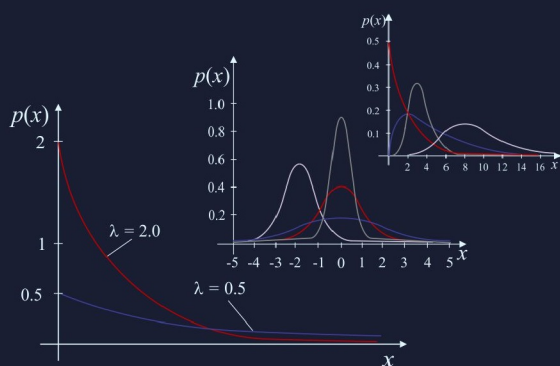


Goran Petrović
Predrag Milić
Miloš Madić

KVANTITATIVNA LOGISTIKA

verovatnoća, statistika i slučajni procesi sa primenama



Niš, 2018.

Univerzitet u Nišu
Mašinski fakultet u Nišu



UNIVERZITET U NIŠU
MAŠINSKI FAKULTET U NIŠU

Goran Petrović
Predrag Milić
Miloš Madić

KVANTITATIVNA LOGISTIKA

**verovatnoća, statistika i slučajni procesi
sa primenama**

Niš, 2018.

Naziv udžbenika: **“KVANTITATIVNA LOGISTIKA
verovatnoća, statistika i slučajni procesi sa primenama”**

Prvo izdanje

Autori: dr **Goran Petrović**, docent
Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu

dr **Predrag Milić**, docent
Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu

dr **Miloš Madić**, asistent
Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu

Recenzenti: dr Dragoslav Janošević, redovni profesor
Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu

dr Melanija Mitrović, redovni profesor
Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu

dr Miomir Stanković, redovni profesor (u penziji)
Fakultet zaštite na radu Univerziteta u Nišu

Izdavač: Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu
A. Medvedeva 14, 18000 Niš

Tiraž: 100 primerka

Štampa: SVEN štamparija, Niš

ISBN: 978-86-6055-106-3

Sva prava zadržavaju izdavač i autori. Reprodukција pojedinih delova ili celine ove publikacije u bilo kom obliku nije dozvoljena bez saglasnosti autora.

Odlukom Nastavno – naučnog veća Mašinskog fakulteta u Nišu br. 612-435-5-1/2018 od 14.09.2018. odobreno je izdavanje u kategoriji univerzitetskog udžbenika.
--

Predgovor

Mnoge pojave u logističkim sistemima i procesima imaju dinamički karakter zbog čega je često njihove promene u vremenu potrebno sagledati odgovarajućim kvantitativnim veličinama ili matematičkim funkcijama. Osnova za analitička razmatranja dinamičkog ponašanja realnih logističkih procesa svakako su matematičke discipline: matematička logika, kombinatorika, teorija skupova, opšta algebra, teorija grafova, teorija verovatnoće, statistika, slučajni procesi, teorija igara, teorija informacija itd.

Univerzitetski udžbenik “**KVANTITATIVNA LOGISTIKA verovatnoća, statistika i slučajni procesi sa primenama**” napisan je sa ciljem da na sveobuhvatan način sagleda primenu jednog dela veoma značajnih matematičkih disciplina za rešavanje različitih problema i modela logističkih sistema i procesa. Izložena materija jednim delom prati programe predmeta Transportni tokovi, Sistemi skladištenja i distribucije i Operaciona istraživanja na osnovnim i master akademskim studijama studijskih programa Mašinsko inženjerstvo i Saobraćajno mašinstvo transport i logistika, Mašinskog fakulteta u Nišu. Udžbenik mogu koristiti i studenti drugih studijskih programa na tehničkim fakultetima, kao i inženjