftrightarrow \quad x_2=10^5. \end{aligned}$$

Kako $x_1,x_2\in\mathrm{D_j}$, to ova jednačina ima dva rešenja.

Zadatak 37. $\log\sqrt[3]{10(x-1)^2}-\frac{1}{3}\log(3+x)^2=\frac{1}{3}$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_j}$ treba tražiti iz uslova: $x-1\neq 0$ i $3+x\neq 0$. Dakle $\mathrm{D_j}=(-\infty,+\infty)\setminus\{-3,1\}$.

Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{3}\log 10(x-1)^2 - \frac{1}{3}\log(3+x)^2 = \frac{1}{3} \; / \cdot 3 \\ \Leftrightarrow \quad & \log \frac{10(x-1)^2}{(3+x)^2} = \log 10 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{10(x-1)^2}{(3+x)^2} = 10 \\ \Leftrightarrow \quad & 8x = -8 \\ \Leftrightarrow \quad & x = -1. \end{aligned}$$

Zadatak 38. $\log\sqrt{x-8} + \frac{1}{2}\log(2x+1) = 1$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_j} = (8, \infty)$. Rešenje $x = 12$.

Zadatak 39. $2 + \log\sqrt{1+x} + 3\log\sqrt{1-x} = \log\sqrt{1-x^2}$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_j}$ treba tražiti iz uslova $1 - x^2 > 0$ (kojim su obuhvaćeni i uslovi $1 + x > 0$ i $1 - x > 0$). Dakle $\mathrm{D_j} = (-1, 1)$.

Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad \Leftrightarrow \quad & \log 100 \cdot \sqrt{1+x} \cdot (\sqrt{1-x})^3 = \log\sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 100 \cdot \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x} \cdot (\sqrt{1-x})^2 = \sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 100(1-x) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{99}{100}. \end{aligned}$$

Zadatak 40. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_j} = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$\begin{aligned} J \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{\log_2 4x} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 x} = \frac{1}{\log_2 4 + \log_2 x} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_2 x} = \frac{1}{2 + \log_2 x}. \end{aligned}$$

Uvođenjem smene $t = \log_2 x$ jednačina postaje

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t} = \frac{1}{2+t}\ (t \neq 0, 1+t \neq 0, 2+t \neq 0) \quad &\Leftrightarrow \quad t\cdot(1+t) = 2+t \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t_1 = -\sqrt{2},\ t_2 = \sqrt{2},
\end{aligned}
$$

što dalje daje

$$
\begin{aligned}
\log_2 x = -\sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 = 2^{-\sqrt{2}}, \\
\log_2 x = \sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 = 2^{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Zadatak 41. $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_2 x \cdot \log_{2\sqrt{2}} x \cdot \log_4 x = 54$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_j} = (0, \infty)$. Primenjujući osobine logaritmovanja (slično kao u Zadatku 33 ovog poglavlja) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\log_{\sqrt{2}} x &= \frac{1}{\log_x \sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}\log_x 2} = 2\log_2 x.
\end{aligned}
$$

Na sličan se način dobija

$$
\log_{2\sqrt{2}} x = \frac{2}{3}\log_2 x, \quad \log_4 x = \frac{1}{2}\log_2 x.
$$

Ako sada označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$
\begin{aligned}
J \quad &\Leftrightarrow \quad 2\log_2 x \cdot \log_2 x \cdot \frac{2}{3}\log_2 x \cdot \frac{1}{2}\log_2 x = 54 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\log_2^4 x = 54 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}\log_2^4 x = 54 \\
&\Leftrightarrow \quad \log_2^4 x = 3^4 \\
&\Leftrightarrow \quad \log_2 x = 3 \ \vee \ \log_2 x = -3 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = 8 \ \vee \ x_2 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

Zadatak 42. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = \frac{21}{2}$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_j} = (0, \infty)$. Postupkom sličnom onom u prethodnom zadatku dobijamo rešenje $x = 64$.

Zadatak 43. $\log_3 x + \log_x 3 = \frac{1}{2} + \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x}$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_j} = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Ako označimo datu jednačinu sa J, tada je

$$
\begin{aligned}
J \quad &\Leftrightarrow \quad \log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log_3 \sqrt{x}} + \frac{1}{2} \log_3 x \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \log_3 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log_3 x} \\
&\Leftrightarrow \quad \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0.
\end{aligned}
$$

Uvođenjem smene $t = \log_3 x$ jednačina postaje $t^2 - t - 2 = 0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_1 = -1$, $t_2 = 2$, što dalje daje

$$
\begin{aligned}
\log_3 x = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 = 3^{-1}, \\
\log_3 x = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 = 3^2,
\end{aligned}
$$

tj. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 9$.

2.8 Logaritamske nejednačine

Definicija. *Logaritamska nejednačina* je nejednačina kod koje se nepoznata nalazi i u logaritmu ili čini osnovu logaritma.

Važna napomena. Za rešavanje logaritamskih nejednačina koristi se osobina monotonosti logaritamskih funkcija:

- ako je $0 < a < 1$ tada važi
  - $\log_a f(x) < \log_a g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) > g(x)$;
  - $\log_a f(x) > \log_a g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) < g(x)$;

- ako je $a > 0$ tada važi
  - $\log_a f(x) < \log_a g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) < g(x)$;
  - $\log_a f(x) > \log_a g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) > g(x)$.

2.8.1 Zadaci

Zadatak 44. $\log_3(x^3 - 3) \leq 0$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_{nj}}$ treba tražiti iz uslova $x^2 - 3 > 0$. Dakle $\mathrm{D_{nj}} = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Ako označimo datu jednačinu sa N, tada je

$$\begin{aligned} N &\Leftrightarrow \log(x^3 - 3) \leq \log 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in [-2, 2]. \end{aligned}$$

Konačno rešenje nejednačine je skup $\mathrm{R} = \mathrm{D_{nj}} \cap [-2, 2]$, tj.

$$\mathrm{R} = [-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2].$$

Zadatak 45. $\log_{0.5}(x^2 - 4x + 3) \geq -3$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_{nj}}$ treba tražiti iz uslova $x^2 - 4x + 3 > 0$. Dakle $\mathrm{D_{nj}} = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. Ako označimo datu jednačinu sa N, tada je

$$\begin{aligned} N &\Leftrightarrow \log_{0.5}(x^2 - 4x + 3) \geq \log_{0,5}(0,5)^{-3} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 5]. \end{aligned}$$

Konačno rešenje nejednačine je skup $\mathrm{R} = \mathrm{D_{nj}} \cap [-1, 5]$, tj.

$$\mathrm{R} = [-1, 1) \cup (3, 5].$$

Zadatak 46. $\log 10^{\log(x^2+21)} - \log x \le 1$

Rešenje. Domen nejednačine je $\mathrm{D_{nj}} = (0, +\infty)$. Ako označimo datu jednačinu sa N, tada je

$$\begin{aligned} N \quad &\Leftrightarrow \quad \log(x^2+21) - \log x \le 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \log\frac{x^2+21}{x} \le \log 10 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+21}{x} \le 10 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-10x+21}{x} \le 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-10x+21 \le 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [3,7]. \end{aligned}$$

Dakle, konačno rešenje nejednačine je skup

$$\mathrm{R} = [3,7].$$

Zadatak 47. $\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x+4)} > 1,25$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_{nj}}$ treba tražiti iz uslova $x^2+2x+4>0$. Dakle $\mathrm{D_{nj}} = (-\infty, +\infty)$. Ako označimo datu jednačinu sa N, tada je

$$\begin{aligned} N \quad &\Leftrightarrow \quad \log_{\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x+4)} > \log_{\frac{4}{5}}\frac{5}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x+4) < -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x+4) < \log_{\frac{1}{3}} 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+2x+4 > 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+2x+1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty,+\infty) \setminus \{-1\}. \end{aligned}$$

Dakle, konačno rešenje nejednačine je skup

$$\mathrm{R} = (-\infty,+\infty) \setminus \{-1\}.$$

Zadatak 48. $1 < \log_2(x^2 - 3x + 4) \leq 2$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_{nj}}$ treba tražiti iz uslova $x^2 - 3x + 4 > 0$. Rešavanjem ove kvadratne nejednačine dobijamo $\mathrm{D_{nj}} = (-\infty, +\infty)$. Ako označimo datu jednačinu sa N, tada je

$$\begin{aligned}
N &\Leftrightarrow \quad 2 < x^2 - 3x + 4 < 4 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 > 0 \ \wedge \ x^2 - 3x \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \ \wedge \ x \in [0, 3] \\
&\Leftrightarrow \quad x \in [0, 1) \cup (2, 3].
\end{aligned}$$

Dakle, konačno rešenje nejednačine je skup

$$\mathrm{R} = [0, 1) \cup (2, 3].$$

Zadatak 49. $\log \frac{2x-1}{x+2} \geq 0$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_{nj}}$ treba tražiti iz uslova $\frac{2x-1}{x+2} > 0$. Važi

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{x+2} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2x - 1 > 0 \ \wedge \ x + 2 > 0) \vee (2x - 1 < 0 \ \wedge \ x + 2 < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x > \frac{1}{2} \ \wedge \ x > -2) \vee (x < \frac{1}{2} \ \wedge \ x < -2).
\end{aligned}$$

Dakle $\mathrm{D_{nj}} = (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

Ako označimo datu jednačinu sa N, tada je

$$\begin{aligned}
N &\Leftrightarrow \quad \log \frac{2x-1}{x+2} \geq \log 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x+2} \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x-3}{x+2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x - 3 \geq 0 \ \wedge \ x + 2 > 0) \vee (x - 3 \leq 0 \ \wedge \ x + 2 < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 3 \ \wedge \ x > -2) \vee (x \leq 3 \ \wedge \ x < -2) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -2) \cup [3, +\infty).
\end{aligned}$$

Konačno rešenje nejednačine je skup $\mathrm{R} = \mathrm{D_{nj}} \cap ((-\infty, -2) \cup [3, +\infty))$, tj.

$$\mathrm{R} = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty).$$

Zadatak 50. $\log \frac{x-4}{x+1} < 1$

Rešenje. $\mathrm{R} = (-\infty, -\frac{14}{9}) \cup (4, +\infty)$.

Zadatak 51. $\log_3 \frac{4x+5}{6-5x} < -1$

Rešenje. $\mathrm{R} = (-\frac{5}{4}, -\frac{9}{17})$.

Zadatak 52. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1-2x}{1+x} \geq 2$

Rešenje. $\mathrm{R} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Zadatak 53. $\log_2 x \leq \frac{2}{\log_2 x - 1}$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_{nj}}$ treba tražiti iz uslova $x > 0$ i $\log_2 x - 1 \neq 0$. Dakle $\mathrm{D_{nj}} = (0, +\infty) \setminus \{2\}$.

Uvođenjem smene $t = \log_2 x$ data nejednačina ima oblik

$$\begin{aligned} t \leq \frac{2}{t-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{t^2 - t - 2}{t-1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (t^2 - t - 2 \leq 0 \ \wedge \ t - 1 > 0) \vee (t^2 - t - 2 \geq 0 \ \wedge \ t - 1 < 0) \\ &\Leftrightarrow \quad t \leq -1 \ \vee \ 1 < t \leq 2. \end{aligned}$$

Vraćanjem smene dobijamo

$$\begin{aligned} \log_2 x \leq -1 \ \Leftrightarrow \ \log_2 x \leq \log_2 2^{-1} \ &\Leftrightarrow \ x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 < \log_2 x \leq 2 \ &\Leftrightarrow 2 < x \leq 4. \end{aligned}$$

Konačno rešenje nejednačine je skup $\mathrm{R} = \mathrm{D_{nj}} \cap \left((-\infty, \frac{1}{2}] \cup (2, 4]\right)$, tj.

$$\mathrm{R} = (-\infty, \frac{1}{2}] \cup (2, 4].$$

Zadatak 54. $\frac{\log^2 x - 3\log x + 3}{\log x - 1} \leq 1$

Rešenje. Skup $\mathrm{D_{nj}}$ treba tražiti iz uslova $x > 0$ i $\log x - 1 \neq 0$. Dakle $\mathrm{D_{nj}} = (0, +\infty) \setminus \{10\}$. Uvođenjem smene $t = \log x$ data nejednačina postaje

$$\begin{aligned} \frac{t^2 - 3t + 3}{t - 1} \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{t^2 - 4t + 4}{t - 1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(t-2)^2}{t - 1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t - 1 < 0 \ \vee \ t = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad t < 1 \ \vee \ t = 2. \end{aligned}$$

Vraćanjem smene dobijamo

$$\log x \leq 1 \ \vee \ \log x = 2 \ \Leftrightarrow \ x < 10 \ \vee \ x = 10^2.$$

Konačno rešenje nejednačine je skup

$$\mathrm{R} = (0, 10) \cup \{100\}.$$

3

Trigonometrija

3.1 Trigonometrijske formule

Osnovna trigonometrijska jednakost.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \equiv 1$$

Adicione formule.

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
&\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
&\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta} \quad \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \\
&\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta} \quad \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Formule dvostrukog ugla $(\alpha = \beta)$

$$\begin{aligned}
&\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\
&\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\
&\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\
&\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} \\
&\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}
\end{aligned}$$

Transformacije zbira i proizvoda trigonometrijskih funkcija:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

Razne formule:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$
$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$
$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha\equiv 1,\ \text{ako je}\quad \alpha\neq\tfrac{n\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$$
$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \text{ako je}\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi, n\in\mathbb{Z}$$
$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \text{ako je}\quad \alpha\neq n\pi, n\in\mathbb{Z}$$

Trigonometrijske jednačine

1. Jednačina oblika $\sin x=a$ ima rešenje samo ako je $|a|\leq 1$. Rešenje te jednačine nalazi se po uopštenoj formuli:

$$x=(-1)^n\arcsin a+n\pi, \text{gde je } n\in\mathbb{Z} \text{ i } -\frac{\pi}{2}\leq\arcsin a\leq\frac{\pi}{2}.$$

Ako je $-1<a<0$, prethodna formula poprima oblik:

$$x=(-1)^{n+1}\arcsin|a|+n\pi,\ \text{gde je } n\in\mathbb{Z}$$

Korisno je znati da je $\arcsin(-a)=-\arcsin a$.

2. Jednačina oblika $\cos x=a$ ima rešenje samo ako je $|a|\leq 1$. Rešenje te jednačine nalazi se po uopštenoj formuli:

$$x=\pm\arccos a+2n\pi \text{ gde je } n\in\mathbb{Z} \text{ i } 0\leq\arccos a\leq\pi.$$

Korisno je znati da je $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.
3. Jednačina oblika $\mathrm{tg}x = a$ gde $a \in \mathbb{R}$. Poznato je, da se rešenje date jednačine nalazi po uopštenoj formuli:

$$x = \mathrm{arctg}a + n\pi,\ \text{gde } n \in \mathbb{Z} \text{ i } -\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}a < \frac{\pi}{2}.$$

Korisno je znati da je $\arctan(-a) = -\arccos a$.
4. Jednačina oblika $\mathrm{ctg}x = a$ gde $a \in \mathbb{R}$. Poznato je, da se rešenje date jednačine nalazi po formuli:

$$x = \mathrm{arcctg}a + n\pi,\ \text{gde } n \in \mathbb{Z} \text{ i } 0 < \mathrm{arcctg}a < \pi.$$

Korisno je znati da je $\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}a$.

Vrednosti trigonometrijskih funkcija nekih uglova:

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$

3.2 Zadaci

Zadatak 1. Ako je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, dokazati da je

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma$$

Rešenje: Leva strana, s obzirom da je $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, postupno se svodi na desnu:

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta - \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg} \cdot \alpha\mathrm{tg}\beta} =$$

$$= (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)\left(1 - \frac{1}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}\right) = (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)\left(\frac{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta - 1}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}(-\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta) = \mathrm{tg}(\alpha + \beta) \cdot (-\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta) = -\mathrm{tg}(\pi - \gamma)\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta =$$

$$= \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma.$$

Zadatak 2. Naći sva rešenja jednačine

$$\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 0.$$

Rešenje:

$$\begin{array}{l}
\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 0 \\
(\sin 3x - \sin x) + \sin 2x = 0 \\
2\sin x \cdot \cos 2x + 2\sin x \cdot \cos x = 0 \\
\sin x \cdot (\cos 2x + \cos x) = 0 \\
\sin x \cdot \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0 \\
\sin x = 0 \Rightarrow x_k = k\pi.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\cos \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow x_n = \frac{\pi}{3}(1+2n) & (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\
\cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi \Rightarrow x_m = \pi(1+2m) & (m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)
\end{array}$$

Zadatak 3. Naći sva rešenja jednačine

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$$

Rešenje:

$$\begin{array}{l}
\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow \sin x + \cos x - \dfrac{1}{\sin x} = 0 \Rightarrow \\
\dfrac{\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 1}{\sin x} = 0 \Rightarrow \\
\dfrac{\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x} = 0 \Rightarrow \\
\dfrac{\cos x \cdot (\sin x - \cos x)}{\sin x} = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \quad \vee \quad \sin x = \cos x \Rightarrow \\
x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
\end{array}$$

Zadatak 4. Izračunati $\sin^2(2\alpha)$, ako je

$$\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 7$$

Rešenje:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=7\Rightarrow$$
$$\frac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=7\Rightarrow$$
$$\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=7\Rightarrow$$
$$\frac{1-2(\frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha)^2+1}{(\frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha)^2}=7\Rightarrow\frac{2-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}=7\Rightarrow$$
$$2-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=\frac{7}{4}\sin^2 2\alpha\Rightarrow$$
$$\sin^2 2\alpha=\frac{8}{9}$$

Zadatak 5. Naći sva rešenja jednačine

$$\sin 5x\cos 3x=\sin 6x\cos 2x$$

Rešenje:

$$\sin 5x\cos 3x=\sin 6x\cos 2x$$
$$\sin 5x(\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x)=(\sin 5x\cos x+\sin x\cos 5x)\cos 2x$$
$$\sin 5x\cos 2x\cos x-\sin 5x\sin 2x\sin x=$$
$$=\sin 5x\cos x\cos 2x+\sin x\cos 5x\cos 2x$$
$$0=\sin x(\cos 5x\cos 2x+\sin 5x\sin 2x)$$
$$0=\sin x\cos 3x$$
$$\sin x=0\vee\cos 3x=0$$
$$x=k\pi\vee 3x=\tfrac{\pi}{2}+k\pi$$
$$x=k\pi\vee x=\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{k\pi}{3}\qquad k\in Z$$

Zadatak 6. Dokazati identitet

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

Rešenje:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}=$$
$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$
$$=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

Zadatak 7. Dokazati identitet

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{4}\sin^2\alpha$$

Rešenje:

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\alpha}{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=$$
$$\frac{(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha}{1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha-(1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{4\cos\alpha}=\frac{1}{4}\sin^2\alpha$$

Zadatak 8. Naći sva rešenja jednačine

$$\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$$

Rešenje:

$$\begin{array}{l}
\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\\
\cos 3x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\
3x=x+\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad\vee\quad 3x=-x-\frac{\pi}{6}+2k\pi\\
2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad\vee\quad 4x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\\
x=\frac{\pi}{12}+k\pi \quad\vee\quad x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} \qquad k\in Z
\end{array}$$

Zadatak 9. Dokazati identitet

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha-1)}=\frac{2}{1+\operatorname{tg}\alpha}$$

Rešenje:

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha(\mathrm{tg}^2\alpha-1)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-$$
$$\frac{1+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\left(\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=$$
$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1-2\cos^2\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=$$
$$=\frac{2\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{2}{1+\mathrm{tg}\alpha}$$

Zadatak 10. Naći sva rešenja jednačine

$$\sin^2 x-3\cos^2 x+2\sin 2x=1$$

Rešenje:

$$\sin^2 x-3\cos^2 x+2\sin 2x=1,\qquad 1=\sin^2 x+\cos^2 x$$
$$\sin^2 x-3\cos^2 x+2\sin 2x=\sin^2 x+\cos^2 x$$
$$-4\cos^2 x+4\sin x\cdot\cos x=0\Rightarrow\cos x(\sin x-\cos x)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\cos x=0\vee\sin x=\cos x$$
$$x=(2k+1)\tfrac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots\vee x=\tfrac{\pi}{4}+m\pi,\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Zadatak 11. Odrediti sva rešenja jednačine

$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin x\cdot\cos x}=8$$

Rešenje:

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x-8\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=0$$
$$\Rightarrow\frac{1-\sin 2x-2\sin^2 2x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}=0$$
$$\sin 2x=t,\qquad\frac{4-4t-8t^2}{t^2}=0,\quad t\neq0$$
$$-8t^2-4t+4=0\Rightarrow 2t^2+t-1=0\quad t_1=-1,\quad t_2=\tfrac{1}{2}$$
$$\sin 2x=-1\Rightarrow 2x=\tfrac{3\pi}{2}+2k\pi\qquad x=\tfrac{3\pi}{4}+k\pi$$
$$\sin 2x=\tfrac{1}{2}\Rightarrow 2x=\tfrac{\pi}{6}+2k\pi\qquad\vee\qquad 2x=\pi-\tfrac{\pi}{6}+2m\pi$$
$$x=\tfrac{\pi}{12}+k\pi\qquad\vee\qquad x=\tfrac{5\pi}{12}+m\pi\quad k,m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Zadatak 12. Rešiti nejednačinu

$$-2\cos^2 x + \sin x + 1 < 0$$

Rešenje:

$$\begin{array}{l}
-2\cos^2 x + \sin x + 1 < 0 \Rightarrow -2(1-\sin^2 x) + \sin x + 1 < 0 \\
2\sin^2 x + \sin x - 1 < 0 \quad \textbf{smena} \ \sin x = t \\
2t^2 + t - 1 < 0, \quad t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = -1, \quad -1 < t < \frac{1}{2} \\
-1 < \sin x < \frac{1}{2} \\
-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\
\frac{5\pi}{6} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots
\end{array}$$

Zadatak 13. Naći sva rešenja jednačine

$$\sin x + \mathrm{tg} x = 1 + \cos x$$

Rešenje:

$$\begin{array}{l}
\sin x + \dfrac{\sin x}{\cos x} = 1 + \cos x \\
\sin x \left(1 + \dfrac{1}{\cos x}\right) = 1 + \cos x \\
\dfrac{\sin x}{\cos x}(1 + \cos x) = 1 + \cos x \\
(1 + \cos x)(\mathrm{tg} x - 1) = 0 \\
1 + \cos x = 0 \quad \text{ili} \quad \mathrm{tg} x - 1 = 0 \\
\cos x = -1 \quad \vee \quad \mathrm{tg} x = 1 \\
x = \pi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad x = \frac{\pi}{4} + m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)
\end{array}$$

Zadatak 14. Naći $\sin 18^\circ$, koristeći jednakost

$$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$$

Rešenje:

$\alpha = 18^\circ$
$\sin 2\alpha = \cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha$
$\sin 2\alpha = \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$
$2\sin\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$
$2\sin\alpha\cos\alpha + 3\sin^2\alpha\cos\alpha - \cos^3\alpha = 0 \Leftrightarrow$
$\cos\alpha\left(2\sin\alpha + 3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right) = 0$
$\cos\alpha\left(4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1\right) = 0$
$\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nije rešenje zbog $5\alpha = \frac{\pi}{2}$
$4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0$
$\sin\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ ili $\sin\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$;
Kako je $\sin 18^\circ > 0$ to je $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Zadatak 15. Naći sva rešenja jednačine

$$\sin 9x + \sin 5x - \cos 2x = 0$$

Rešenje:

$\sin 9x + \sin 5x - \cos 2x = 0$
$$2\sin\frac{9x+5x}{2}\cos\frac{9x-5x}{2} - \cos 2x = 0$$
$2\sin 7x\cos 2x - \cos 2x = 0$
$\cos 2x\,(2\sin 7x - 1) = 0$
$\cos 2x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$
$x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$
$\sin 7x = \frac{1}{2}$, $7x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ili $7x = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi$
$$x_n = \frac{\pi}{42} + \frac{2n\pi}{7} \qquad x_m = \frac{5\pi}{42} + \frac{2m\pi}{7}$$
$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ $\qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Zadatak 16. Naći sva rešenja jednačine

$$\sqrt{3}\sin x = 1 - \cos x$$

Rešenje:

I NAČIN

$\sqrt{3}\sin x = 1 - \cos x \quad ; \quad 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2}$
$\sin\frac{x}{2}\left(\sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = 0 \quad ; \quad \sin\frac{x}{2} = 0$ ili
$\sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0$
$\sin\frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = k\pi \quad \Rightarrow \quad x_k = 2k\pi \qquad k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$
$\sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow$
$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + n\pi \quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \qquad n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

II NAČIN

$\sqrt{3}\sin x = 1 - \cos x \quad \Rightarrow \quad 3\sin^2 x = (1 - \cos x)^2$
$3\sin^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad 3\left(1 - \cos^2 x\right) = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$
$4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0 \quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \qquad \cos x = t$
$2t^2 - t - 1 = 0 \qquad t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -\dfrac{1}{2}$
$\cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2k\pi \quad \cos x = -\frac{1}{2} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ ili $x = \frac{-2\pi}{3} + 2m\pi$

Pošto smo na početku kvadrirali jednačinu, moramo proveriti da li su dobijena rešenja zaista rešenja polazne jednačine. Proverom dobijamo da su rešenja polazne jednačine

$$x = 2k\pi,\ = 0, \pm1, \pm2, \ldots \quad \text{i} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Zadatak 17. Rešiti trigonometrijsku jednačinu

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

Rešenje:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \frac{1}{2}$$

$$2\sin^2 x - 1 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad\qquad x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k = 0, \pm1, \pm2, \qquad\qquad k = 0, \pm1, \pm2,\ \ldots$$

$$x_3 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \qquad\qquad x_4 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k = 0, \pm1, \pm2, \qquad\qquad k = 0, \pm1, \pm2,\ \ldots$$

Zadatak 18. Naći sva rešenja jednačine

$$\sin x + \mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x} - \cos x$$

Rešenje:

$\sin x + \mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x} - \cos x \Rightarrow \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \cos x$
(uslov $\cos x \neq 0) \Rightarrow \sin x \cos x + \sin x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin x \cos x + \sin x = \sin^2 x \Rightarrow \sin x \cos x + \sin x - \sin^2 x = 0$
$\sin x\,(\cos x - \sin x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x$ ili $\sin x - \cos x = 1$
$\sin x = 0 \Rightarrow x_k = k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2,$
$\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 1^2 \Rightarrow$
$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = 1 \Rightarrow$
$2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ ili $\cos x = 0$
$\cos x \neq 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x_k = k\pi$ znači sva rešenja su $x = k\pi$.

Zadatak 19. Odrediti sve presečne tačke krivih

$$y = \sin x, \quad y = \sin 2x$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
& y = \sin x \quad y = \sin 2x \\
& \sin 2x = \sin x \quad \Rightarrow \quad \sin 2x - \sin x = 0 \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \quad 2\sin x \cos x - \sin x = 0 \\
& \Rightarrow \quad \sin x\,(2\cos x - 1) = 0 \\
& \Rightarrow \quad \sin x = 0, \quad \cos x = \tfrac{1}{2} \\
& \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_n = n\pi, \quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \qquad A_n\,(n\pi,\ 0) \\
& \cos x = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_k = \pm\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \Rightarrow \\
& \sin x_k = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad A_k\left(\pm\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Zadatak 20. Naći sva rešenja jednačine

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$$

Rešenje:

$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$
$\sin^2 2x = 1 - \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 2x = \cos^2 x$
$4\sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x \left(1 - 4\sin^2 x\right) = 0$
$\cos^2 x = 0 \vee 1 - 4\sin^2 x = 0$
$\cos^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi(2n+1)}{2},\ n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ ...$
$1 - 4\sin^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \pm\frac{1}{2}$
$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ ...$
$x_m = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi,\ m = 0,\ \pm1,\ ...$
$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Zadatak 21. Rešiti trigonometrijsku jednačinu

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{1}{2}.$$

Rešenje:

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x - \frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4} + x\right)\right] = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-2x) - \cos\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos 2x = -1$$

$$2x = \pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ ...$$

Zadatak 22. Naći sva rešenja jednačine

$$\cos 2x - 4\sin^2 x \cos^2 x = 1$$

Rešenje:

$$\cos 2x - 4\sin^2 x \cos^2 x = 1$$

$$\cos 2x - \sin^2 2x = 1$$

$$\cos 2x - 1 + \cos^2 2x = 1$$

$$\cos 2x = t$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = -2, \quad \cos 2x = -2, \quad \text{nema rešenja}$$
$$t_2 = 1, \quad \cos 2x = 1, \quad 2x = 2k\pi, \quad x = k\pi, \ k \in Z$$

Zadatak 23. Naći sva rešenja jednačine

$$\cos 2x + \cos x = \sin 2x + \sin x$$

Rešenje:

$$\cos 2x + \cos x = \sin 2x + \sin x$$

$$2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\frac{x}{2} = 0 \quad \vee \quad \cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2} = 0$$

$$\cos\frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(2n+1)\pi}{2},$$

$$x_n = (2n+1)\,\pi, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm ...$$

$$\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\frac{3x}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$x_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

Zadatak 24. Naći sva rešenja jednačine

$$\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0.$$

Rešenje:

$$
\begin{aligned}
&\sin 3x+\sin 2x+\sin x=0\\
&\Leftrightarrow 2\sin\tfrac{3x+x}{2}\cos\tfrac{3x-x}{2}+\sin 2x=0\\
&\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0\\
&\Leftrightarrow \sin 2x\,(2\cos x+1)=0\\
&\Leftrightarrow \sin 2x=0\ \vee\ 2\cos x+1=0\\
&\Leftrightarrow 2x=k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\dots\quad\vee\quad \cos x=-\tfrac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow x=\tfrac{k\pi}{2},\ k=0,\pm1,\pm2,\dots\quad\vee\quad x=\pi-\tfrac{\pi}{3}+2n\pi\\
&\Leftrightarrow x=\tfrac{k\pi}{2},\ k=0,\pm1,\pm2,\dots\quad\vee\quad x=\pi+\tfrac{\pi}{3}+2n\pi\\
&\Leftrightarrow x=\tfrac{k\pi}{2},\ k=0,\pm1,\pm2,\dots\quad\vee\quad x=(2k+1)\,\pi\pm\tfrac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Zadatak 25. Naći sva rešenja jednačine:

$$\cos 2x-4\sin^2 x\cos^2 x=1.$$

Rešenje:

$$
\begin{aligned}
&\cos 2x-(2\sin x\cos x)^2=1\\
&\cos 2x-\sin^2 2x=1\\
&\cos 2x-(1-\cos^2 2x)=1\\
&\cos^2 2x+\cos 2x-2=0\qquad \cos 2x=t\\
&t^2+t-2=0
\end{aligned}
$$

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}\quad;\qquad t_1=\frac{-1+3}{2}=1\quad;\qquad t_2=\frac{-1-3}{2}=-2-\text{otpada}$$

$$\cos 2x=1\qquad 2x=2k\pi;\qquad x=k\cdot\pi\qquad k\in Z$$

Zadatak 26. Naći sva rešenja jednačine

$$\sin\frac{x}{2}+\cos x=1.$$

Rešenje:

$$
\begin{aligned}
&\sin\tfrac{x}{2}+\cos x=1\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \sin\tfrac{x}{2}+\cos 2\tfrac{x}{2}=1\\
&\Leftrightarrow \sin\tfrac{x}{2}+\cos 2\tfrac{x}{2}=\sin^2\tfrac{x}{2}+\cos^2\tfrac{x}{2}\\
&\Leftrightarrow \sin\tfrac{x}{2}+\cos^2\tfrac{x}{2}-\sin^2\tfrac{x}{2}=\sin^2\tfrac{x}{2}+\cos^2\tfrac{x}{2}\\
&\Leftrightarrow \sin\tfrac{x}{2}-2\sin^2\tfrac{x}{2}=0\\
&\Leftrightarrow \sin\tfrac{x}{2}\left(1-2\sin\tfrac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left(\sin\tfrac{x}{2}=0\right)\vee\left(\sin\tfrac{x}{2}=\tfrac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$1)\ \sin\tfrac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \tfrac{x}{2}=k\pi, \quad k=0,\pm1,\pm...;\ x=2k\pi$$

$$2)\ \sin\tfrac{x}{2}=\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\tfrac{x}{2}=\tfrac{\pi}{6}+2k\pi\right)\vee\left(\tfrac{x}{2}=\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right),\ k=0,\pm1,\pm2...;$$

Rešenje je $x=\frac{\pi}{3}+4k\pi$ i $x=\frac{5\pi}{3}+4k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2...;$

Zadatak 27. Naći sva rešenja jednačine:

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
&\sin^4 x-\cos^4 x=\tfrac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\tfrac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow -\cos 2x=\tfrac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 2x=-\tfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\pi\pm\tfrac{\pi}{3}+2k\pi\\
&k=0,\pm1,\pm2,...;\\
&x=\tfrac{\pi}{2}\pm\tfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,...;
\end{aligned}$$

Zadatak 28. Naći sva rešenja jednačine

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cos x$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x+\cos^2 x=1\\
&\Leftrightarrow \sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=1\\
&\Leftrightarrow \sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x.
\end{aligned}$$

Jednačina $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cos x$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x=\sin x\cos x\\
&\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos x=0\\
&\Leftrightarrow 1-2t^2-t=0\Leftrightarrow 2t^2+t-1=0 \text{ gde je } t=\sin x\cos x\\
&t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=-1,\ \frac{1}{2};\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x
\end{aligned}$$

1. $\frac{1}{2}\sin 2x=-1\Leftrightarrow \sin 2x=-2$ otpada
2. $\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,...$

Zadatak 29. Naći sva rešenja jednačine

$$\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0.$$

Rešenje:

Primenom trigonometrijske identičnosti $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ dobiće se

$$\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$$
$$t = \sin x, \quad 2t^2 + 5t + 2 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = -2, -\frac{1}{2};$$
$t_1 = -2$ nema smisla jer je $|t| = |\sin x| \leq 1$
$$t_2 = \sin x = -\tfrac{1}{2}, \quad x = \left(\tfrac{3\pi}{2} \pm \tfrac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

4

Geometrija

4.1 Planimetrija

Trougao

Površina trougla ΔABC:

1) $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$

2) $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$

3) $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$

4) $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a stranica jednakostraničnog trougla)

5) $P = \frac{abc}{4R}$

6) $P = r \cdot s, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$

Sinusna teorema: Stranice trougla proporcionalne su sinusima njima nasprannih uglova. Odnos dužine stranica i sinusa naspramnog ugla je konstatan i jednak je prečniku kruga ($2R$) opisanog oko trougla.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Kosinusna teorema: Neka su a, b i c dužine stranica i α, β, γ veličine odgovarajućih unutrašnjih uglova trougla ΔABC. Tada je:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Četvorougao:

Pravougaonik: $P = ab$

Kvadrat: $P = a^2 = \frac{d^2}{2}$

Paralelogram:
1) $P = ah_a = bh_b$, (h_a i h_b odgovarajuće visine paralelograma)
2) $P = ab\sin\alpha$, (α ugao koji obrazuju stranice a i b)

Romb: $P = ah = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

Trapez: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, a i b osnovice, h visina trapeza

Deltoid:$P = \frac{d_1 d_2}{2}$

Ako su d_1 i d_2 dijagonale konveksnog četvorougla i φ ugao koji oni grade, onda je površina tog četvorougla $P = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Ako se dijagonale d_1 i d_2 konveksnog četvorougla seku pod pravim uglom, onda je površina tog četvorougla $P = \frac{d_1 d_2}{2}$.

Krug:

Obim kruga: $O = 2r\pi$

Površina kruga: $P = r^2\pi$

Kružni luk: $l = \frac{r\pi\alpha}{180^o}$, α odgovarajući centralni ugao u stepenima

Kružni isečak: $P_i = \frac{r^2\pi\alpha}{360^o}$, α odgovarajući centralni ugao u stepenima

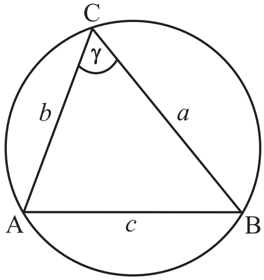
4.1.1 Zadaci

Zadatak 1. U ΔABC razlika stranica a i b je $3cm$, ugao $\gamma = 60^o$, a poluprečnik opisane kružnice je $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. Odrediti stranice trougla ABC.

Rešenje: Odredimo stranicu c:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R \Rightarrow c = 2R\sin\gamma = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 60^o$$

$$c = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 7$$



Slika uz 1. zadatak

Na osnovnu kosinusne teoreme je:

$$
\begin{aligned}
&c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\\
&7^2 = (b+3)^2 + b^2 - 2b(b+3)\cos 60^o\\
&49 = b^2 + 6b + 9 + b^2 - 2b(b+3)\cdot\frac{1}{2}\\
&49 = b^2 + 6b + 9 + b^2 - b^2 - 3b\\
&b^2 + 3b - 40 = 0
\end{aligned}
$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su $b = 5$ i $b = -8$, ali negativno rešenje odbacujemo jer dužina stranice ne može da bude negativan broj. Dakle, $b = 5$, $a = 8$.

Zadatak 2. Ako su stranice trougla $a-2, a$ i $a+2$, a jedan ugao iznosi 120^o, odrediti stranice.

Rešenje: Primetimo da tup ugao stoji naspram najveće stranice u trouglu, odnosno naspram stranice dužine $a+2$. Zato je

$$
\begin{aligned}
&(a+2)^2 = (a-2)^2 + a^2 - 2a(a-2)\cos 120^o\\
&a^2 + 4a + 4 = a^2 - 4a + 4 + a^2 + a^2 - 2a\\
&2a^2 - 10a = 0\\
&a = 5, \quad b = a-2 = 3, \quad c = a+2 = 7.
\end{aligned}
$$

Zadatak 3. Odrediti stranice trougla površine $P = 3\sqrt{3}$, ako je ugao $\alpha = 60^o$, a zbir dužina stranica koje obrazuju dati ugao $b + c = 7$.

Rešenje: Kako je

$$
\begin{aligned}
&P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{1}{2}bc\sin 60^o \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&bc = 12 \quad \wedge \quad b + c = 7\\
&b(7-b) = 12 \Rightarrow b^2 - 7b - 12 = 0\\
&b = 4, c = 3 \quad \vee \quad b = 3, c = 4.
\end{aligned}
$$

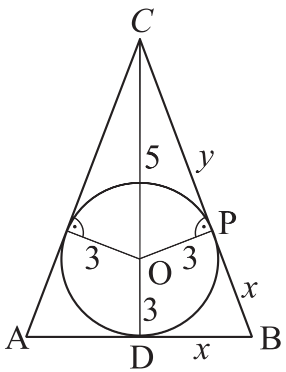
Na osnovu kosinusne teoreme, računamo stranicu a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$a^2 = 25 - 24\cdot\cos 60 = 25 - 24\cdot\frac{1}{2}$$
$$a^2 = 25 - 12 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}.$$

Zadatak 4. Centar upisanog kruga u jednakokraki trougao deli visinu koja odgovara osnovici tog trougla na odsečke 5 cm i 3 cm, računajući od temena. Izračunati dužine stranica tog trougla.

Rešenje: Označimo sa

$AB = a\ ,\ AC = BC = l\ ,\ BP + PC = l\ ,\ BP = x\ ,\ PC = y.$



Slika uz 4. zadatak

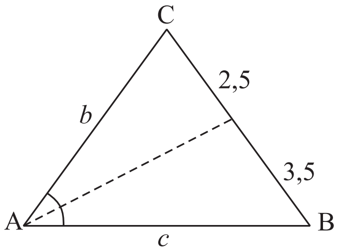
Tangentne duži povučene iz iste tačke jednake, pa je $BD = BP = x$.
U pravouglom trouglu ΔOPC je $5^2 = 3^2 + y^2 \Leftrightarrow y = 4$.
Visina trougla ΔABC je $CD = h = 5 + 3 = 8$.
U pravouglom trouglu ΔDBC je $BC^2 = CD^2 + BD^2$, pa je

$$(x+4)^2 = 8^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 8^2 + x^2 \Leftrightarrow 8x = 48 \Leftrightarrow x = 6$$

Dakle, stranica $AB = a = 2x = 12, \quad BC = AC = l = x + y = 10.$

Zadatak 5. Obim trougla je 18 cm. Simetrala jednog ugla deli suprotnu stranicu na odsečke $2,5$ cm i $3,5$ cm. Naći stranice trougla.

Rešenje:



Slika uz 5. zadatak

Na osnovu uslova zadatka je $a+b+c=18$, pri čemu je $a=2,5+3,5=6$, pa je zato $b+c=12$. Dalje zadatak rešavamo koristeći teoremu o simetrali unutrašnjeg ugla trougla koja deli naspramnu stranicu u odnosu koji je proporcionalan odnosu odgovarajućih (bližih) stranica.

$$\frac{c}{3,5}=\frac{b}{2,5}\Rightarrow 25c=35b\Rightarrow c=\frac{7b}{5}$$

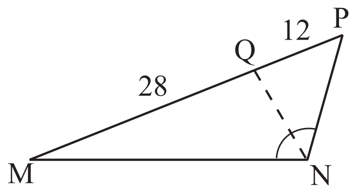
$$b+c=12,\quad b+\frac{7b}{5}=12\Rightarrow b=5,\ c=7$$

$$a=6,\ b=5,\ c=7.$$

Zadatak 6. Simetrala ugla kod temena N trougla MNP deli stranicu MP na odsečke čije su dužine 28 i 12. Odrediti obim ΔMNP ako je $MN-NP=18$.

Rešenje: Označimo sa $MQ=28\quad QP=12$. Poznata je sledeća proporcija:

$$\frac{MN}{28}=\frac{NP}{12}\Leftrightarrow MN=\frac{28}{12}NP=\frac{7}{3}NP.$$



Slika uz 6. zadatak

Kako je $MN-NP=18$, to je

$$\frac{7}{3}NP-\frac{3}{3}NP=18\Leftrightarrow\frac{4}{3}NP=18\Leftrightarrow NP=\frac{27}{2};$$

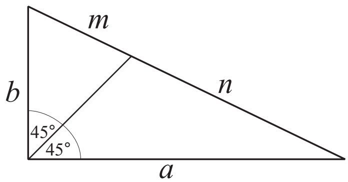
$$MN=\frac{7}{3}\cdot\frac{27}{2}\ MN=\frac{63}{2};$$

$$O=MN+NP+PM=\frac{63}{2}+\frac{27}{2}+40=85;\ O=85.$$

Zadatak 7. Katete pravouglog trougla su a i b. Izračunati dužinu simetrale pravog ugla.

Rešenje: Neka su m i n odsečci koje pravi simetrala paravog ugla na hipotenuzi. Zato je $m+n=\sqrt{a^2+b^2}$. Kako simetrala unutrašnjeg ugla deli naspramnu stranicu u odnosu koji je proporcionalan odnosu odgovarajućih (bližih) stranica, nakon zamene n sa $\sqrt{a^2+b^2}-m$, dobijamo :

$$\frac{b}{m}=\frac{a}{n}\Leftrightarrow m=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b};\quad n=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$



Slika uz 7. zadatak

Prema kosinusnoj teoremi imamo da je:

$$\left.\begin{aligned} m^2 = &\quad b^2+s^2-2bs\frac{\sqrt{2}}{2}\\ n^2 = &\quad a^2+s^2-2as\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow m^2-n^2=b^2-a^2+\sqrt{2}s\left(a-b\right)$$

Dakle:

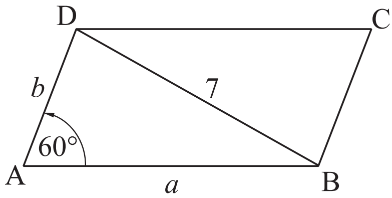
$$s=\frac{m^2-n^2+a^2-b^2}{\sqrt{2}\left(a-b\right)}=\frac{\frac{b^2\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)^2}-\frac{a^2\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)^2}+a^2-b^2}{\sqrt{2}\left(a-b\right)}$$

$$s=\frac{\left(b^2-a^2\right)\left[\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}-1\right]}{\sqrt{2}\left(a-b\right)}=\frac{\left(b-a\right)\left(a+b\right)\left(-2ab\right)}{\sqrt{2}\left(a-b\right)\left(a+b\right)^2}=\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}.$$

Zadatak 8. Izračunati strane paralelograma čiji je obim 22 cm, oštar ugao 60° i manja dijagonala 7 cm.

Rešenje: U datom paralelogramu je kraća dijagonala $d=7cm$, oštar ugao $\alpha=60^\circ$, a poluobim $a+b=11cm$. Na osnovu kosinusne teoreme važi:

$$d^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha\quad\text{tj. } a^2+b^2-ab=49$$



Slika uz 8. zadatak

Dobija se sistem jednačina:

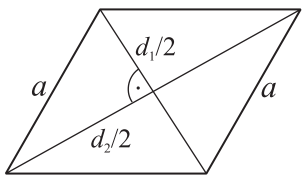
$$\begin{aligned} a + b &= 11 \\ a^2 + b^2 - ab &= 49 \end{aligned}$$

Zamenom $b = 11 - a$ u drugu jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned} &a^2 + (11 - a)^2 - a(11 - a) = 49 \\ &a^2 - 11a + 24 = 0 \\ &a = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} \\ &a = 8, \quad b = 3. \end{aligned}$$

Zadatak 9. Odrediti stranicu romba ako je odnos dijagonala $d_1 : d_2 = 1 : 2$, a površina $P = 16\ cm^2$.

Rešenje:



Kako je $d_1 : d_2 = 1 : 2$, to je $2d_1 = d_2$. Sa druge strane, znamo da je $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 16\ cm^2$, odnosno $d_1 \cdot d_2 = 32$. Zamenom $d_2 = 2d_1$ dobijamo da je $2d_1^2 = 32 \Rightarrow d_1 = 4\ cm, \quad d_2 = 8\ cm$. Kako se dijagonale romba polove i seku pod pravim uglom, to je $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$ tj.

$$a^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow a^2 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}.$$

Zadatak 10. Dijagonale romba odnose se kao $3 : 4$ ($d_1 : d_2 = 3 : 4$). Odrediti odnos površine romba i površine kruga upisanog u taj romb.

Rešenje: Radi lakšeg zapisivanja, označimo sa $s_1 = \frac{d_1}{2}, \quad s_2 = \frac{d_2}{2}$.

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{3}{4} = \mathrm{tg}\varphi, \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}} = \frac{3}{5}$$

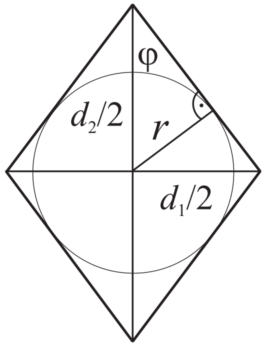
$$\frac{r}{s_2} = \sin\varphi \Rightarrow \quad r = \sin\varphi \cdot s_2 = \frac{3}{5}s_2$$

$$s_1 : s_2 = 3 : 4 \Rightarrow s_1 = \frac{3}{4}s_2$$

$$P_{\text{romba}} = \frac{d_2 \cdot d_2}{2} = \frac{2s_1 \cdot 2s_2}{2} = 2\frac{3}{4}s_2^2 = \frac{3}{2}s_2^2$$

$$P_{\text{kruga}} = r^2\pi = \left(\frac{3}{5}s_2\right)^2 \pi = \frac{9}{25}s_2^2\pi$$

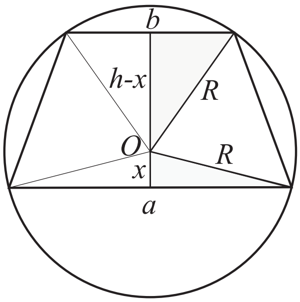
$$\frac{P_{\text{romba}}}{P_{\text{kruga}}} = \frac{\frac{3}{2}s_2^2}{\frac{9}{25}s_2^2\pi} = \frac{25}{6\pi}.$$



Slika uz 10. zadatak

Zadatak 11. Visina jednakokrakog trapeza je $17cm$ a osnovice su $10cm$ i $24cm$. Izračunati poluprečnik kruga opisanog oko tog trapeza.

Rešenje: $R = 13$.



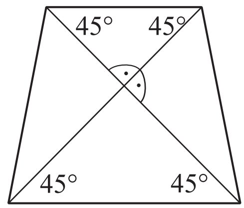
Slika uz 11. zadatak

Uputstvo: Na osnovu pitagorine teoreme iz dva trougla kojima je R hipotenuza, a polovine osnovica odgovarajuće katete formiramo sistem

$$\left.\begin{array}{l} R^2 = 5^2 + (17-x)^2 \\ R^2 = 12^2 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 25 + 17^2 + x^2 - 34x = 144 + x^2 \\ 34x = 170 \Rightarrow \quad x = 5, \quad R = 13. \end{array}$$

Zadatak 12. Odrediti površinu jednakokrakog trapeza čija dijagonala $d = 2cm$ obrazuje sa osnovom ugao od $45°$.

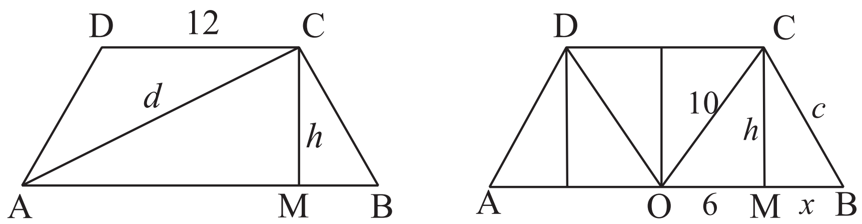
Rešenje: Primetimo da je u pitanju jednakokraki trapez, pa su dijagonale jednake i sa osnovama zaklapaju uglove od 45°. Zato su dijagonale ovog trapeza uzajamno ortogonalne, pa površinu možemo izračunati pomoću formule za površinu četvorougla čije se dijagonale seku pod pravim uglom, odnosno $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$.



Slika uz 12. zadatak

Zadatak 13. Naći dijagonalu i krak jednakokrakog trapeza čije su osnove $a = 20$, $b = 12$, ako se zna da se centar opisane kružnice oko trapeza nalazi na većoj osnovici.

Rešenje:



Slika uz 13. zadatak

Označimo sa O centar opisane kružnice oko jednakokrakog trapeza $ABCD$. Uočimo da je

$$OA = OB = OC = OD = 10; \quad OM = \frac{DC}{2} = 6;$$

Iz trougla $\triangle\, OMC$ na osnovu Pitagorine teoreme imamo:

$$h^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow h^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow h = 8.$$

Uočimo trougao $\triangle\, MBC$ i označimo sa $x = MB = \frac{20-12}{2} = 4$. Dalje je

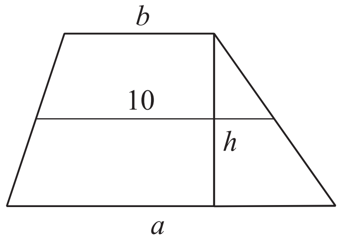
$$c^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow c^2 = 64 + 16 \Rightarrow c^2 = 80 \Rightarrow c = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Na kraju, iz trougla $\triangle\ AMC$:

$$d^2 = h^2 + (20 - x)^2 = 64 + 16^2 = 16 \cdot 4 + (16)^2 \Rightarrow$$
$$d = \sqrt{16 \cdot 4 + 16 \cdot 16} = \sqrt{16 \cdot (4 + 16)} = 4\sqrt{20} = 8\sqrt{5}.$$

Zadatak 14. Srednja linija trapeza iznosi 10 i deli površinu tog trapeza u odnosu 3 : 5. Izračunati dužinu osnovica trapeza.

Rešenje:



Slika uz 14. zadatak

Srednja linija trapeza je $m = \frac{a+b}{2} = 10$. Ova srednja linija deli trapez na dva manja trapeza čije se površine odnose 3 : 5, odnosno

$$\left(\frac{10+b}{2} \cdot \frac{h}{2}\right) : \left(\frac{10+a}{2} \cdot \frac{h}{2}\right) = 3 : 5$$
$$\frac{5}{4} \cdot (10+b)h = \frac{3}{4}(10+a)h$$
$$50 + 5b = 30 + 3a$$
$$3a - 5b = 20$$

Da bi odredili osnovice trapeza, rešavamo sistem :

$$a + b = 20$$
$$3a - 5b = 20$$

Zamenom $a = 20 - b$ u drugu jednačinu dobijamo

$$60 - 3b - 5b = 20 \Rightarrow 8b = 40 \Rightarrow b = 5, a = 20 - 5 = 15.$$

Zadatak 15. U jednakokraki trapez čija je površina $20cm^2$ upisan je krug poluprečnika $2cm$. Odrediti strane tog trapeza.

Rešenje: Primetimo najpre da je u datom trapezu visina $h = 2r$. Zato je

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{a+b}{2}\cdot 2r=(a+b)\cdot r,$$

$20=(a+b)\cdot 2 \Rightarrow a+b=10 \qquad (1)$

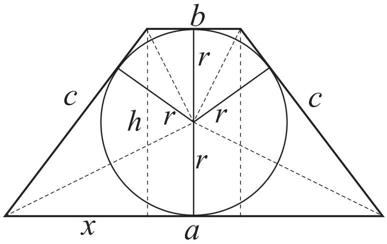
Isto tako, važi i sledeće:

$$P=\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}+2\cdot\frac{c\cdot r}{2}$$

Zamenom $r=2$ dobijamo da je

$P=a+b+2c \Rightarrow a+b+2c=20 \qquad (2)$

$(2)-(1) \qquad 2c=10 \Rightarrow c=5$



Slika uz 15. zadatak

Označimo sa $x=\frac{a-b}{2}$. Korišćenjem Ptagorine teoreme dobijamo da je

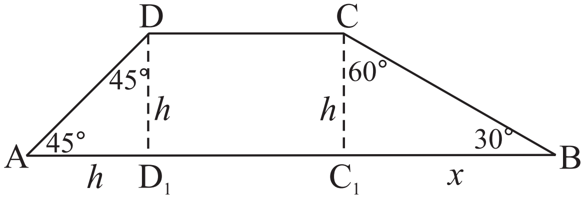
$$x^2+h^2=c^2$$
$$x^2+4^2=5^2 \Rightarrow x=3$$
$$x=\frac{a-b}{2}=3 \Rightarrow a-b=6$$

Dobijamo sistem jednačina iz koga nalazimo a i b

$$\left.\begin{aligned} a+b= & \ 10\\ a-b= & \ 6\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2a=16 \quad \Rightarrow \quad a=8, \quad b=2, \quad c=5.$$

Zadatak 16. Osnove trapeza su $a=8\ cm$, $b=4\ cm$, a uglovi na većoj osnovici su 30° i 45°. Izračunati površinu trapeza.

Rešenje: Površina trapeza je : $P=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{8+4}{2}\cdot h=6h$.



ΔAD_1D je jednakokrako pravougli, pa je $AD_1=D_1D=h$.

$AB = a = 8 = AD_1 + D_1C_1 + C_1B = h + b + x$
$8 = h + 4 + x \quad \Leftrightarrow \quad h + x = 4$
Posmatrajmo ΔC_1BC : $\text{tg}30^\circ = \frac{h}{x} \quad x = h \cdot \text{ctg}30^\circ = h\sqrt{3}$.
Primetimo da se do istog rezultata moglo doći i korišćenjem činjenice da je ΔC_1BC polovina jednakostraničnog trougla stranice $2h$ čija je visina $x = h\sqrt{3}$. Sada računamo:
$h + x = 4 \wedge x = h\sqrt{3} \Rightarrow h\left(1+\sqrt{3}\right) = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{\sqrt{3}+1} = 2\left(\sqrt{3}-1\right)$;
$P = 6h = 12\left(\sqrt{3}-1\right)$.

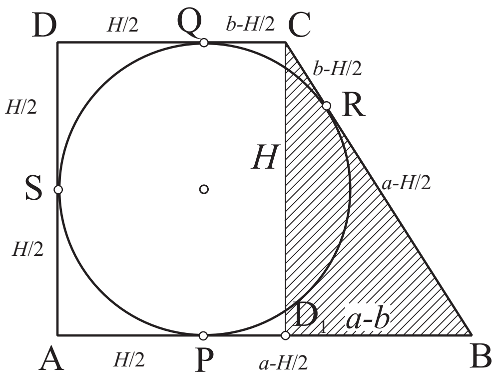
Zadatak 17. Pravougli trapez sa osnovama $a = 9\ cm$, $b = 6\ cm$ opisan je oko kruga. Izračunati površinu trapeza.

Rešenje: Poznato je da je površina trapeza

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot H = \frac{15}{2} \cdot H.$$

Stranica AD jednaka je H, pa su tangentne duži povučene iz temena A i D jednake i iznose $H/2$.
Posmatrajmo stranicu BC i iskoristimo osobinu da su tangentne duži povučene iz neke tačke na krug jednake. Zato je

$$BC = BR + CR = BP + CQ = a - \frac{H}{2} + b - \frac{H}{2} = a + b - H.$$



$\underline{\Delta D_1BC:}$
$BC^2 = BD_1^2 + D_1C^2$
$(a+b-H)^2 = (a-b)^2 + H^2$
$(15-H)^2 = (9-6)^2 + H^2$
$225 - 30H + H^2 = 9 + H^2 \quad \Rightarrow$
$30H = 216 \Rightarrow H = \dfrac{216}{30} = \dfrac{36}{5}$
$P = \dfrac{15}{2} \cdot H = \dfrac{15}{2} \cdot \dfrac{36}{5} = 54\ cm^2.$

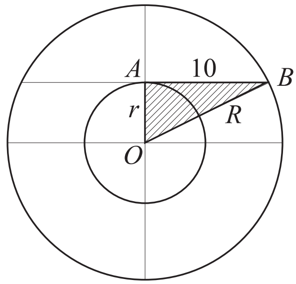
Zadatak 18. Za dva koncentrična kruga zna se da tangenta na manji krug odseca na većem krugu tetivu dužine 20 cm. Naći površinu kružnog prstena.

Rešenje: Površina kružnog prstena jednaka je

$$P_{kp} = R^2\pi - r^2\pi = \left(R^2 - r^2\right)\pi.$$

Za izračunavanje ove površine ne moramo da znamo R i r, dovoljno je da znamo vrednost izraza $R^2 - r^2$. Uočimo ΔOAB:

$OA = r, \quad OB = R, \quad AO \perp AB:$
ΔOAB je pravougli
$\Rightarrow r^2 + 10^2 = R^2$
$\Rightarrow R^2 - r^2 = 100 \Rightarrow P_{kp} = 100\pi.$



Slika uz 18. zadatak

Zadatak 19. Oko pravilnog mnogougla stranice a opisan je i upisan krug. Pokazati da površina kružnog prstena izmedju ova dva kruga ne zavisi od broja stranica.Kolika je površina tog kružnog prstena u slučaju šestougla stranice $a = 2$?
Rešenje: $P = \pi(R^2 - r^2) = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$. U slučaju $a = 2$, $P_{kp} = \pi$.

Zadatak 20. Dati su romb i kvadrat jednakih obima. Odrediti oštar ugao romba ako se zna da je njegova površina dva puta manja od površine kvadrata.
Rešenje: Površina romba stranice a je $P = a^2 \sin\alpha$, gde je α oštar ugao koji obrazuju stranice romba. Zato je $a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}a^2$, odakle je $\alpha = 30^o$.

Zadatak 21. U romb površine $18cm^2$ upisan je krug površine $\frac{9}{4}\pi cm^2$. Odrediti stranicu i oštar ugao romba.
Rešenje: $r = \frac{3}{2}; h = 2r = 3$. Iz $P_r = ah$ nalazimo $a = 6$. Kako je $P_r = a^2 \sin\alpha$, nalazimo $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ odnosno $\alpha = 30^o$.

Zadatak 22. Izračunati površinu paralelograma čiji je obim 20, oštar ugao 30^o, a visine se odnose kao $2:3$.
Rešenje: Iz $h_a : h_b = 2 : 3$ dobijamo da je $h_a = \frac{2}{3}h_b$. Dalje, iz površine paralelograma je $a \cdot h_a = b \cdot h_b$. Kako je $a + b = 10$, to je $a = 10 - b$, pa je $(10 - b) \cdot \frac{2}{3}h_b = b \cdot h_b$, odakle je $20 - 2b = 3b$, pa je $b = 4, a = 6, P = ab\sin\alpha = 12$.

4.2 Stereometrija

Prizma:

Površina prizme: $P = 2B + M$, (B površina baze, M površina omotača)
Zapremina prizme: $V = B \cdot H$, (H visina prizme)

Piramida:

Površina piramide: $P = B + M$, (B površina baze, M površina omotača)
Zapremina piramide: $V = \frac{1}{3} B \cdot H$, ($H$ visina prizme)

Zarubljana piramida

Površina zarubljene piramide: $P = B_1 + B_2 + M$
Zapremina zarubljene piramide: $V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$

Valjak

Površina valjka: $P = 2B + M = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot H = 2r\pi(r + H)$,
($B = r^2\pi$ bazis valjka, $M = 2r\pi \cdot H$ omotačvaljka)
Zapremina valjka: $V = B \cdot H = r^2\pi H$

Kupa

Površina kupe: $P = B + M = r^2\pi + r\pi s$,
(s izvodnica kupe, $M = sr\pi$ omotač kupe, $B = r^2\pi$ bazis kupe)
Zapremina kupe: $V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot H$

Zarubljena kupa

Površina zarubljene kupe:$P = B_1 + B_2 + M$
($B_1 = r_1^2\pi, \quad B_2 = r_2^2\pi, \quad M = s(r_1 + r_2)\pi$)
Zapremina zarubljene kupe:$V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$
($V = \frac{H\pi}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

Lopta

Površina lopte: $P = 4\pi R^2$, R poluprečnik lopte
Zapremina lopte: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Površina kalote i pojasa: $P = 2\pi Rh$
(R poluprečnik lopte, h visina kalote odnosno pojasa)

4.2.1 Zadaci

Prizma

Zadatak 23. Izračunati površinu i zapreminu pravilne četvorostrane prizme (osnova kvadrat) kod koje je površina omotača $M = 18\sqrt{6}\ cm^2$, a nagibni ugao njene dijagonale prema osnovi iznosi $30°$.

Rešenje:

$\measuredangle(d, D) = 30° \quad \Rightarrow \quad D = 2H$

$M = 4aH = 18\sqrt{6} \Rightarrow a = \dfrac{18\sqrt{6}}{4H};$

Kako je $\quad d = a\sqrt{2} \Rightarrow D^2 = d^2 + H^2$

$(2H)^2 = 2a^2 + H^2$

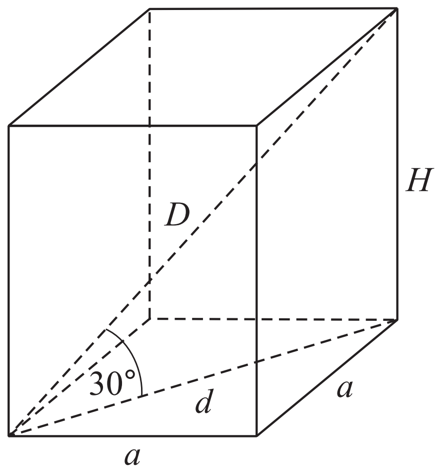
$4H^2 = 2a^2 + H^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3H^2 = 2a^2$

$3H^2 = 2\left(\dfrac{18\sqrt{6}}{4H}\right)^2 \Rightarrow H = 3, \quad a = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

$P = 2a^2 + 4aH = 2\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \dfrac{3\sqrt{6}}{2} \cdot 3$

$P = 9\left(3 + 2\sqrt{6}\right)$

$V = a^2H = \left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 \cdot 3 = \dfrac{81}{2}$



Slika uz 23. zadatak

Zadatak se može rešiti i na drugi način:

$$\frac{H}{d} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad d = a\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow H = \frac{a\sqrt{6}}{3};$$

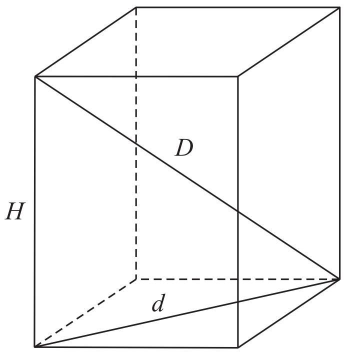
$$M = 4aH = 18\sqrt{6} \Rightarrow aH = \frac{18\sqrt{6}}{4} \Rightarrow a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{18\sqrt{6}}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{2}\sqrt{6}; H = 3.$$

Odavde se lako računa

$$P = 2a^2 + M = 27 + 18\sqrt{6}, \quad V = a^2H = \frac{81}{2}.$$

Zadatak 24. Pravilna četvorostrana prizma ima omotač površine $8m^2$ i dijagonalu $3m$. Izračunati njenu zapreminu.

Rešenje: Označimo sa $d = a\sqrt{2}$ dijagonalu osnove, a sa $D = 3$ veliku dijagonalu ove prizme. Tada je



Slika uz 24. zadatak

$$M = 4aH = 8 \quad \wedge \quad d^2 + H^2 = D^2$$
$$\Rightarrow H = \frac{2}{a} \quad \wedge \quad \left(a\sqrt{2}\right)^2 + H^2 = 9$$
$$\Rightarrow 2a^2 + \frac{4}{a^2} - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2a^4 - 9a^2 + 4 = 0; \quad t = a^2$$
$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$
$$t_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}$$
$$t_1 = \frac{9+7}{4} = 4, \qquad t_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}.$$

I slučaj:

$$t = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad H = 1$$

$$V = B \cdot H = a^2 \cdot H = 4 \cdot 1 = 4; \quad V = 4.$$

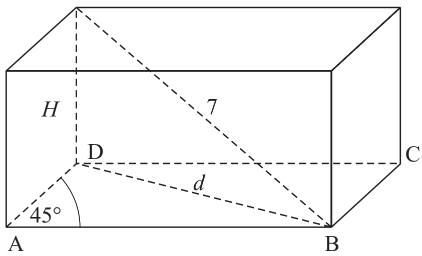
II slučaj:

$$t = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad H = 2\sqrt{2}$$

$$V = B \cdot H = a^2 \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}; \quad V = \sqrt{2}.$$

Zadatak 25. Osnova pravog paralelopipeda je paralelogram stranica $2\sqrt{2}$ i 5 i oštrog ugla $\alpha = 45°$, kraća dijagonala je 7. Naći njegovu zapreminu.

Rešenje: Posmatrajmo paralelogram $ABCD$ - bazis ovog paralelopipeda i uočimo ΔABD. Označimo $AB = a = 5$, $BD = d$, $AD = b = 2\sqrt{2}$, $\sphericalangle BAD = \alpha = 45^o$. Površina ΔABD je $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$. Važi kosinusna teorema:



Slika uz 25. zadatak

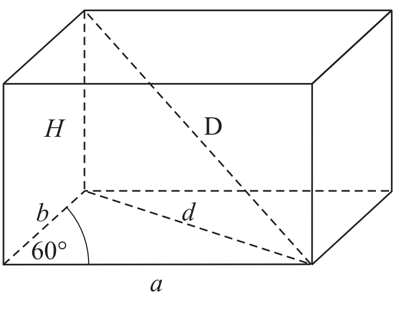
$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$
$$d^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 5^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 5\cdot\cos 45^\circ$$
$$d^2 = 8 + 25 - 20\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 33 - 20 = 13$$
$$d = \sqrt{13}$$
$$H^2 = 7^2 - d^2 = 49 - 13 = 36,\ H = 6.$$

Sada lako dobijamo

$$V = B\cdot H;\quad B = ab\sin\alpha = 2\sqrt{2}\cdot 5\frac{\sqrt{2}}{2} = 10;\quad V = B\cdot H = 10\cdot 6 = 60.$$

Zadatak 26. Osnova pravog paralelopipeda je paralelogram sa stranicama $4cm$ i $2cm$ i oštrim uglom $\alpha = 60^o$. Kraća dijagonala paralelopipeda je $4\sqrt{3}$. Izračunaj zapreminu tog paralelopipeda.

Rešenje:



Slika uz 26. zadatak

Zapremina paralelopipeda je $V = B\cdot H$. Površina bazisa je:

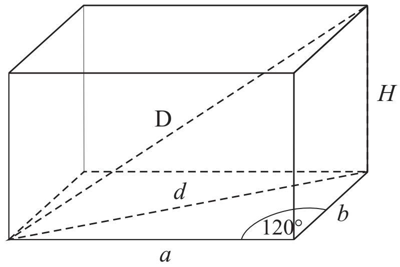
$$B = ab\sin\alpha = 4\cdot 2\cdot\sin 60^o = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Uočimo da se kraća dijagonala ovog paralelopipeda $D = 4\sqrt{3}$ nalazi iznad kraće dijagonale d paralelograma u osnovi ove prizme (kraća dijagonala paralelograma se nalazi naspram manjeg ugla, odnosno naspram ugla od 60^o). Koristeći kosinusnu teoremu, dobijamo

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos 60^o \Rightarrow d^2 = 16 + 4 - 16\cdot\frac{1}{2} = 12$$
$$d^2 + H^2 = D^2 \Rightarrow 12 + H^2 = 48 \Rightarrow H^2 = 36 \Rightarrow H = 6$$
$$V = B\cdot H = 24\sqrt{3}.$$

Zadatak 27. Osnova pravog paralelopipeda je paralelogram sa stranicama $4cm$ i $1cm$ i oštrim uglom 60^o. Duža dijagonala paralelopipeda je $5cm$. Izračunaj zapreminu tog paralelopipeda.

Rešenje:



Slika uz 27. zadatak

Zapremina paralelopipeda je $V = B \cdot H$. Površina bazisa je:

$$B = ab \sin\alpha = 4 \cdot 1 \cdot \sin 60^o = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Uočimo da se duža dijagonala paralelopipeda $D = 5$ nalazi iznad duže dijagonale d paralelograma u osnovi (a ona se nalazi naspram većeg ugla ovog paralelograma, odnosno nasparam ugla od 120^o). Koristeći kosinusnu teoremu, dobijamo

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120^o \Rightarrow d^2 = 16 + 1 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 21$$

$$d^2 + H^2 = D^2 \Rightarrow 21 + H^2 = 25 \Rightarrow H^2 = 4 \Rightarrow H = 2$$

$$V = B \cdot H = 4\sqrt{3}.$$

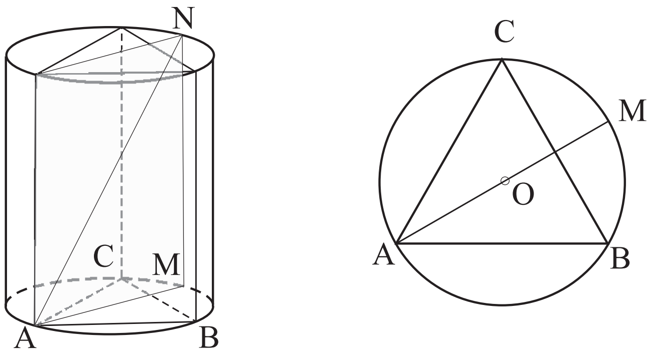
Zadatak 28. Pravilna trostrana prizma upisana je u valjak. Poluprečnik osnove valjka je $r = 6$, a dijagonala osnog preseka je $d = 13cm$. Izračunati površinu i zapreminu prizme.

Rešenje: Bazis prizme je jednakostraničan trougao ΔABC upisan u krug poluprečnika $r = 6$ sa centrom u O (bazis valjka). Uočimo pravougli trougao ΔAMN koji pripada osnom preseku valjka

$$AM = 2r = 12, \quad AN = d = 13, \quad MN = H$$

$$H^2 = AN^2 - AM^2 = 13^2 - 12^2 = (13-12)(13+12) = 25 \Rightarrow H = 5.$$

Posmatrajmo sada bazis prizme ΔABC.



Slika uz 28. zadatak

$$r = OA = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = r\sqrt{3} = 6\sqrt{3};$$
$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3};$$
$$M = 3 \cdot aH = 3 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 5 = 90\sqrt{3};$$
$$P = 2B + M = 2 \cdot 27\sqrt{3} + 90\sqrt{3} = 144\sqrt{3};$$
$$V = B \cdot H = 27\sqrt{3} \cdot 5 = 135\sqrt{3}.$$

Zadatak 29. Osnova kose prizme je paralelogram sa stranicama $3cm$ i $6cm$ i oštrim uglom 45^o. Bočna ivica iznosi $4cm$ i sa ravni osnove zaklapa ugao od 30^o. Izračunati zapreminu ove prizme.

Rešenje: $B = 6 \cdot 3 \cdot \sin 45^o = 9\sqrt{2}$; $H = 4 \cdot \sin 30^o = 2$; $V = B \cdot H = 18\sqrt{2}$.

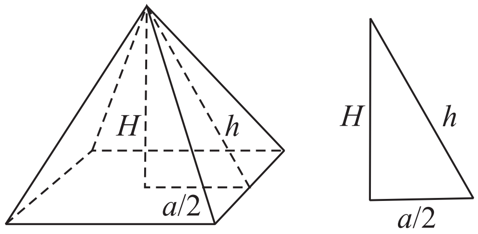
Zadatak 30. Osnova prave prizme je pravougli trougao površine $P = 9\sqrt{3}$ i uglom od 30^o. Površina najveće bočne strane je 8. Naći zapreminu.

Rešenje: Neka je a hipotenuza pravouglog trougla u osnovi te prizme. $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow a = 6\sqrt{2}$. Iz površine najveće bočne strane nalazimo $a \cdot H = 8 \Rightarrow H = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $V = 6\sqrt{6}$.

Piramida

Zadatak 31. Pravilna četvorostrana piramida ima površinu osnove $72\ cm^2$ a omotača $12\sqrt{41}\ cm^2$. Izračunati zapreminu.

Rešenje: Baza ove četvorostrane piramide je kvadrat čija je površina
$B = a^2 = 72 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$



Slika uz 31. zadatak

Omotač ove piramide se sastoji od 4 jednakokraka trougla osnovice a i visine h , pa je

$$M = 4 \cdot P_{\Delta} = 4 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = 2 \cdot a \cdot h$$

$$2 \cdot a \cdot h = 12 \cdot \sqrt{41} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{12 \cdot \sqrt{41}}{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{41}{2}}$$

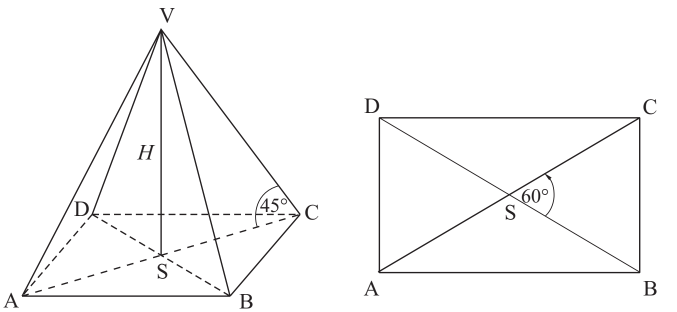
$$H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 \Rightarrow\Rightarrow H^2 + \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{41}{2}}\right)^2$$

$$H^2 + 18 = \frac{41}{2} \quad \Rightarrow \quad H^2 = \frac{41 - 36}{2} \quad \Rightarrow \quad H = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \quad \Rightarrow \quad V = 12 \cdot \sqrt{10}.$$

Zadatak 32. Osnova piramide je pravougaonik površine $36\sqrt{3}$ i ugla 60^o izmedju dijagonala. Naći zapreminu te piramide ako su bočne strane nagnute prema ravni osnove pod uglom 45^o .

Rešenje:



Slika uz 32. zadatak

Osnova piramide je pravougaonik $\square ABCD$, $AB = a, BC = b$ i označimo sa S presek dijagonala. Uočimo trougao ΔABC. On je pravougli sa uglovima od 60^o i 30^o (jer je ΔBCS jednakostraničan) i predstavlja polovinu jednakostraničnog trougla stranice d. Zato je površina pravougaonika $\square ABCD$ jednaka površini jednakostraničnog trougla stranice d, odnosno

$$B = 36\sqrt{3} = \frac{d^2\sqrt{3}}{4}$$
$$d^2 = 36 \cdot 4 \Rightarrow d = 12, \quad b = \frac{d}{2} = 6.$$

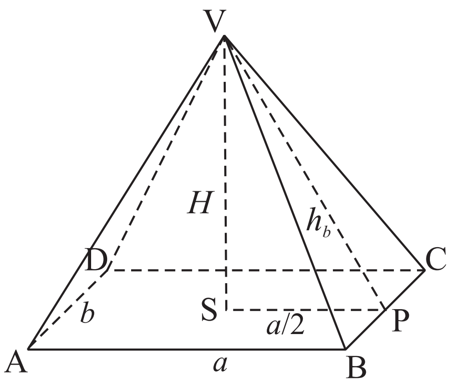
Uočimo sada ΔSCV. To je jednakokrako pravougli trougao sa oštrim uglom 45^o, odnosno $SV = SC \Rightarrow H = SV = \frac{d}{2} = 6$. Zato je

$$V = \frac{1}{3}B \cdot H = \frac{1}{3}36\sqrt{3} \cdot 6 = 72\sqrt{3}.$$

.

Zadatak 33. Osnova piramide je pravougaonik obima $30m$. Razlika osnovnih ivica $a - b$ je $5m$, a nagibni ugao apoteme h_b prema osnovi je 60^o. Odrediti zapreminu piramide ako je podnožje visine presek dijagonala osnove.

Rešenje:



Slika uz 33. zadatak

Obim pravougaonika je $O = 30$ odakle je $a + b = 15$. Prema uslovu zadatka je $a - b = 5$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo:

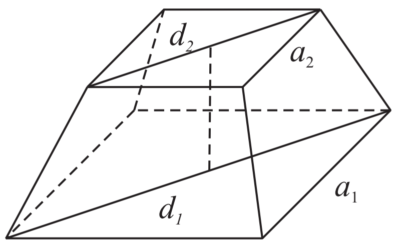
$$\left.\begin{aligned} a + b = & \ 15 \\ a - b = & \ 5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow 2a = 20 \quad \Rightarrow \quad a = 10, \quad b = 5.$$

Uočimo pravougli trougao ΔVSP (S je podnožje visine u preseku dijagonala osnove):

$$VS = H, \quad SP = \frac{a}{2} = 5, \quad VP = h_b$$
$$\frac{VS}{SP} = \tan 60^o = \sqrt{3}$$
$$H = VS = SP \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3};$$
$$B = a \cdot b = 50;$$
$$V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{250\sqrt{3}}{3}.$$

Zadatak 34. Izračunati zapreminu pravilne četvorostrane zarubljene piramide ako su površine osnova $50cm^2$ i $8cm^2$ i površina dijagonalnog preseka $28cm^2$.

Rešenje:



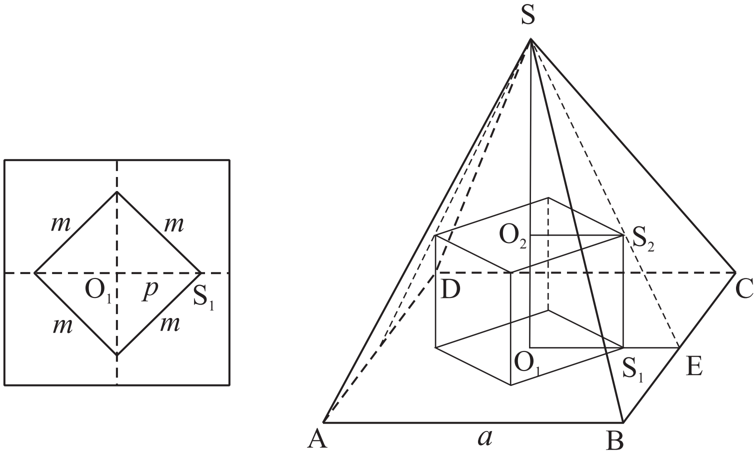
Slika uz 34. zadatak

Iz površina osnova dobijamo dužine stranica i dijagonala osnova :

$$a_1 = 5\sqrt{2}, d_1 = 10, \quad a_2 = 2\sqrt{2}, d_2 = 4.$$

Dijagonalni presek ove zarubljene piramide je jednakokraki trapez sa osnovicama $d_1 = 10$ i $d_2 = 4$ i površinom $28cm^2$. Odatle dobijamo da je $h = 4cm$. Zamenom u obrazac za zapreminu zarubljene piramide dobijamo da je $V = \frac{h}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2) = 104$.

Zadatak 35. U pravilnu četvorostranu piramidu upisana je kocka tako da četiri njena temena leže na visinama bočnih strana (apotemama) piramide, a četiri na osnovi piramide. Sve ivice piramide su jednake i iznose a. Izračunati površinu i zapreminu te kocke.



Slika uz 35. zadatak

Rešenje:

Označimo ivicu kocke sa m. Tada je $P = 6m^2$, $V = m^3$. Kako su sve ivice date piramide jednake, to su njene bočne strane jednakostranični trouglovi. Zato apotema SE iznosi $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, a visina piramide (iz pravouglog trougla $\triangle SO_1E$)

$$H = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Označimo sa S_2 teme kocke koje se nalazi na apotemi SE, a sa S_1 odgovarajuće teme na osnovi piramide. Neka je dalje $O_1S_1 = p$. Primetimo da je p jednako polovini dijagonale osnove kocke, odnosno $2p = m\sqrt{2} \Rightarrow m = p\sqrt{2}$. Na osnovu sličnosti trouglova $\triangle SO_1E$ i $\triangle S_2S_1E$ dobijamo

$$\begin{aligned}
&SO_1 : S_2S_1 = O_1E : S_1E \\
&H : m = \frac{a}{2} : \left(\frac{a}{2} - p\right) \Rightarrow a\frac{\sqrt{2}}{2} : p\sqrt{2} = \frac{a}{2} : \left(\frac{a}{2} - p\right) \\
&\frac{a}{2} \cdot p\sqrt{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} - p\right) \Rightarrow p = \left(\frac{a}{2} - p\right) \\
&2p = \frac{a}{2}, \quad p = \frac{a}{4}, \quad m = \sqrt{2} \cdot p = \sqrt{2} \cdot \frac{a}{4}.
\end{aligned}$$

Sada lako računamo

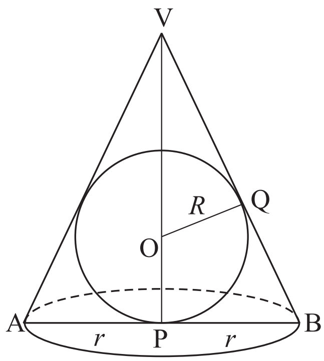
$$P = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot a\right)^2 = \frac{6\cdot 2a^2}{4\cdot 4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$V = m^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot a\right)^3 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot 4\cdot 4}\right)\cdot a^3 = \frac{\sqrt{2}}{32}a^3.$$

Kupa

Zadatak 36. U pravu kupu visine $H = 8cm$ upisana je lopta poluprečnika $R = 3cm$. Izračunati površinu te kupe.

Rešenje:



Slika uz 36. zadatak

Posmatrajmo osni presek ABV, gde je V vrh kupe. Označimo sa $r = AP = PB$ polupečnik osnove kupe, a sa $R = OQ = OP$ poluprečnik lopte sa centrom O.

Uočimo pravougli trougao ΔOQV:

$$OV = VP - OP = H - R = 8 - 3 = 5$$
$$OV^2 = OQ^2 + VQ^2, \quad VQ = x$$
$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x = VQ = 4$$

Kako su trouglovi ΔPBV i ΔOQV slični, to dobijamo da je

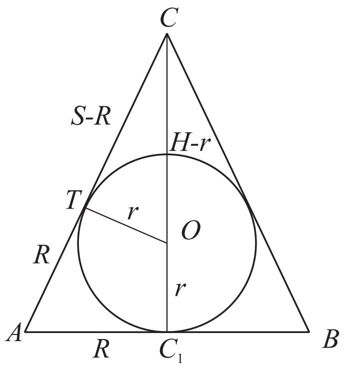
$$\frac{VP}{PB} = \frac{VQ}{OQ} \Leftrightarrow \frac{H}{r} = \frac{x}{R} \Rightarrow \frac{8}{r} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow r = 6;$$

Kako su tangentne duži jednake, tj. $BP = BQ = r = 6$, to je

$$s = VB = VQ + BQ = x + r \quad \Rightarrow s = 10;$$
$$P = B + M = \pi r^2 + \pi rs = 36\pi + 60\pi = 96\pi.$$

Zadatak 37. U pravu kupu poluprečnika osnove $R = 6cm$ upisana je lopta poluprečnika $r = 4cm$. Izračunati visinu H i izvodnicu s te kupe.

Rešenje:



Slika uz 37. zadatak

Zadatak se može rešiti na više načina.

I Korišćenjem sličnosti trouglova.

$$\Delta AC_1C \sim \Delta OTC :$$
$$\Rightarrow R : r = H : (S - R) \quad \wedge \quad R : r = S : (H - r)$$
$$6 : 4 = H : (S - 6) \quad \wedge \quad 6 : 4 = S : (H - 4)$$
$$6(S - 6) = 4H \quad \wedge \quad 6(H - 4) = 4S$$
$$6S - 4H = 36 \quad \wedge \quad 6H - 4S = 24$$
$$3S - 2H = 18 \quad \wedge \quad -2S + 3H = 12$$
$$\Rightarrow \quad H = 14,4\ cm; \ S = 15,6\ cm.$$

II Zadatak se može rešiti i korišćenjem Pitagorine teoreme:

$$\Delta AC_1C : \quad S^2 - H^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad S^2 - H^2 = 36$$
$$\Delta OTC : \quad (H - r)^2 - (S - R)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad (H - 4)^2 - (S - 6)^2 = 16$$

Dobija se sistem dve kvadratne jednačine:

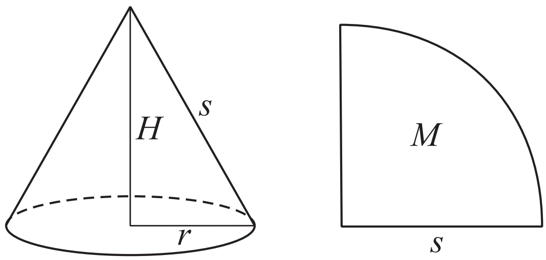
$$S^2 - H^2 = 36 \quad \wedge \quad H^2 - S^2 - 8H + 12S = 36$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo

$$-8H + 12S = 72 \quad \text{odnosno} \quad 2H - 3S = -18 \quad \Rightarrow$$
$$H = \frac{3S - 18}{2} \quad \wedge \quad S^2 - H^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad 5S^2 - 6 \cdot S + 18 \cdot 26 = 0$$
$$S = \frac{3 \cdot 18 \pm 6 \cdot 4}{5} = \frac{78}{5} = 15,6\ cm \quad H = 14,4\ cm.$$

Zadatak 38. Kada se omotač kupe razvije u ravni dobije se četvrtina kruga poluprečnika $4\sqrt{5}$. Izračunati zapreminu kupe.

Rešenje:



Slika uz 38. zadatak

Obeležimo izvodnicu kupe sa s, poluprečnik osnove valjka sa r, i poluprečnik (četvrtine) kruga sa R. Prema uslovu zadtka, $s = R = 4\sqrt{5}$. Sa druge strane, obim osnove kupe biće jednak dužini luka koji odgovara četvrtini kruga poluprečnika $R = 4\sqrt{5}$. Zato je

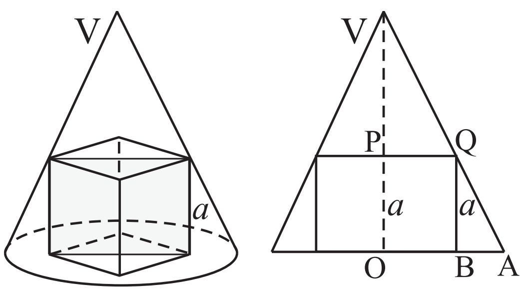
$$2r\pi = \frac{2s\pi}{4} \Rightarrow 2r\pi = \frac{2\cdot 4\sqrt{5}\pi}{4} \Rightarrow r = \sqrt{5}$$

$$H^2 = s^2 - r^2 = 16\cdot 5 - 5 = 75 \Rightarrow H = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$V = \frac{r^2\pi H}{3} = \frac{25\sqrt{3}\pi}{3}.$$

Zadatak 39. U pravu kupu visine $H = 6$ i poluprečnika osnove $r = 4$ upisana je kocka ivice a čija jedna strana leži na osnovi kupe. Izračunati ivicu kocke.

Rešenje:



Slika uz 39. zadatak

Označimo sa $OA = r = 4$, OB je jednaka polovini dijagonale kvadrata stranice a

$$OB = PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad OV = H = 6, \quad OA = 4, \quad OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad OV = 6.$$

Uočimo da je $\triangle OAV \sim \triangle PQV$. Na osnovu te sličnosti dobijamo:

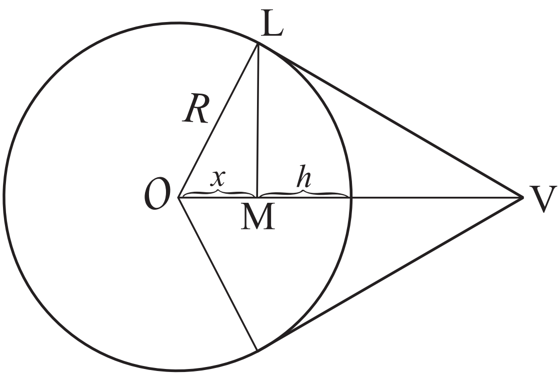
$$PQ : OA = PV : OV \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} : 4 = (6-a) : 6 \Rightarrow$$

$$6 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = 4 \cdot (6-a) \Rightarrow a = \frac{24}{4+3\sqrt{2}}.$$

Lopta

Zadatak 40. Tačkasti izvor svetlosti udaljen je $4m$ od centra lopte poluprečnika $2m$. Kolika je površina osvetljenog dela lopte?

Rešenje: Površina osvetljenog dela lopte je $P = 2\pi Rh$, gde je h visina kalote (u našem slučaju visina osvetljenog dela lopte). Označimo sa V



Slika uz 40. zadatak

tačkasti izvor svetlosti tako da je $OV = 4$. Uočimo pravougli trougao ΔOVL, $OL = R$, $VL \perp OL$ i označimo sa M podnožje normale iz L na OV, $OM = x = R - h$. Primetimo dalje da su pravougli trouglovi ΔOVL i ΔLOM slični (zajednički oštar ugao kod temena O). Zato je

$$\frac{OL}{OM} = \frac{OV}{OL} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 1; \quad h = R - x = 2 - 1 = 1$$

$$P = 2\pi Rh = 4\pi.$$

Zadatak 41. Na kojoj udaljenosti od centra lopte poluprečnika $R = 4cm$ treba postaviti sijalicu da bi ona osvetlila 1/3 površine lopte?

Rešenje: Površina osvetljenog dela lopte je $P = 2\pi Rh$, gde je h visina kalote (u našem slučaju visina osvetljenog dela lopte):

$P = 2\pi Rh = \frac{1}{3}4\pi R^2 \Rightarrow 2h = \frac{4}{3}R = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{8}{3}$.

Označimo sa V sijalicu na rastojanju d od centra lopte ($OV = d$). Uočimo pravougli trougao ΔOVL, $\quad OL = R$, $\quad VL \perp OL$, i označimo sa M podnožje normale iz L na OV (koristiti sliku iz predhodnog zadatka):

$OM = x = R - h = 4 - \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}$.

Primetimo dalje da su pravougli trouglovi ΔOVL i ΔLOM slični (zajednički oštar ugao kod temena O). Zato je

$$\frac{OL}{OM} = \frac{OV}{OL} \quad \text{tj} \quad \frac{R}{x} = \frac{d}{R}$$

$$R^2 = xd \quad \text{odnosno} \quad 16 = \frac{4}{3}d \quad \Rightarrow \quad d = OV = 12.$$

Zadatak 42. U sferu poluprečnika R upisana je prava prizma čija je osnova pravougli trougao sa oštrim uglom α. Naći zapreminu i površinu ove prizme u funkciji od R i α, ako je najveća strana ove prizme kvadrat.

Rešenje: Iz uslova zadatka, kako je osnova upisane prizme pravougli trougao, to centar O sfere mora da leži na najvećoj strani prizme. Označimo sa a i b katete osnove prizme. Kako je najveća strana prizme kvadrat stranice H dijagonale $2R$, to je $2R = H\sqrt{2} \Rightarrow H = R\sqrt{2}$. Dalje je

$$a = H\sin\alpha = R\sqrt{2}\cdot\sin\alpha$$

$$b = H\cos\alpha = R\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$$

$$V = B\cdot H = \frac{a\cdot b}{2}\cdot H$$

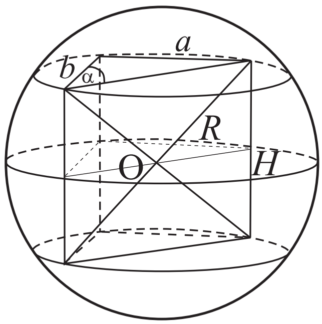
$$V = \frac{R\sqrt{2}\cdot\sin\alpha\cdot R\sqrt{2}\cdot\cos\alpha\cdot R\sqrt{2}}{2}$$

$$V = R^3\sqrt{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$P = 2B + M = ab + H^2 + Ha + Hb$$

$$P = 2R^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2R^2 + 2R^2\sin\alpha + 2R^2\cos\alpha$$

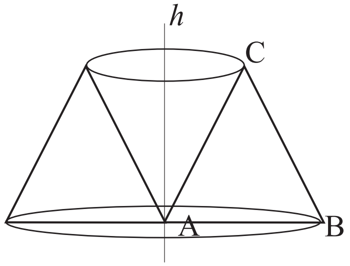
$$P = 2R^2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\alpha + \cos\alpha).$$



Slika uz 42. zadatak

Zadatak 43. Jednakostraničan trougao ABC stranice $AB = a$ rotira oko prave h koja sadrži tačku A i normalna je na AB. Izračunati P i V dobijenog tela.

Rešenje: Prilikom rotacije dobija se deo zarubljene kupe, visine $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



Slika uz 43. zadatak

i poluprečnicima bazisa $r_1 = a$ i $r_2 = \frac{a}{2}$. Površina se sastoji od jednog bazisa (donjeg) i dva omotača (zarubljene kupe i kupe koja se obrazuje oko ose, a čije su izvodnice jednake i iznose a) i iznosi $P = 3a^2\pi$. Zapremina se dobija kada se od zapremine zarubljene kupe oduzme zapremina kupe koja se obrazuje oko ose i iznosi $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\pi$.

Zadatak 44. Dat je pravougli trougao čija je jedna kateta $b = 10$ i oštar ugao $\alpha = 60^o$. Naći zapeminu tela koje nastaje rotacijom ovog trougla oko hipotenuze.

Rešenje: $a = 10\sqrt{3}, r = \frac{b\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$, $V = \frac{1}{3}(B \cdot H_1 + B \cdot H_2) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2b = 500$.

5

Analitička geometrija

5.1 Uvod

Analitička geometrija je oblast matematike koja proučava geometrijske objekte algebarskim metodama. Ovo se postiže uvođenjem pravouglog koordinantnog sistema koji omogućava da se svakoj tački pridruže koordinate i da se svaki skup opiše odgovarajućim jednačinama ili nejednačinama. Ovde spadaju i obrnuti problemi kada poznate algebarske relacije treba preneti u geometriju.

Tačka. Osnovni objekt analitičke geometrije u ravni je tačka kojoj se pridružuje uređeni par realnih brojeva. Tako, na primer, pišemo $M(x, y)$. Istovremeno, uređeni par određuje vektor položaja $\overrightarrow{OM}$ tačke M.

Vektor. Vektor je orjentisana duž određena svojom dužinom, pravcem i smerom. U ravni Oxy, uočimo dva jedinična vektora $\vec{i} = (1, 0)$ i $\vec{j} = (0, 1)$. Sada svakoj tački $M(x, y)$ možemo pridružiti njen vektor položaja

$$\overrightarrow{OM} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Zbir i skalarni proizvod dva vektora $\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1)$ i $\overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2)$ su jednaki:

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad \overrightarrow{OM_1} \circ \overrightarrow{OM_2} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Rastojanje dveju tačaka $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2y_2)$ je

$$d = \overline{M_1M_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Podela duži M_1M_2 u razmeri $m:n$ postiže se tačkom $M(x,y)$ čije koordinate su:

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \frac{m}{n} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \ .$$

Konkretno, sredina duži ima koordinate

$$\overline{M_1M} = \overline{MM_2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \ .$$

Prava. Opšta, direktna i segmentna jednačina prave glase

$$Ax + By + C = 0, \qquad y = kx + n, \qquad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Ovde je $k = \tan\alpha$ - koeficijent pravca, a α - ugao prema x-osi, m - odsečak na x-osi, a n - odsečak na y-osi.

Jednačina prave koja prolazi kroz tačku M_1 i ima koeficijent pravca k glasi

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Jednačina prave kroz dve tačke

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Dve prave $p: \ y = k_1x + n_1$ i $q: \ y = k_2x + n_2$ su paralelne ako imaju isti koeficijent pravca, tj. $k_1 = k_2$, a normalne ako je $k_1 \cdot k_2 = -1$. Ugao između njih pravih se određuje iz relacije

$$\tan\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$$

Odstojanje tačke $M_0(x_0, y_0)$ od prave $p: \ Ax + By + C = 0$ je

$$d(M_0, p) = \frac{|Ax_0 + y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ .$$

Pramen pravih čine sve prave koje prolaze kroz presek pravih $p: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $p: \ A_2x + B_2y + C_2 =$. Tada je jednačina pramena

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Ugao gledanja. Ugao pod kojim se vidi kriva iz neke tačke je ugao između tangenti iz iste tačke na datu krivu.

Konusni preseci su: krug, elipsa, parabola i hiperbola.

Krug. Krug je skup tačaka u ravni podjednako udaljenih od date tačke. Navedeno rastojanje je poluprečnik kruga r , a data tačka je centar kruga (p,q). Jednačina kruga je

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Odnos prave i kruga se ispituje rešavanjem sistema jednačina koje ih predstavljaju. Prava je tangenta kruga ako imaju samo jednu tačku dodira, a sečica ako imaju dve zajedničke tačke. Prava $y=kx+n$ je tangenta t ili sečica s kruga ako je

$$(t):\ (1+k^2)r^2=n^2, \qquad (s):\ (1+k^2)r^2>n^2.$$

Elipsa. Elipsa je skup tačaka u ravni koje imaju isti zbir rastojanja od dveju datih tačaka. Date tačke $F_1(-c,0)$ i $F_2(c,0)$ su žiže elipse, a zbir rastojanja $2a$ je velike ose elipse. Odnos $e=c/a$ je ekscentricitet elipse. Jednačina elipse na osnovu ovih podataka glasi

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Uvođenjem male poluose $b=\sqrt{a^2-c^2}$, dobijamo kanonsku jednačinu elipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1.$$

Parabola. Parabola je skup tačaka u ravni podjednako udaljenih od date tačke i date prave. Ova tačka se naziva žižom, a prava direktrisom parabole. Ako je žiža $F(p/2,0)$, a direktrisa $x=-p/2$, tada za proizvoljnu tačku parabole $M(x,y)$ važi

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

odakle se dobija kanonska jednačina parabole

$$y^2=2px.$$

Ova parabola je simetrična u odnosu na x-osu. Odnos prave i parabole određujemo iz sistema koji čine njihove jednačine. Tako je prava $y=kx+n$ tangenta parabole $y^2=2px$ ako važi $2kn=p$.

Parabola simetrična u odnosu na y-osu ima jednačinu $y = 2ax^2$.

Hiperbola. Hiperbola je skup tačaka u ravni koje imaju istu apsolutnu vrednost razlike rastojanja od dveju datih tačaka. Ove dve tačke $F_1(-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$ nazivamo žižama hiperbole, a rastojanje $2a$ osom hiperbole. Tačke $A_1(-a, 0)$ i $A_2(a, 0)$ nazivamo temenima hiperbole.

Ako je $M(x, y)$ proizvoljna tačka hiperbole tada važi

$$\left|\overrightarrow{MF_1} - \overrightarrow{MF_2}\right| = 2a \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Uvođenjem male poluose $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, dobijamo kanonsku jednačinu hiperbole

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Asimptote hiperbole su prave $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Paralelogram. Paralelogram je četvorougao sa paralelnim naspramnim stranama. Naspramen strane su istvoremeno i jednakih dužina. Stoga, ako su data tri temena M_1, M_2 i M_3 paralelograma, četvrto teme M_4 određujemo iz uslova

$$\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} = 0.$$

Površina paralelograma je jednaka

$$P_4 = \ |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

Trougao. Površina P_3 trougla sa temenima $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ i $M_3(x_3, y_3)$ je polovina površine paralelograma nad vektorima $\overrightarrow{M_1M_2}$ i $\overrightarrow{M_1M_3}$. Zato je

$$P_3 = \frac{1}{2}\ |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

5.2 Prava

5.2.1 Zadaci

Zadatak 1. Naći koordinate tačke M' simetrične tački $M(9, -1)$ u odnosu na pravu $p:\ 3x - 2y - 7 = 0$.

Rešenje:

Zbog uslova simetričnosti tačaka M i M' u odnosu na pravu p, one leže na normali prave p, kao što prikazuje Slika 5.1a. Iz jednačine prave p :

$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$, dobijamo njen koeficijent $k_p = \frac{3}{2}$. Zbog uslova normalnosti $k_p \cdot k_n = -1$, imamo $k_n = -1/k_p = -\frac{2}{3}$.

Kako normala n prolazi kroz tačku $M(9, -1)$, njena jednačina je

$$n: \; y + 1 = k_n(x - 9) \quad \Rightarrow \quad y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 9) \quad \Rightarrow \quad y + \frac{2}{3}x - 5 = 0.$$

Rešavanjem sistema jednačina

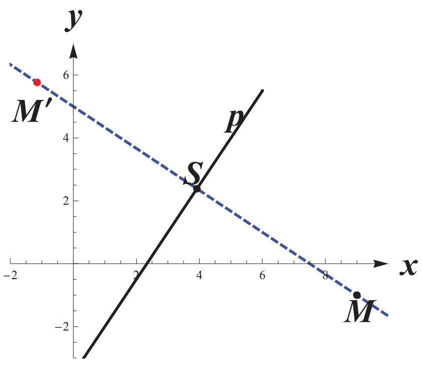
$$y + \frac{2}{3}x - 5 = 0, \qquad 3x - 2y - 7 = 0,$$

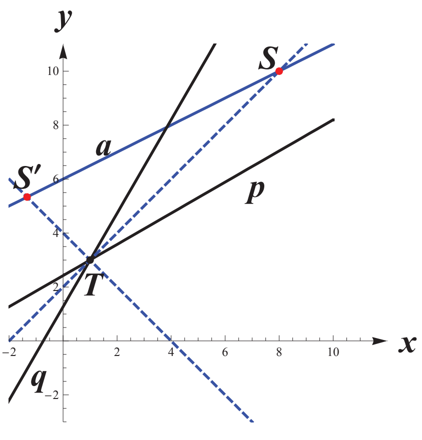
dobija se presečna tačka pravih n i p. To je tačka $S\,(51/13, 31/13)$.

Na osnovu osobina sredine S duži MM', imamo

$$\overline{MS} = \overline{SM'} \;\Rightarrow\; \frac{9 + x}{2} = \frac{51}{13}, \;\frac{-1 + y}{2} = \frac{31}{13}, \;\Rightarrow\; x = -\frac{15}{13}, \; y = \frac{75}{13}.$$

Tražena tačka je $M'\,(-15/13, 75/13)$.





Slika 1. a) Simetrija tačke u odnosu na pravu; b) Tačka podjednako udaljena od pravih.

Zadatak 2. Na pravoj $a: \;\; x - 2y + 12 = 0$ odrediti tačke pođednako udaljene od pravih $p: \; x - \sqrt{3}y - 1 + 3\sqrt{3} = 0$; $q: \; \sqrt{3}x - y + 3 - \sqrt{3} = 0$.

Rešenje:

Simetrala ugla $\angle(p,q)$ je skup tačaka podjednako udaljenih od obeju pravih, baš kao što se vidi na Slici 5.1b. Prave

$$p: \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} + 3, \qquad q: \quad y = \sqrt{3}x + 3 - \sqrt{3}$$

se seku u tački $T(1,3)$ i imaju nagibe sa x-osom: $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tj. $\alpha = 30^\circ$, i $\tan\beta = \sqrt{3}$, odakle je $\beta = 60^\circ$. Simetrala s_1 ugla $\angle(p,q)$ ima nagib

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{30^\circ + 60^\circ}{2} = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad k = \tan\gamma = 1.$$

Kako s_1 prolazi i kroz tačku $T(1,3)$, dobijamo da je

$$s_1: \quad y - 3 = x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = x + 2.$$

Tačka S_1 se dobija rešavanjem sistema jednačina

$$y = x + 2, \quad x - 2y + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1\,(8,10)\,.$$

Druga simetrala je normala na prethodnu, pa je njen koeficijent pravca $k_1 = -1/k = -1$. Ona prolazi kroz $T(1,3)$, tako da je njena jednačina

$$s_2: \quad y - 3 = -(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 4.$$

Koordinate tačke S dobijamo kao rešenja sistema

$$y = -x + 4, \quad x - 2y + 12 = 0.$$

Drugo rešenje je tačka $S_2\left(-\frac{4}{3}, \frac{16}{3}\right)$.

Zadatak 3. Odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $A(2,1)$ i sa pravom $l: \ 2x + 3y + 4 = 0$ zaklapa ugao od 45°.

Rešenje:

Jednačina prave l u direktnom obliku glasi $l: \ y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$, odakle su koeficijent pravca $k_l = -\frac{2}{3}$ i presek sa y-osom $n_l = -\frac{4}{3}$.

Kao na Slici 5.2a, neka je u istom obliku data jednačina tražene prave $p: \ y = kx + n$. Na osnovu ugla između ovih pravih, imamo

$$1 = \tan 45^\circ = \frac{k_l - k}{1 + kk_l} \ \Rightarrow \ -\frac{2}{3} - k = 1 - \frac{2}{3}k \ \Rightarrow \ -2 - 3k = 3 - 2k \ \Rightarrow \ k = -5.$$

Kako prava p prolazi kroz tačku $A(2,1)$, to važi

$$y = -5x + n \quad \Rightarrow \quad 1 = -5 \cdot 2 + n \quad \Rightarrow \quad n = 11.$$

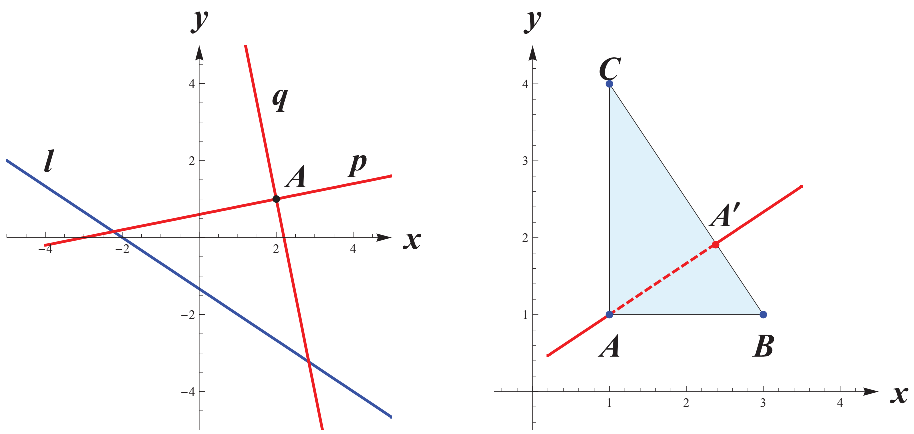
Tako da je jedno rešenje prava $y = -5x + 11$.

Drugo rešenje je prava normalna na p, tj. prava čiji koeficijent pravca je $k_1 = -\frac{1}{k} = \frac{1}{5}$. Kako i ona prolazi kroz $A(2,1)$ imamo

$$y = \frac{1}{5}x + n_1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{5} \cdot 2 + n_1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{3}{5}\,.$$

Rešenja su:

$$p:\ y = -5x + 11, \qquad q:\ y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}\,.$$



Slika 2. a) Prava pod datim nagibom prema drugoj b) Hipotenuzina visina

Zadatak 4. U Dekartovom pavouglom koordinatnom sistemu tačke:

$$A(1,1), \quad B(3,1), \quad C(1,4)$$

su temena pravouglog trougla. Odrediti jednačinu prave koja sadrži hipotenuzinu visinu.

Rešenje:

Jednačina prave koja sadrži hipotenuzu BC glasi

$$BC: \ \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{1-4} \quad \Leftrightarrow \quad y-4 = -\frac{3}{2}(x-1).$$

Kao na Slici 5.2b, označimo sa A' zajedničku tačku normale i hipotenuze. Kako je $A(1,1)$ data tačka, jednačina prave AA' je $y-1 = k(x-1)$.

Iz uslova normalnosti pravih AA' i BC, imamo

$$k_{AA'} \cdot k_{BC} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2}\, k = -1 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{2}{3}\ .$$

Jednačina normale hipotenuze je

$$AA': \ y-1 = \frac{2}{3}(x-1).$$

Zadatak 5. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M(8;6)$, a sa koordinatnim osama zatvara trougao površine 12.

Rešenje:

Segmentni oblik jednačine prave, koja prolazi kroz tačke $A(a,0)$ i $B(0,b)$, glasi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Kako prava prolazi kroz tačku $M(8;6)$, to važi

$$\frac{8}{a} + \frac{6}{b} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 8b + 6a = ab \qquad (ab \neq 0).$$

Površina trougla je

$$\frac{|a| \cdot |b|}{2} = 12 \quad \Leftrightarrow \quad |ab| = 24.$$

Odavde je $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

Prvi slučaj. Ako je $ab = 24$, tada dobijamo

$$\frac{32 - 4a + a^2}{4a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 4a + 32 = 0.$$

Kako je diskriminanta $D = 4^2 - 4 \cdot 32 = -112 < 0$, u ovom slučaju nema realnih rešenja.

Drugi slučaj. Ako je $ab = -24$, tada dobijamo

$$\frac{32 - 4a - a^2}{4a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a^2 - 4a + 32 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = -8,\ a_2 = 4.$$

Za $a_1 = -8$, biće $b_1 = -24/(-8) = 3$, a za $a_2 = 4$, biće $b_1 = -24/4 = -6$. Rešenja su prave:

$$p_1: \quad \frac{x}{-8} + \frac{y}{3} = 1, \qquad p_2: \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{-6} = 1.$$

Zadatak 6. Napisati jednačinu normale na pravu $p: \ 2x + 6y - 3 = 0$, ako je rastojanje tačke $A(5;4)$ od tražene normale jednako $\sqrt{10}$.

Rešenje:

Direktni oblik jednačine prave p je $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$, odakle dobijamo koeficijent pravca $k_1 = -\frac{1}{3}$.

Njena normala q ima koeficijent pravca $k_q = -1/k_1 = 3$. Jednačina normale je

$$q: \ y = k_q x + n \quad \Leftrightarrow \quad 3x - y + n = 0.$$

Rastojanje tačke $A(x_0, y_0)$ od prave q računamo o formuli

$$d(A, q) = \frac{|k_q x_0 - y_0 + n|}{\sqrt{k_q^2 + n^2}}\ .$$

Iz uslova $d = \sqrt{10}$ i $A(5;4)$, sledi

$$\sqrt{10} = \frac{|3 \cdot 5 - 4 + n|}{\sqrt{3^2 + 1}} \Rightarrow |n + 11| = 10.$$

Prvi slučaj. Ako je $n > -11$ tada je

$$|n + 11| = 10 \quad \Leftrightarrow \quad n + 11 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad n = -1,$$

što odgovara uslovima. Stoga je prvo rešenje $y = 3x - 1$.

Drugi slučaj. Ako je $n \leq -11$ tada je

$$|n + 11| = 10 \quad \Leftrightarrow \quad -(n + 11) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad n = -21.$$

Ova vrednost takođe odgovara uslovima. Zato je drugo rešenje $y = 3x - 21$.

Zadatak 7. Data su temena $A(-2;3)$ i $B(4;1)$ trougla ABC. Odrediti geometrijsko mesto temena C ako je površina trougla ABC stalno 20.

Rešenje:

Izložićemo dva postupka rešavanja ovog zadatka.

Prvi način. Površina trougla ΔABC, prikazanog na Slici 5.3a, čija su temena $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ i $C(x_3,\ y_3)$ u analitičkoj geometriji se izračuna po formuli

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_3-x_1)(y_1-y_3)+(x_2-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_1)(y_2-y_1)\right|.$$

Konkretno, imamo

$$x_1=-2,\quad y_1=3,\quad x_2=4\quad y_2=1,\quad x_3=x,\quad y_3=y,\quad P=20,$$

odakle je

$$|\,(x+2)(3+y)+(4-x)(1+y)-(4+2)(1+3)\,|=40,$$

tj.

$$|2(-7+x+3y)|=40 \quad\Leftrightarrow\quad (-7+x+3y)=\pm 20.$$

Traženo geometrijsko mesto čine dve prave:

$$p:\ x+3y-27=0, \qquad q:\ x+3y+13=0.$$

Drugi način. Površina trougla čija stanica $\overline{AB}=c$ i visina $\overline{DC}=h$ su poznate se izračunava po formuli

$$P=\frac{c\cdot h}{2}\ .$$

Stranica c je

$$c=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{40}.$$

Prava AB ima jednačinu:

$$y-3=\frac{1-3}{4+2}(x+2) \quad\Leftrightarrow\quad (y-3)\,6=-2x-4 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+6y-14=0$$

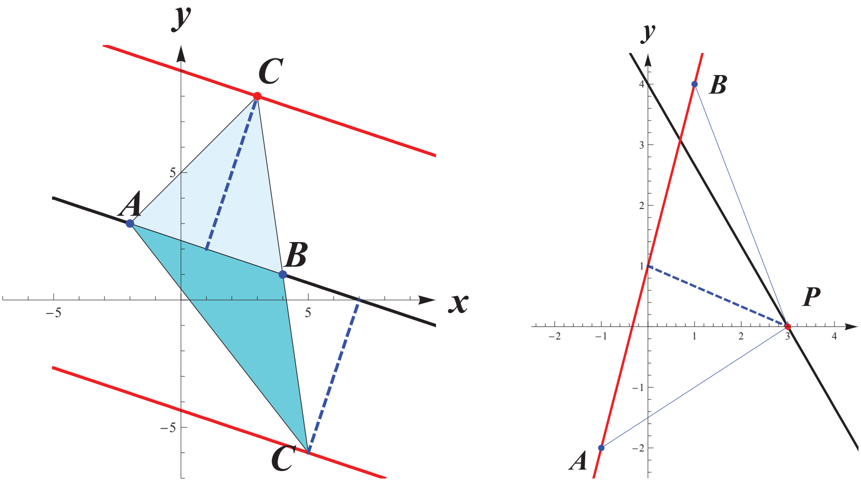
Visina se može posmatrati kao rastojanje tačke od prave

$$h=d(C,AB)=\frac{|2x+6y-14|}{\sqrt{2^2+6^2}}\ .$$

Sada je

$$P = \frac{1}{2}c \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad 20 = \frac{1}{2}\sqrt{40}\frac{|2x+6y-14|}{\sqrt{40}} \quad \Leftrightarrow \quad 2x+6y-14 = \pm 40.$$

Traženo geometrijsko mesto su tačke pravih $x+3y-27=0$ i $x+3y+13=0$.



Slika 3. a) Stalna površina trougla; b) Tačka na pravoj

Zadatak 8. Na pravoj $p:\ 4x+3y-12=0$ naći tačku podjednako udaljenu od tačaka $A\,(-1,\ -2)$, $B\,(1,\ 4)$.

Rešenje:

Neka je tražena tačka $P(x,y)$, kao što je prikazano na Slici 5.3b. Iz uslova jednake udaljenosti P od A i B, imamo

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 + (y+2) = (x-1)^2 + (x-4)\,.$$

Razvijanjem dobijamo

$$x^2+2x+1+y^2+4y+4 = x^2-2x+1+y^2-8y+16 \ \Rightarrow\ x+3y-3=0.$$

Koordinate tražene tačke su rešenja sistema

$$x+3y-3=0, \qquad 4x+3y-12=0$$

odakle dobijamo $x=3,\ y=0$. Rešenje problema je tačka $P(3,\ 0)$.

Zadatak 9. Odrediti koordinate temena trougla ΔABC ako su $P(4,\ 3)$, $Q(-3,\ 5)$, $R(1,\ 0)$ sredine stranica BC, CA i AB redom.

Rešenje:

Kako je $PQ \parallel AB$ i $PR \parallel AC$, to je četvorougao $ARPQ$ paralelogram, kao što se vidi na Slici 5.4a. To znači da se njegove dijagonale AP i QR seku u nekoj tački $M(x_M, y_M)$ i polove. Stoga je

$$QM = MR \quad \Rightarrow \quad x_M = \frac{-3+1}{2} = -1, \quad y_M = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}.$$

Dakle, tačka $M(-1, 5/2)$. Koristeći osobinu sredine duži AP, dobijamo

$$AM = MP \quad \Rightarrow \quad \frac{x_A+4}{2} = -1, \quad \frac{y_A+3}{2} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad x_A = -6, \quad y_A = 2.$$

Dakle, imamo teme $A\,(-6, 2)$. Iz uslova $AR = RB$, sledi

$$\frac{-6+x_B}{2} = 1, \quad \frac{2+y_B}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_B = 8, \quad y_B = -2.$$

Stoga je $B\,(8, -2)$. Iz uslova $AQ = QC$, sledi

$$\frac{x_C-6}{2} = -3, \quad \frac{y_C+2}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad x_C = 0, \quad y_C = 8,$$

odakle dobijamo da je tačka $C\,(0, 8)$.

Zadatak 10. Na pravoj $h:\ 2x - y - 5 = 0$ naći tačku P tako da zbir njenih odstojanja od tačaka $A\,(-7, 1)$ i $B\,(-5, 5)$ bude minimalan.

Rešenje:

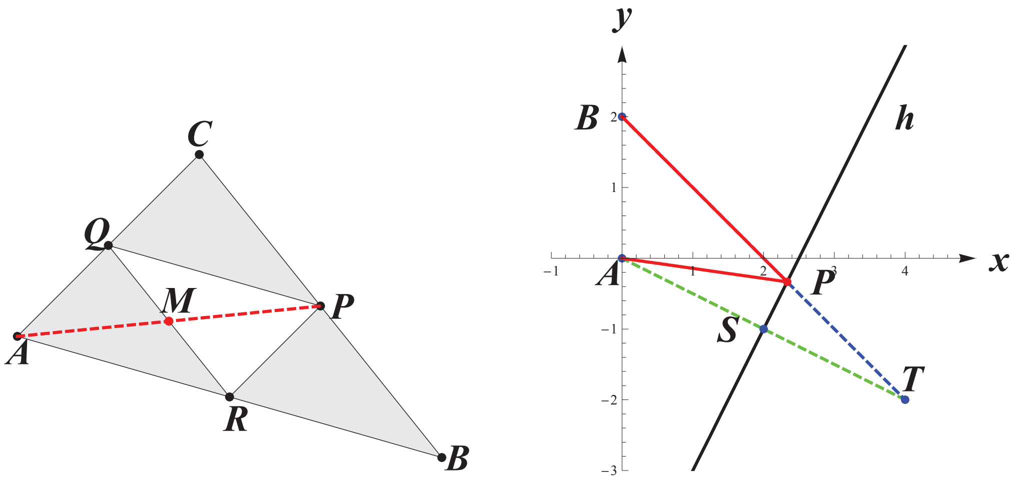
Jednačina prave kroz tačke A i B je

$$AB: \quad y - 1 = \frac{5-1}{-5+7}\,(x+7) = 2\,(x+7) \quad \Rightarrow \quad AB: \quad y = 2x + 15.$$

Kako je njen koeficijent pravca isti kao kod prave h, ovaj zadatak se svodi na nalaženje tačke na pravoj h podjednako udaljene od A i B. Stoga, tražena tačka leži na simetrali duži AB.

Središte duži AB je tačka S za koju važi

$$x_s = \frac{-7-5}{2} = -6, \quad y_s = \frac{1+5}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad S = (-6, 3)\,.$$



Slika 4. a) Trougao datih sredina stranica; b) Minimum zbira odstojanja

Kako je $k_{AB} = 2$, to je koeficijent pravca normale $k_n = -1/k_{AB} = -1/2$. Dakle, za normalu n znamo:

$$n: \ S(-6,3) \in q \wedge k_n = -\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ y - 3 = -\frac{1}{2}(x+6) \quad \Rightarrow \quad n: \ y = -\frac{1}{2}x.$$

Presečnu tačku pravih n i h dobijamo rešavanjem sistema

$$y = -\frac{1}{2}x, \ y = 2x - 5 \quad \Rightarrow \quad x = 2, \ y = -1.$$

Rešenje je tačka $P(2,-1)$.

Opšti slučaj. Ako prava AB nije paralelna sa h, tj $AB \nparallel h$, tada uočimo tačku A_1 simetričnu sa A u odnosu na h. Tražena tačka se nalazi u preseku pavih A_1B i h, tj. $P = A_1B \times h$.

Zadatak 11. Na pravoj $h: \ 2x - y - 5 = 0$ naći tačku P tako da zbir njenih odstojanja od tačaka $A\,(0,0)$ i $B\,(0,2)$ bude minimalan.

Rešenje:

Prema prvobitnom postupku dobili bismo pogrešnu tačku $P_1(3,1)$ za koju važi $\overline{AP_1} + \overline{BP_1} = 2\sqrt{10} \approx 6.32456$.

Međutim, tačno rešenje se dobija određivanjem normale iz $A(0,0)$ na h, kao na Slici 5.4b. Njen koeficijent pravca je $k_n = -1/k_h = -1/2$. Jednačina normale n je $y - 0 = (-1/2)(x - 0)$. Sada je presek normale n i prave h tačka $S(2,-1)$. Njoj simetrična tačka u odnosu na $A(0,0)$ je $S_1(4,-2)$. Prava $BS_1 : \;\; y = 2 - x$. Presek ove prave i prave h je tražena tačka $P(7/3,-1/3)$. Zaista, zbir njenih rastojanja od A i B je minimalan i iznosi

$$\overline{AP} + \overline{BP} = 4\sqrt{2} \approx 5.65685.$$

5.3 Krug

5.3.1 Zadaci

Zadatak 12. Dati su krug i prava:

$$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0, \qquad y = kx.$$

Odrediti parametar k tako da data prava:

a) dodiruje dati krug;
b) seče dati krug;
c) nema zajedničkih tačaka sa krugom.

Rešenje: Da bi krug i prava imali zajedničku tačku, mora važiti

$$x^2 + (kx)^2 - 10x + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+k^2)x^2 - 10x + 16 = 0.$$

Diskriminanta ove jednačine je

$$D = 100 - 4 \cdot 16(1+k^2).$$

Jednistvena zajednička tačka postoji ako je

$$D = 0 \;\Leftrightarrow\; 25 - 16 - 16k^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; k^2 = \frac{9}{16} \;\Leftrightarrow\; k_{1,2} = \pm\frac{3}{4}.$$

Diskusija:

a) za $k = \frac{3}{4}$ ili $k = -\frac{3}{4}$ prava dodiruje krug;

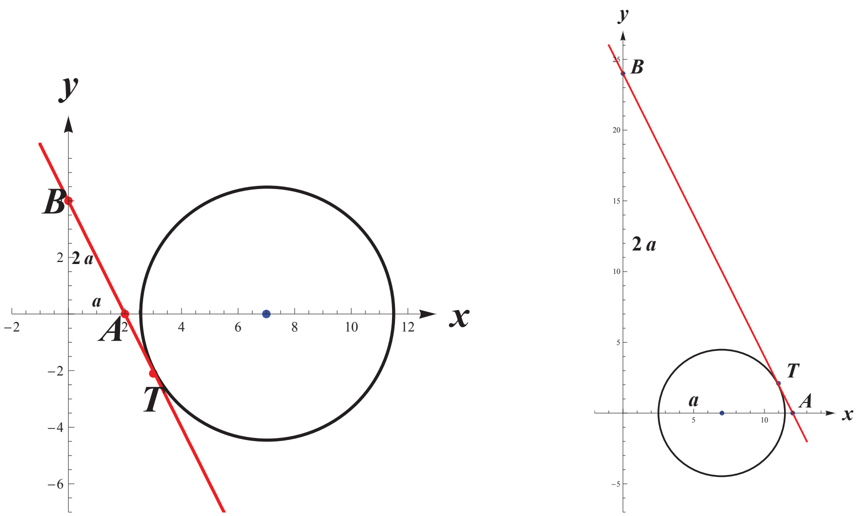
b) za $-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{4}$ prava seče krug;

c) za $k < -\frac{3}{4}$ ili $k > \frac{3}{4}$ prava nema zajedničkih tačaka sa krugom.

Zadatak 13. Odrediti jednačinu prave p koja odseca na pozitivnom delu y-ose dva puta veći odsečak nego na pozitivnom delu x-ose i dodiruje kružnicu

$$(x-7)^2 + y^2 = 20.$$

Rešenje:



Slika 5. Krug dva puta većeg odsečka na y-osi nego na x-osi

Označimo sa a odsečak tražene prave na x-osi, kao na Slici 5.5. Stoga ona prolazi kroz tačke $A(a,0)$ i $B(0,2a)$, te je njena jednačina

$$p: \quad \frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{2a-0} \quad \Leftrightarrow \quad y = -2(x-a) \qquad (a \neq 0).$$

Presečne tačke prave i kruga zadovoljavaju jednačinu

$$(x-7)^2 + (-2(x-a))^2 = 20 \;\Leftrightarrow\; 5x^2 + x(-14-8a) + 4a^2 + 29 = 0.$$

Iz uslova dodira prave i kruga imamo da je diskriminanta jednaka nuli, tj.

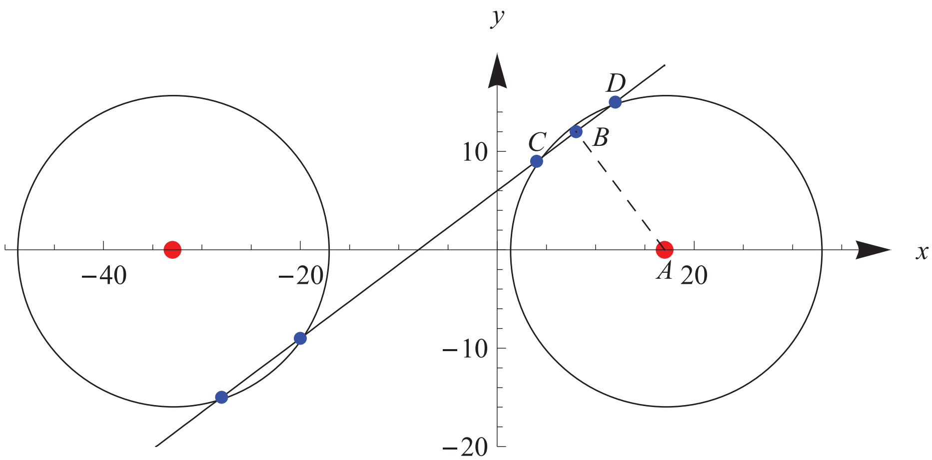
$(-14-8a)^2 - 4\cdot 5(4a^2+29) = 0 \;\Leftrightarrow\; a^2 - 14a + 24 = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = 2,\; a_2 = 12.$

Rešenje čine dve prave:

$$p_1: \quad y = -2(x-2), \qquad p_2: \quad y = -2(x-12).$$

Zadatak 14. Data je prava $p:\; 3x - 4y + 24 = 0$. Na x-osi naći tačku oko koje se može opisati krug poluprečnika $r = 5\sqrt{10}$ tako da na datoj pravoj odseca tetivu dužine 10.

Rešenje:



Slika 6. Krug tetive dužine 10

Neka je $A(a,0)$ tražena tačka, B presek prave p i njene normale iz A, a C i D tačke preseka prave p i kruga, kao na Slici **??**. Iz pravouglog trougla ΔABC imamo

$$d = \sqrt{\left(5\sqrt{10}\right)^2 - 5^2} = 15.$$

Rastojanje tačke do prave

$$d = d(A,p) = \frac{|3\cdot a - 4\cdot 0 + 24|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3(a+8)|}{5}$$

Prvi slučaj. Kada je $a > -8$, imamo

$$d = \frac{3(a+8)}{5} = 15 \quad \Leftrightarrow \quad a+8 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad a = 17.$$

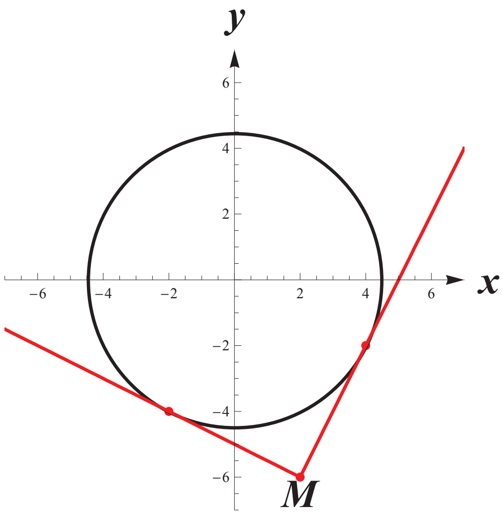
Drugi slučaj. Kada je $a < -8$, imamo

$$d = \frac{-3(a+8)}{5} = 15 \quad \Leftrightarrow \quad a+8 = -25 \quad \Leftrightarrow \quad a = -33.$$

Dakle, rešenja su $A_1(17,0)$ i $A_2(-33,0)$.

Zadatak 15. Pod kojim se uglom vidi krug $x^2+y^2 = 20$ iz tačke $M(2,-6)$.

Rešenje:



Slika 7. Ugao gledanja kruga iz tačke

Ugao pod kojim se vidi krug iz neke tačke je ugao između tangenti koje polaze iz te tačke na dati krug, kao što je prikazano na Slici 5.7.

Rastojanje centra $O(0,0)$ do tangente $t: \; kx - y + n = 0$ je

$$d = \frac{|k \cdot 0 - 0 + n|}{\sqrt{k^2+1}} = r \quad \Rightarrow \quad r^2(1+k^2) = n^2.$$

Jednačina tangente koja prolazi kroz tačku $M(2, -6)$ je

$$t:\ y+6=k(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=kx-2k-6.$$

Kako je poluprečnik kruga $r=\sqrt{20}$, iz uslova dodira imamo

$$20\cdot(1+k^2)=(-2k-6)^2 \Rightarrow 5\cdot(1+k^2)=(k+3)^2 \quad \Rightarrow \quad 4k^2-6k-4=0.$$

Rešenja kvadratne jednačine su:

$$k_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 5}{4}\ .$$

Ovo su koeficijenti pravaca tangenti na krug iz tačke M.

Kako je $k_1=-1/2$, a $k_2=2$, to važi $k_1\cdot k_2=-1$. Iz relacije

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}=\infty,$$

odakle je

$$\angle(t_1,t_2)=90^\circ\ .$$

Zadatak 16. Dat je krug $(x-1)^2+(y-2)^2=20$ i tačka $A(3;-4)$. Utvrditi da postoji kvadrat opisan oko kruga čije je jedno teme tačka A. Zatim naći ostala temena tog kvadrata.

Rešenje:

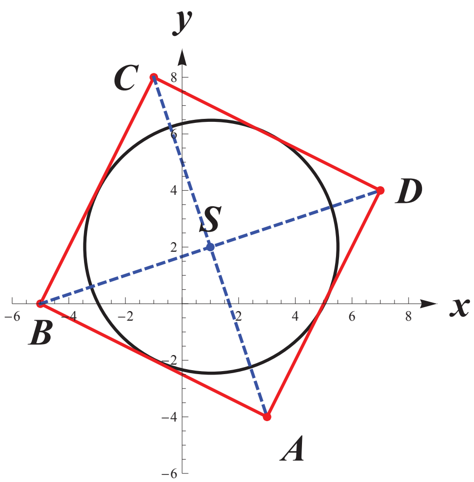
Iz jednačine kruga, imamo da je njegov centar $S(1,2)$, a poluprečnik $R=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. Kako je

$$|AS|=\sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=R\cdot\sqrt{2},$$

zaključujemo da A može biti teme tangencijalnog kvadrata, kao na Slici 5.8. Teme C je centralno simetrično sa A u odnosu na centar S:

$$x_S=\frac{x_A+x_C}{2} \quad \Rightarrow \quad 1=\frac{3+x_c}{2} \quad \Rightarrow \quad x_C=-1,$$

$$y_S=\frac{y_A+y_C}{2} \quad \Rightarrow \quad 2=\frac{-4+y_C}{2} \quad \Rightarrow \quad y_c=8.$$



Slika 8. Kvadrat oko kruga

Time je određeno teme $C\,(-1\ ;\ 8)$ i dijagonala kvadrata AC. Njen koeficijent pravca je

$$k_{AS} = \frac{2-(-4)}{1-3} = -3.$$

Druga dijagonala BD je normalna na dijagonalu AC, pa ima koeficijent pravca

$$k_{BD} = -\frac{1}{k_{AS}} = \frac{1}{3}\ .$$

Kako dijagonala BD prolazi kroz centar $S(1,2)$, jednačina druge dijagonale je

$$BD:\ y-2 = \frac{1}{3}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}\ .$$

Neka su koordinate $B\,(x_B,\ y_B)$ i $D\,(x_D,\ y_D)$. Kako u kvadratu važi $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SB} = \overline{SD}$, imamo

$$|SB|^2 = (x_B-1)^2 + (y_B-2)^2\,, \qquad |SD|^2 = (x_D-1)^2 + (y_D-2)^2$$

odnosno

$$(x_B-1)^2 + \left(\left(\frac{x_B}{3}+\frac{5}{3}\right)-2\right)^2 = 40.$$

Sada je

$$(x_B-1)^2+\left(\frac{x_B}{3}+\frac{5}{3}\right)^2-4\left(\frac{x_B}{3}+\frac{5}{3}\right)+4=40,$$

tj.,

$$\left(x_B^2-2x_B+1\right)+\left(\frac{x_B^2}{9}-\frac{2x_B}{9}+\frac{1}{9}\right)=40 \quad\Rightarrow\quad x_B^2-2x_B-35=0.$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo

$$x_{B,D}=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4(-35)}}{2} \quad\Rightarrow\quad x_B=-5, \quad x_D=7.$$

Ordinate su

$$y_B=\frac{x_D}{3}+\frac{5}{3}=0, \qquad y_D=\frac{x_D}{3}+\frac{5}{3}-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}=4.$$

Preostala temena kvadrata su $B(-5;\ 0)$ i $D(7;\ 4)$.

Zadatak 17. Kroz tačku $M(3;\ 4)$ kruga $K:\ x^2+y^2=25$ povući tetivu čija je udaljenost od koordinatnog početka $d=\sqrt{5}$. Naći jednačinu tetive.

Rešenje:

Tačka $M(3,4)$ leži na krugu K. Neka je P presek tetive p i njene normale iz $O(0,0)$. Iz pravouglog trougla OPM imamo:

$$\overline{PM}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5},$$

pa je dužina cele tetive $\overline{MN}=2\overline{MP}=4\sqrt{5}$.

Jednačina tetive p kroz tačku $M(3;\ 4))$ je $y-4=k(x-3)$. Tetiva p mora dodirivati krug $l_2:\ x^2+y^2=5$. Zajedničke tačke su rešenja sistema

$$y-4=k(x-3), \qquad x^2+y^2=5,$$

odakle

$$x^2+(k(x-3)+4)^2=5 \quad\Rightarrow\quad \left(1+k^2\right)x^2+2k(4-3k)x+9k^2-24k+11=0.$$

Uslov dodira je ispunjen ako sistem ima jedno rešenje, tj. odgovarajuća diskriminanta D je jednaka nuli:

$$D = (2k(4-3k))^2 - 4\left(1+k^2\right)(9k^2-24k+11) = 4k^2 - 24k + 11 = 0.$$

Rešenja su $k_1 = \frac{11}{2}$, $k_2 = \frac{1}{2}$. Otuda dve prave zadovoljavaju zadate uslove:

$$p: \quad y - 4 = \frac{11}{2}(x-3), \qquad q: \quad y - 4 = \frac{1}{2}(x-3)$$

Zadatak 18. Odrediti jednačinu kruga čiji je centar na pravoj $y = x$ koji prolazi kroz tačku $A(2,4)$ i dodiruje ose O_x i O_y.

Rešenje:

Opšta jednačina kruga je

$$K : (x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2,$$

gde je $C(p,q)$ centar i R poluprečnik, kao na Slici 5.9. Kako centar pripada pravoj $y = x$, to je $p = q$. Iz uslova dodira sa x- osom imamo $R = |q|$, iz uslova dodira sa y-osom dobijamo $R = |p|$. Stoga je $R = p = q$ ili $R = -p = -q$. Kako krug prolazi kroz tačku $A(2;4)$, to isključujemo mogućnost $p < 0$. Dakle, važi

$$(2-p)^2 + (4-p)^2 = p^2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 - 12p + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 10.$$

Za $p_1 = 2$, dobijamo prvo rešenje $p_1 = q_1 = R_1 = 2$.

Za $p_2 = 10$, dobijamo drugo rešenje $p_2 = q_2 = R_2 = 10$.

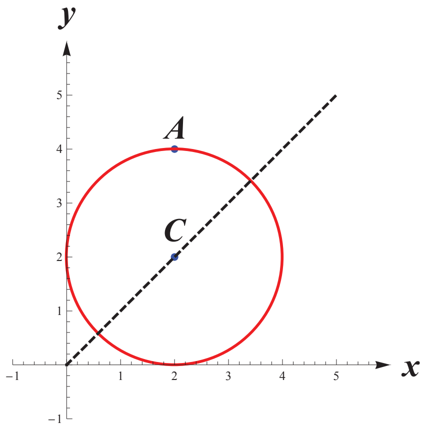
Rešenja su:

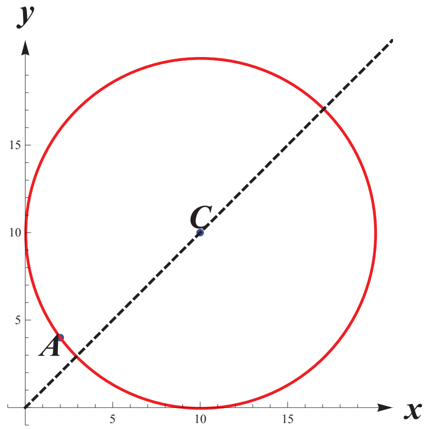
$$K_1 : \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2, \quad K_2 : \quad (x-10)^2 + (y-10)^2 = 10^2.$$

Zadatak 19. Napisati jednačinu kruga opisanog oko trouglaΔABC:

$$A(3,-7), \quad B(8,-2), \quad C(6,2).$$

Rešenje:





Slika 9. Krugovi koji dodiruju ose

Koeficijent pravca prave kroz tačke A i B je

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-(-7)}{8-3} = \frac{5}{5} = 1 \quad k_n = -\frac{1}{k_{AB}} = -1.$$

Koeficijent normale stranice AB je $k_n = -\frac{1}{k_{AB}} = -1$.

Koordinate tačke S središta duži AB, kao na Slici 5.10, su

$$S: \;\; x_s = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2}; \quad y_s = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-7-2}{2} = -\frac{9}{2}$$

Normala n stranice AB prolazi kroz $S\left(\frac{11}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ i ima koeficijent $k_n = -1$. Stoga je $n: \;\; y + \frac{9}{2} = -\left(x - \frac{11}{2}\right)$.

Slično, prava koja sadrži stranicu BC ima

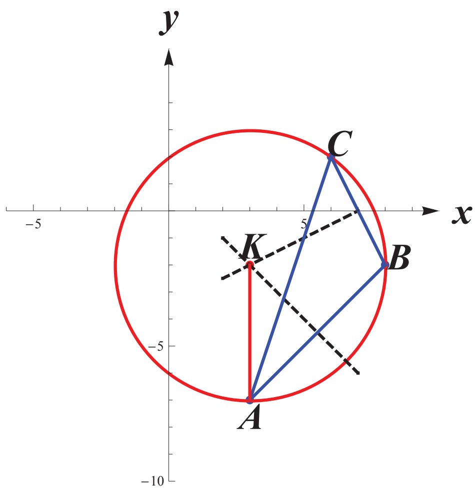
$$k_{BC} = \frac{2+2}{6-8} = \frac{4}{-2} = -2 \quad k_m = -\frac{1}{k_{BC}} = \frac{1}{2}$$

$$T: \;\; x_T = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{8+6}{2} = 7; \quad y_T = \frac{y_B + y_C}{2} = 0$$

Normala m stranice BC prolazi kroz tačku $T(7,0)$ i ima $k_m = \frac{1}{2}$. Stoga je $m: \;\; y = \frac{1}{2}(x-7)$.

Presečna tačka normala n i m je

$$-x + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \;\Leftrightarrow\; -2x + 2 = x - 7 \;\Leftrightarrow\; 9 = 3x \;\Leftrightarrow\; x = 3.$$



Slika 10. Krug opisan oko trougla

Druga koordinata se dobija iz uslova $y = -x + 1 = -3 + 1 = -2$, tako da je tačka $K(3, -2)$. Poluprečnik je

$$r = \overline{KA} = \sqrt{(3-3)^2 + (-2+7)^2} = 5.$$

Jednačina kruga je

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

Zadatak 20. Napisati jednačinu kruga koji prolazi kroz tačke $P(2, 5)$, $Q(-6, 1)$, $R(3, -2)$.

Rešenje:

Opšta jednačina kruga je $\mathcal{K}: \ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$.

Kako P, Q i R pripadaju krugu, to njihove koordinate zadovoljavaju njegovu jednačinu:

$$\begin{aligned} P(2,5) \in \mathcal{K} \quad &\Rightarrow \quad (2-p)^2 + (5-q)^2 = r^2, \\ Q(-6,1) \in \mathcal{K} \quad &\Rightarrow \quad (-6-p)^2 + (1-q)^2 = r^2, \\ R(3,-2) \in \mathcal{K} \quad &\Rightarrow \quad (3-p)^2 + (-2-q)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Koristeći prviu i drugu jednakost, dobijamo

$$(2-p)^2 + (5-q)^2 = (-6-p)^2 + (1-q)^2 \quad \Rightarrow \quad -16p - 8q - 8 = 0$$

Slično, koristeći prvu i treću jednakost, imamo

$$(2-p)^2 + (5-q)^2 = (3-p)^2 + (-2-q)^2 \quad \Rightarrow \quad 2p - 14q + 16 = 0.$$

Rešavanjem sistema dobijamo

$$2p + q + 1 = 0, \quad p - 7q + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -1, \quad q = 1.$$

Sada je

$$r^2 = (2-p)^2 + (5-q)^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$$

Jednačina kruga glasi

$$\mathcal{K}: \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

Zadatak 21. Naći jednačinu kruga opisanog oko trougla ABC ako je:

$$A(-1, 8), \; B(-3, 4), \; C(6, 7).$$

Rešenje:

Podsetimo se da se rastojanje tačaka $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$ izračunava po formuli

$$d = \overline{M_1M_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

Centar opisanog kruga je presek simetrala stranica. Simetralu s_1 stranice AB čine sve tačke S koje su podjednako udaljene od temena A i B:

$$S(x, y) \in s_1 \;\Rightarrow\; AS^2 = SB^2 \;\Leftrightarrow\; (x+1)^2 + (y-8)^2 = (x+3)^2 + (y-4)^2\,.$$

Odatle

$$x^2+2x+1+y^2+64-16y = x^2+9+6x+y^2+16-8y \;\Rightarrow\; s_1:\; x+2y-10 = 0.$$

Slično, simetralu s_2 stranice BC čine tačke

$$S(x, y) \in s_2 \;\Rightarrow\; BS^2 = SC^2 \;\Rightarrow\; (x+3)^2 + (y-4)^2 = (x-6)^2 + (y-7)^2\,,$$

odakle

$$x^2+9+6x+y^2+16-8y = x^2+36-12x+y^2+49-14y \;\Rightarrow\; s_2 :\; 3x+y-10 = 0.$$

Centar C kruga nalazimo u preseku simetrala stranica, tj. važi $C = s_1 \times s_2$. Njegove koordinate dobijamo rešavanjem sistema jednačina

$$x + 2y - 10 = 0, \quad 3x + y - 10 = 0.$$

Eliminacijom nalazimo $x = 2$ i $y = 4$. Centar kruga je tačka $C\,(2,4)$. Poluprečnik kruga je

$$r = CA = \sqrt{(-1-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Jednačina kruga glasi

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

Zadatak 22. Naći koordinate tačke S koja polovi luk $\widehat{AB}$, kruga K : $x^2 + y^2 = 25$, ako je $A\,(5,0)$, $B\,(3, y > 0)$.

Rešenje:

Tačka S koja polovi luk $\widehat{AB}$ leži na simetrali ugla $\angle AOB$, kao što je prikazano na Slici 5.11.

Koordinate tačke koja pripada krugu zadovoljavaju njegovu jednačinu:

$$B\,(3, y > 0) \in K : \quad \Rightarrow \quad 3^2 + y^2 = 5^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 4.$$

Zbog uslova $y > 0$, dobijamo $B\,(3,4)$. Sredina T duži AB ima koordinate

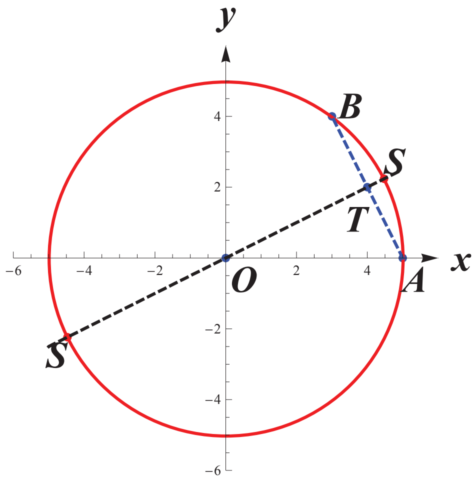
$$x_T = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5+3}{2} = 4, \quad y_T = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{0+4}{2} = 2,$$

tj., važi $T\,(4,2)$. Prava OT ima jednačinu

$$OT :\; y - y_0 = \frac{y_T - y_0}{x_T - x_0}\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{2}\,.$$

Ova prava je ujedno i simetrala ugla $\angle AOB$. Njen presek sa krugom je rešenje sistema

$$y = \frac{x}{2}, \quad x^2 + y^2 = 25 \;\Rightarrow\; x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 25 \;\Rightarrow\; x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 25 \;\Rightarrow\; x^2 = 20.$$



Slika 11. Sredina luka

Odavde je $x = \pm 2\sqrt{5}$. Dakle, zadatak ima dva rešenja: $S(2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ i $S'(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.

Zadatak 23. Odrediti jednačinu kružnice čiji centar leži na pravoj l : $y = x + 1$, čija je tangenta y-osa i prolazi kroz tačku $A\,(-4, -1)$.

Rešenje:

Neka je tražena kružnica $K : (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Njen centar $C(p, q)$ leži na pravoj l, dakle važi

$$C(p, q) \in l : \; y = x + 1 \quad \Rightarrow \quad q = p + 1.$$

Kako je osa Oy - tangenta kruga, to je $r = |p|$ i važi

$$K : \quad (x-p)^2 + (y-q)^2 = p^2.$$

Pretpostavimo da je $p = r > 0$. To znači da je centar C u desnoj poluravni i da krug K dodiruje osu y sdesna. Tada ne može da prolazi kroz tačku $A\,(-4, -1)$.

Dakle $r = -p > 0$, odakle mora biti $p < 0$.

Kako tačka $A\,(-4, -1)$ pripada krugu K, imamo

$$A\,(-4, -1) \in K \;\Rightarrow\; p^2 + 12p + 20 = 0 \;\Rightarrow\; p_1 = -10, \quad p_2 = -2.$$

Oba rešenja su prihvatljiva jer su negativna. Sada dobijamo

$$p_1 = -10 \;\Rightarrow\; q_1 = -9;\; r_1 = 10, \qquad p_2 = -2 \;\Rightarrow\; q_2 = -1;\; r_2 = 2.$$

Dakle, postoje dva kruga koja ispunjavaju tražene zahteve:

$$K_1: \quad (x+10)^2 + (y+9)^2 = 100, \qquad K_2: \quad (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

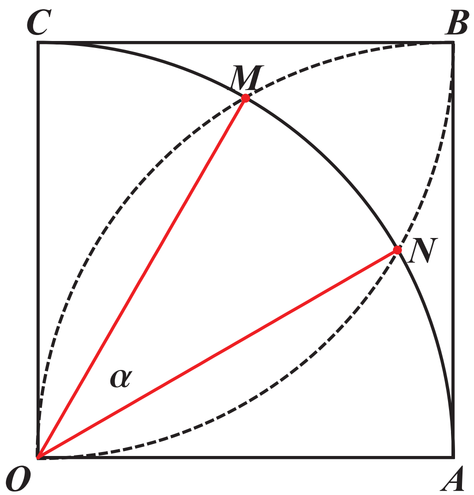
Zadatak 24. Dat je kvadrat $\square OABC$, čija su temena: $O\,(0,0)$, $A\,(1,0)$, $B\,(1,1)$ i $C\,(0,1)$. Odrediti:

a) Jednačine kružnica $K_O\left(O,\overline{OA}\right)$; $K_A\left(A,\overline{AO}\right)$ i $K_C\left(C,\overline{CO}\right)$;

b) Presečnu tačku $M = K_O \cup K_A$ i $N = K_O \cap K_C$ koje leže unutar kvadrata $\square OABC$;

c) Ugao δ između pravih OM i ON.

Rešenje:



Slika 12. Ugao između tetiva krugova u kvadratu

Jednačine traženih kružnica su:

$$K_O: \; x^2 + y^2 = 1, \quad K_A: \; (x-1)^2 + y^2 = 1, \quad K_C: \; x^2 + (x-1)^2 = 1.$$

Tačka M se nalazi u preseku krugova K_O i K_A, kao na Slici 5.12. Stoga se njene koordinate dobijaju kao rešenja sistema:

$$M = K_O \times K_A \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Odzimanjem jednačina dobijamo

$$x^2 - (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - \left(x^2 - 2x + 1\right) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Tačka M ima koordinate $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Slično,

$$N = K_O \times K_C \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + (y-1)^2 = 1,$$

odakle, oduzimanjem jednačina, dobijamo

$$y^2 - (y-1)^2 = 0 \Rightarrow 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Tako nalazimo da su koordinate tačke $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Jednačina prave

$$OM: \quad y - 0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0}{\frac{1}{2} - 0}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x.$$

Koeficijent pravca ove prave $k_1 = \sqrt{3}$ određuje njen nagib prema x-osi $\tan\alpha_1 = \sqrt{3}$, tj. $\alpha_1 = 60°$.

Slično, jednačina prave

$$ON: y - 0 = \frac{\frac{\sqrt{1}}{2} - 0}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

odakle je $\tan\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tj. $\alpha_2 = 30°$. Ugao δ između pravih je

$$\delta = \angle(ON, OM) = \alpha_1 - \alpha_2 = 30°.$$

5.4 Elipsa

5.4.1 Zadaci

Zadatak 25. Od svih pravih koje su paralelne sa pravom $l: \; x+y=0$, odrediti one koje dodiruju elipsu $x^2+4y^2=20$. Naći i koordinate dodirnih tačaka.

Rešenje:

Prave paralelne pravoj $l: \; y=-x$ imaju isti koeficijent pravca $k=-1$, te stoga i jednačinu oblika $p: \; y=-x+a$ $(a \in \mathbb{R})$. Zajedničke tačke zadovoljavaju jednačinu

$$x^2+4(a-x)^2=20 \Leftrightarrow x^2+4x^2-8ax+4a^2-20=0 \Leftrightarrow 5x^2-8ax+4a^2-20=0.$$

Rešenja kvadratne jednačine su

$$x_{1,2}=\frac{8a \pm \sqrt{64a^2-4\cdot 5(4a^2-20)}}{10}=\frac{8a \pm \sqrt{400-16a^2}}{10}$$

Uslov dodira je $x_1=x_2$, tj $D=0$, odakle je

$$400-16a^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 25-a^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=\pm 5.$$

Tražene prave su $p_1: \; x+y=5$ i $p_2: \; x+y=-5$.

Koordinate tačaka dodira su:

$$x_1=\frac{8\cdot 5}{10}=4, \; y_1=5-4=1, \quad x_2=-\frac{5\cdot 8}{10}=-4, \; y_2=-5+4=-1.$$

Tačke dodira su: $M_1(4,1)$ i $M_2(-4,-1)$.

Zadatak 26. Odrediti jednačinu tangente elipse

$$x^2+4y^2=100$$

koja je paralelna sa pravom $y=\frac{2}{3}x$.

Rešenje:

Kako je tangenta paralelna sa pravom $y = \frac{2}{3}x$, njena jednačina ima oblik

$$y = \frac{2}{3}x + n.$$

Sada, zajedničke tačke elipse i tangente, kao na Slici 5.13a, zadovoljavaju jednačinu

$$x^2 + 4\left(\frac{2}{3}x + n\right)^2 = 100.$$

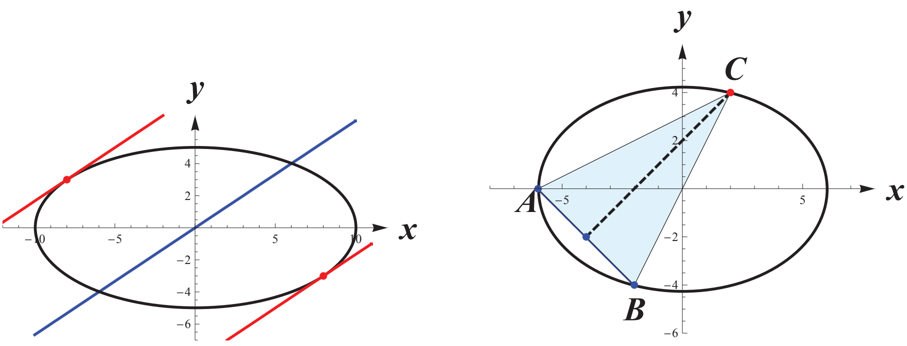
Diskriminanta kvadratne jednačine je

$$D = 16n^2 - 25(n^2 - 25) = -9n^2 + 25^2.$$

Uslov dodira je ispunjen ako je

$$D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 = \frac{25^2}{3^2} \quad \Leftrightarrow \quad n = \pm\frac{25}{3}$$

Dakle, tražene tangente elipse su: $t_1: \ y = \frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$ i $t_2: \ y = \frac{2}{3}x - \frac{25}{3}$.



Slika 13. a) Tangente elipse; b) Trougao u elipsi

Zadatak 27. Naći presečne tačke A i B elipse $\varepsilon: \ x^2 + 2y^2 = 36$ i prave $p: \ x + y + 6 = 0$. Kolika je površina jednakokrakog trougla ΔABC čija je osnovica AB, a teme C leži na elipsi u prvom kvadrantu?

Rešenje:

Presečne tačke elipse i prave, baš kao na Slici 5.13b, su rešenja sistema jednačina

$$\varepsilon: \; x^2 + 2y^2 = 36, \quad p: \; y = -6 - x.$$

Odatle

$$x^2 + 2(-x-6)^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 8x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -6, \; x_2 = -2.$$

Stoga je $A\,(-6, 0)$ i $B\,(-2, -4)$. Prava koja sadrži ove tačke ima jednačinu

$$AB: y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,(x - x_A) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-4-0}{-2-(-6)}\,(x+6)\,.$$

Njen koeficijent pravca je $k_{AB} = -1$.

Svi jednakokraki trouglovi čija je osnovica AB imaju treće teme C na simetrali ove duži. Stoga, prvo tražimo sredinu S duži AB:

$$S\,(x_S, y_S): \quad \overline{AS} = \overline{SB} \quad \Rightarrow \quad x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = -4 \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2} = -2.$$

Dakle, $S\,(-4, -2)$.

Iz uslova normalnosti normale n i prave AB ($n \perp AB$), imamo $k_n \cdot k_{AB} = -1$, odakle je $k_n = 1$. Sada važi

$$n: \; y - y_s = k_n\,(x - x_s) \quad \Rightarrow \quad y - (-2) = 1\,(x - (-4)) \quad \Rightarrow \quad y = x + 2.$$

Teme C trougla ΔABC pripada presečnoj tački simetrale duži AB i date elipse, tj

$$x^2 + 2y^2 = 36, \quad y = x + 2.$$

Rešavanjem ovog sistema, dobijamo

$$x^2 + 2(x+2)^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 8x - 28 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{14}{3}, \; x_2 = 2.$$

Kako C treba da leži u prvom kvadrantu, to važi da je $x_C = x_2 = 2$. Sada je $y_2 = 2 + 2 = 4$ i $C\,(2, 4)$.

Kako su dužine osnovice AB i visine SC jednake:

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \qquad \overline{SC} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2},$$

to je površina trougla jednaka

$$P = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{SC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad P = 24.$$

5.5 Parabola

5.5.1 Zadaci

Zadatak 28. Na paraboli $\mathcal{P}: \ y^2 = 4x$ odrediti tačku najbližu pravoj $a: \ x - y + 4 = 0$.

Rešenje:

Rastojanje tačke $M(x, y)$ od prave a je

$$d(M, a) = \frac{|x - y + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|x - y + 4|.$$

Ova tačka istovremeno leži i na paraboli, pa imamo

$$d(M, a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{y^2}{4} - y + 4\right| = \frac{1}{4\sqrt{2}}|y^2 - 4y + 16|.$$

Kako je

$$f(y) = y^2 - 4y + 16 = y^2 - 4y + 4 + 12 = (y - 2)^2 + 12,$$

to je $f(y)$ pozitivna za svako realno y, te važi

$$d(M, a) = \frac{(y - 2)^2 + 12}{4\sqrt{2}}.$$

Rastojanje $d(M, a)$ je minimalno za $y = 6$. Sada je $x = 2^2/4 = 1$, pa je tražena tačka $M(1, 2)$.

Zadatak 29. Na pravoj $a: \ x - y + 7 = 0$ odrediti tačku najbližu paraboli $\mathcal{P}: \ y^2 = 12x$.

Rešenje:

Rastojanje tačke $M(x, y)$ od prave a koje su prikazane na Slici 5.14a, je

$$d(M, a) = \frac{|x - y + 7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|x - y + 7|,$$

odakle

$$d(M,a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{y^2}{12} - y + 7\right| = \frac{1}{12\sqrt{2}}|y^2 - 12y + 84|. = \frac{(y-6)^2 + 48}{12\sqrt{2}}.$$

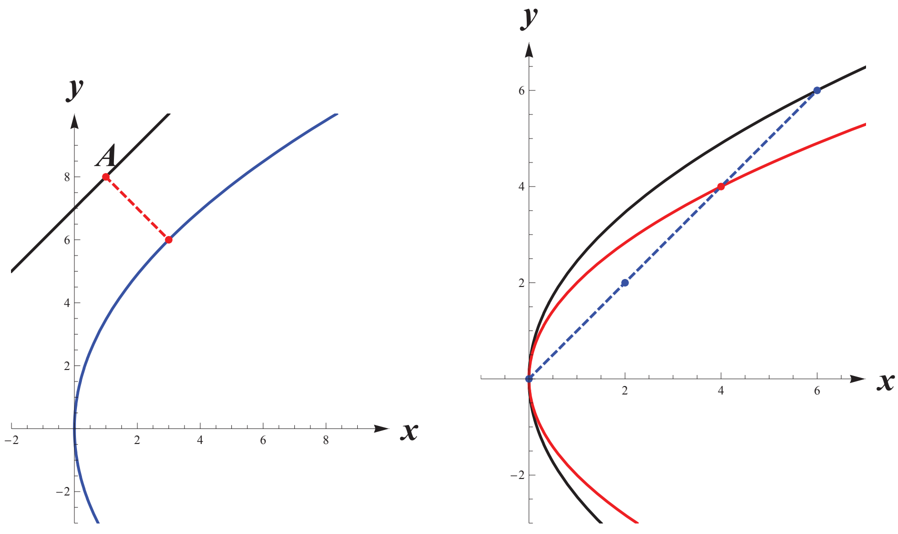
Rastojanje $d(M,a)$ je minimalno za $y = 6$. Sada je $x = 6^2/12 = 3$, pa je tražena tačka na paraboli $M(3,6)$. Normala prave a ima koeficijent pravca $k_n = -1/k_a = -1$. Kako normala n sadrži tačku $M(3,6)$, to ona ima jednačinu

$$n: \ y - 6 = -(x-3) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 9.$$

Njen presek sa pravom a je rešenje sistema

$$x - y + 7 = 0, \qquad y = -x + 9.$$

Tražena tačka je $A(1,8)$.



Slika 14. a) Tačka prave najbliža paraboli; b) Parabola u paraboli

Zadatak 30. Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje dele tetive parabole $\mathcal{P}: \ y^2 = 6x$ koje polaze iz koordinatnog početka $O(0,0)$ na dva dela od kojih je prvi dva puta veći od drugog.

Rešenje:

Neka je $M(x_M, y_M)$ proizvoljna tačka parabole prikazane na Slici 5.14b. Tražena odgovarajuća tačka S je takva da važi

$$\overline{OS} = 2\overline{SM} \quad \Rightarrow \quad x_S = \frac{x_0 + 2x_M}{1+2} = \frac{2}{3}x_M, \qquad y_S = \frac{y_0 + 2y_M}{1+2} = \frac{2}{3}y_M \ .$$

odakle je $x_M = \frac{3}{2}x_S$ i $y_M = \frac{3}{2}y_S$. Kako je M tačka na paraboli, dobijamo

$$y_M^2 = 6x_M \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{2}y_S\right)^2 = 6\frac{3}{2}x_S.$$

Uvodeći smene $x = x_S$ i $y = y_S$, dobijamo da je traženo geometrijsko mesto nova parabola

$$y^2 = 4x.$$

5.6 Hiperbola

5.6.1 Zadaci

Zadatak 31. Odrediti jednačinu tangente t hiperbole $\mathcal{H}: \ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ koja je paralelna pravoj $p: \ 10x - 3y + 9 = 0$.

Rešenje:

Direktni oblik jednačine prave p je $y = \frac{10}{3}x + 3$, odakle imamo koeficijent pravca $k = \frac{10}{3}$. Kako je tangenta paralelna sa ovom pravom, kao na Slici 5.15a, ona ima isti koeficijent pravca i stoga jednačinu $t: \ y = \frac{10}{3}x + n \quad (n \in \mathbb{R})$, ukoliko nije paralelna sa y-osom. Zajedničke tačke prave t i hiperbole dobijamo iz sistema jednačina

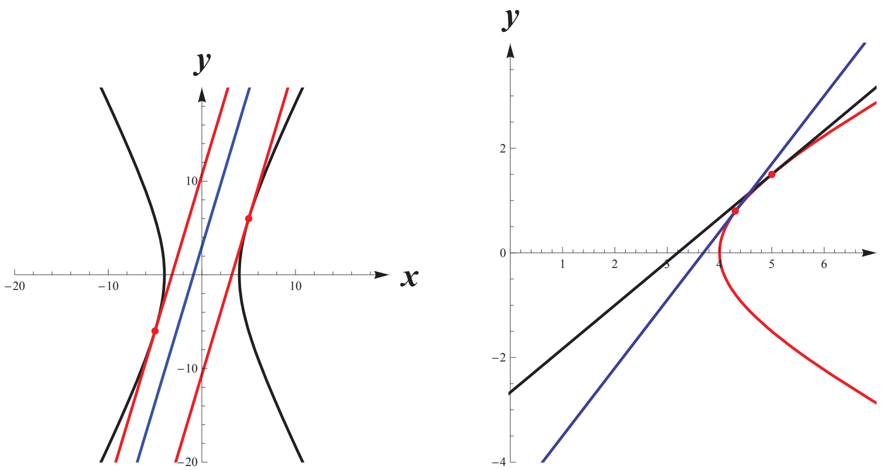
$$y = \frac{10}{3}x + n, \quad 4x^2 - y^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - \left(\frac{10}{3}x + n\right) = 64,$$

odakle je

$$64x^2 + 60nx + 9(n^2 + 64) = 0.$$

Da bi t bila tangenta mora biti diskriminanta jednaka nuli, tj.

$$D = (60n)^2 - 4 \cdot 64 \cdot 9(n^2 + 64) = 144(9n^2 - 1024) = 0 \quad \Rightarrow \quad n = \pm\frac{32}{3}.$$



Slika 15. a) Tangenta hiperbole; b) Hiperbola na osnovu tangenti

Dakle, postoje dve tražene tangente

$$t_1 :\ 10x - 3y - 32 = 0, \qquad t_2 :\ 10x - 3y + 32 = 0.$$

Zadatak 32. Odrediti jednačinu hiperbole $\mathcal{H} :\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ čije su tangente prave $t_1 :\ 5x - 6y - 16 = 0$ i $t_2 :\ 13x - 10y - 48 = 0$.

Rešenje:

Prava $y = kx + n$ je tangenta hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, kao Slici 5.15b, ako imaju jedinstvenu zajedničku tačku, tj. ako sistem jednačina ima jedno i samo jedno realno rešenje. Odatle dolazimo do uslova

$$a^2k^2 - b^2 = n^2 \quad (n \neq 0).$$

Date tangente, napisane u direktnom obliku, glase:

$$t_1 :\ y = \frac{5}{6}x - \frac{8}{3}, \qquad t_2 :\ y = \frac{13}{10}x - \frac{24}{5}\ .$$

Koristeći uslov dodira dobijamo

$$a^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 - b^2 = \left(\frac{-8}{3}\right)^2, \qquad a^2\left(\frac{13}{10}\right)^2 - b^2 = \left(-\frac{24}{5}\right)^2.$$

Oduzimajući prvu jednačinu od druge dobijamo

$$a^2\left(\frac{13^2}{10^2}-\frac{5^2}{6^2}\right)=\frac{24^2}{5^2}-\frac{8^2}{3^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{224}{225}a^2=\frac{3584}{225}\ ,$$

odakle je $a^2 = 16$. Iz uslova dodira, imamo

$$b^2 = a^2\ \frac{5^2}{6^2}-\frac{8^2}{3^2}=16\frac{25}{36}-\frac{64}{9}=4.$$

Tražena hiperbola glasi

$$\mathcal{H}:\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1.$$

6

Kompleti zadataka sa prijemnih ispita

U ovoj sekciji naveden je izvestan broj kompleta zadataka koji su bili na ranijim prijemnim ispitima na Mašinskom fakultetu u Nišu. Na ovaj način kandidati mogu steći dobar uvid u to kako će izgledati prijemni ispit iz Matematike.

KOMPLET 1.

1. Ako je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, dokazati da je
$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma$$

2. Nać i sva rešenja jednačine: $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 0$.

3. Rešiti nejednačinu
$$\log \frac{2x-1}{x+2} \geq 0$$
i predstaviti rešenja na brojnoj osi.

4. U pravu kupu visine $h = 6$ i poluprečnika osnove $r = 4$ upisana je kocka čija jedna strana leži na osnovi kupe. Izračunati ivicu kocke.

5. Dat je krug
$$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$$
i prava $y = kx$. Odrediti parametar k tako da data prava:
   a) dodiruje dati krug,
   b) seče dati krug,
   c) nema sa krugom zajedničkih tačaka.

KOMPLET 2.

1. Naći sva rešenja jednačine $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sin x}$.

2. Izračunati $\sin^2(2\alpha)$, ako je

$$\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 7$$

3. Data je funkcija $y = \log(-2x^2 + 7x - 3)$.
   a) Odrediti sve vrednosti x za koje je funkcija definisana (ima realne v ednosti).
   b) Odrediti vrednost argumenta x za koju funkcija ima maksimalnu vr dnost.

4. Odrediti površinu jednakokrakog trapeza čija dijagonala $d = 2cm$ obrazu sa osnovom ugao od $45°$.

5. Odrediti jednačinu tangente elipse

$$x^2 + 4y^2 = 100$$

koja je paralelna sa pravom $y = \frac{2}{3}x$.

KOMPLET 3.

1. Naći sva rešenja jednačine $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$.

2. Dokazati identitet $\mathrm{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

3. Rešiti jednačinu $\log_2(x + 14) = 6 - \log_2(x + 2)$.

4. Naći dijagonalu i krak jednakokrakog trapeza čije su osnove $a = 20$, $b = 12$, ako se zna da se centar opisane kružnice oko trapeza nalazi na većoj osnovici.

5. U dekartovom pavouglom koordinatnom sistemu tačke $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ i $C(1, 4)$ su temena pravouglog trougla. Odrediti jednačinu prave koja sadrži hipotenuzinu visinu.

Komplet 4.

1. Dokazati identitet
$$\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{4}\sin^2\alpha$$

2. Naći sva rešenja jednačine
$$\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$$

3. Rešiti nejednačinu
$$\log_2 x\le\frac{2}{\log_2 x-1}$$
(uvesti smenu $\log_2 x=t$).

4. Srednja linija trapeza iznosi 10 i deli površ inu tog trapeza u odnosu 3 : 5. Izračunati dužinu osnovica trapeza.

5. Odrediti jednačinu prave koja odseca na y-osi dva puta veći odsečak nego na x-osi i dodiruje kružnicu
$$(x-7)^2+y^2=20.$$

KOMPLET 5.

1. Rešiti jednačinu $\log 10^{\log(x^2+21)}-\log x\le 1$ (osnova logaritma je 10).

2. Dokazati identitet
$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha(\mathrm{tg}^2\alpha-1)}=\frac{2}{1+\mathrm{tg}\alpha}$$

3. Naći sva rešenja jednačine
$$\sin^2 x-3\cos^2 x+2\sin 2x=1$$

4. Od svih pravih koje su paralelne sa pravom $x+y=0$, odrediti one koje dodiruju elipsu $x^2+4y^2=20$, i naći koordinate dodirnih tačaka.

5. U pravilnu četvorostranu piramidu upisana je kocka tako da četiri njena temena leže na visinama bočnih strana (apotemama) piramide, a četiri na osnovi piramide. Sve ivice piramide su jednake, a iznose a. Izračunati površinu i zapreminu te kocke.

KOMPLET 6.

1. Dijagonale romba odnose se kao $3:4\,(d_1:d_2 = 3:4)$. Odrediti odnos površine romba i površine kruga upisanog u taj romb.

2. Rešiti jednačinu $3^{2x-1} = 3^{x+2} + \sqrt{3^{2(x+1)} - 6\cdot 3^x + 1}$.

3. Odrediti sva rešenja jednačine

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin x \cdot \cos x} = 8$$

4. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M(8;6)$, a sa koordinatnim osama zatvara trougao površine 12.

5. Rešiti jednačinu

$$\frac{\log^2 x - 3\log x + 3}{\log x - 1} \leq 1 \qquad (\log x = \log_{10} x)$$

KOMPLET 7.

1. Rešiti jednačinu $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

2. Rešiti nejednačinu $-2\cos^2 x + \sin x + 1 < 0$

3. Danas, 24. juna 1989. godine, Perica ima onoliko godina koliko iznosi zbir cifara u njegovoj godini rođenja. Koje godine je Perica rođen?

4. Zadata je prava $3x - 4y + 24 = 0$. Na x-osi naći tačku oko koje se može opisati krug poluprečnika $r = 5\cdot\sqrt{10}$ tako da na datoj pravoj odseca tetivu dužine 10.

5. U sferu poluprečnika R upisana je prava prizma čija je osnova pravougli trougao sa oštrim uglom α. Naći zapreminu i površinu ove prizme u funkciji od R i α, ako znamo da najveća strana prizme jeste kvadrat.

KOMPLET 8.

1. Rešiti nejednačinu
$$\frac{4^x + 2x - 4}{x - 1} \leq 2$$

2. Naći sva rešenja jednačine $\sin x + \mathrm{tg} x = 1 + \cos x$.

3. Izračunati strane paralelograma čiji je obim 22m, oštar ugao 60° i manja dijagonala 7m.

4. Za funkciju $y = \log(-x^2 + 6x - 5)$ nać i:
   a) skup vrednosti x za koje je funkcija definisana,
   b) vrednost x za koju funkcija postiže maksimum i izračunati taj maksimum.

5. Napisati jednačinu prave koja je normalna na pravu $2x + 6y - 3 = 0$, a rastojanje tačke $A(5; 4)$ od tražene prave je $\sqrt{10}$.

KOMPLET 9.

1. Rešiti nejednačinu $2^x + 2^{-x+1} - 2 \leq 1$.

2. Naći sva rešenja jednačine
$$\sqrt{3} - \mathrm{tg} x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

3. U jednakokraki trapez čija je površina $20cm^2$ upisan je krug poluprečnika $2cm$. Odrediti strane tog trapeza.

4. Pod kojim se uglom vidi krug $x^2 + y^2 = 20$ iz tačke $M(2, -6)$.

5. Napisati jednačinu kružnice koja prolazi kroz tačke: $A(3, -7)$, $B(8, -2)$, $C(6, 2)$.

KOMPLET 10.

1. Naći $\sin 18^\circ$, koristeći jednakost $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$.

2. Rešiti jednačinu
$$\log \sqrt[5]{x} = \frac{18 - \log x}{3 + \log x^2}.$$

3. Rešiti nejednačinu
$$8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

4. Naći koordinate tačke S koja raspolovljava luk M_1, M_2, kruga $x^2+y^2 = 25$, ako je $M_1\,(5,0)$, $M_2\,(3, y > 0)$.

5. Centar upisanog kruga u jednakokraki trougao deli visinu koja odgovara osnovici tog trougla na odsečke 5 cm i 3 cm, računajući od temena. Izračunati dužine stranica tog trougla.

KOMPLET 11.

1. Naći sva rešenja jednačine $\sin 9x + \sin 5x - \cos 2x = 0$.

2. Rešiti jednačinu
$$\log \sqrt[3]{10\,(x-1)^2} - \frac{1}{3}\log\,(3+x)^2 = \frac{1}{3}.$$

3. Rešiti nejednačinu $9^x - 10 \cdot 3^x \cdot 2^x + 9 \cdot 4^x \leq 0$.

4. Dat je krug $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$ i tač ka $A\,(3; -4)$. Utvrditi da postoji kvadrat opisan oko kruga čije je jedno teme tačka A. Zatim naći ostala temena tog kvadrata.

5. Osnove trapeza su $a = 8$ cm, $b = 4$ cm, a uglovi na većoj osnovici su 30° i 45°. Izračunati površinu trapeza.

KOMPLET 12.

1. Nači sva rešenja jednačine $\sqrt{3} \sin x = 1 - \cos x$.

2. Uprostiti izraz

$$\sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}\right)^2-\left(\sqrt{x}+\sqrt{a-a^2}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}\right)}.$$

3. Pravougli trapez sa osnovama $a = 9\ cm$, $b = 6\ cm$ opisan je oko kruga. Izračunati površinu trapeza.

4. Kroz tač ku $M(3;\ 4)$ kruga $x^2+y^2 = 25$ povući tetivu čija je udaljenost od koordinatnog početka $\sqrt{5}$. Naći jednačinu tetive.

5. Rešiti nejednačinu $\log\frac{x-4}{x+1} < 1$.

KOMPLET 13.

1. Rešiti nejednačinu $\dfrac{x^2+1}{x-3} < -1$.

2. Rešiti jednačinu $\dfrac{3}{\log_3 x} = -\dfrac{1}{6}$.

3. Rešiti trigonometrijsku jednačinu $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

4. Data su temena $A(12; 3)$ i $B(4; 1)$ trougla ABC. Odrediti geometrijsko mesto temena C ako je površina trougla ABC stalno 20.

5. Izračunati površinu i zapreminu pravilne četvorostrane prizme (osnova kvadrat) kod koje je površina omotača $M = 18\sqrt{6}\ cm^2$, a nagibni ugao njene dijagonale prema osnovi iznosi $30°$.

KOMPLET 14.

1. Naći sva rešenja jednačine $\sin x + \text{tg}x = \dfrac{1}{\cos x} - \cos x$.

2. Rešiti jednačinu $4^x - 3^{x+\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x+1}$.

3. Rešiti nejednačinu $1 < \log_2 2\left(x^2 - 3x + 4\right) \leq 2$.

4. Odrediti jednačinu kruga čiji je centar na pravoj $y = x$ koji prolazi kroz tačku $A(2, 4)$ i dodiruje ose O_x i O_y.

5. U pravu kupu poluprečnika osnove $R = 6cm$ upisana je lopta poluprečnil $r = 4cm$. Izračunati visinu H i izvodnicu s te kupe.

KOMPLET 15.

1. Odrediti sve presečne tačke krivih $y = \sin x, \quad y = \sin 2x$.
2. Za koje vrednosti realnog parametra a jednačina $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ ima realne korene?
3. Dat je broj $A = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\sqrt{\sqrt{3}+2}$. Izračunati A^2 i na osnovu toga odrediti broj A.
4. Obim trougla je 18 cm. Simetrala jednog ugla deli suprotnu stranicu na odsečke $2,5$ cm i $3,5$ cm. Naći stranice trougla.
5. Naći jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $A(2,1)$ i sa pravom $l: 2x+3y+4=0$ zaklapa ugao od $45°$.

KOMPLET 16.

1. Rešiti jednačinu $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{x-2}$.
2. Rešiti jednačinu $\log\sqrt{x-8} + \dfrac{1}{2}\log(2x+1) = 1$.
3. Naći sva rešenja jednačine $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$.
4. Na pravoj $4x+3y-12=0$ nać i tačku podjednako udaljenu od tačaka $A(-1, \ -2)$, $B(1, \ 4)$.
5. Odrediti stranicu romba ako je odnos dijagonala $d_1 : d_2 = 1 : 2$, a površina $P = 16$ cm^2.

KOMPLET 17.

1. Rešiti trigonometrijsku jednačinu

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{1}{2}.$$

2. Rešiti jednačinu $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.

3. Odrediti parametar p $(p \in R)$ u jednačini $x^2 - px - (p-3)^2 = 0$ tako da rešenja budu realna.

4. Za dva koncentrična kruga zna se da tangenta na manji krug odseca na većem krugu tetivu dužine 20 cm. Naći površinu kružnog prstena.

5. Na pravoj $2x - y - 5 = 0$ naći tač ku P tako da zbir njenih odstojanja od tačaka $A(-7,1)$ i $B(-5,5)$ bude minimalan.

KOMPLET 18.

1. Naći sva rešenja jednačine $\cos 2x - 4\sin^2 x \cos^2 x = 1$.

2. Rešiti nejednačinu $\dfrac{5x-3}{2-x} > 3$.

3. Rešiti jednačinu $12\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$.

4. Pravilna četvorostrana piramida ima površinu osnove 72 cm^2, a omotača $12\sqrt{41}$ cm^2. Izračunati zapreminu.

5. Odrediti koordinate temena trougla ΔABC ako su $P(4,\ 3)$, $Q(-3,\ 5)$, $R(1,\ 0)$ sredine redom stranica BC, CA i AB.

KOMPLET 19.

1. Naći sva rešenja jednačine $\cos 2x + \cos x = \sin 2x + \sin x$.

2. Rešiti nejednačinu $\left|x + x^{-1} - 4\right| \leq 2$.

3. Za koje vrednosti realnog parametra a jednačina $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ ima realne korene.

4. Kada se omotač kupe razvije u ravni dobije se četvrtina kruga poluprečnika $4\sqrt{5}$. Izračunati zapreminu kupe.

5. Date su tačke $P(2,5)$, $Q(-6,1)$, $R(3,-2)$. Napisati jednačinu kruga opisanog oko trougla ΔABC.

KOMPLET 20.

1. Naći sva rešenja jednačine $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$.

2. Rešiti nejednačinu $\dfrac{1}{5-x} + \dfrac{2}{1+x} < 1$.

3. Rešiti jednačinu $4^{\sqrt{x-2}} - 12 = 2^{\sqrt{x-2}}$.

4. Pravilna četvorostrana prizma ima omotač površine $8m^2$ i dijagonalu $3m$. Izračunati njenu zapreminu.

5. Naći jednačinu kruga opisanog oko trougla ABC ako je:

$$A(-1,8),\ B(-3,4),\ C(6,7).$$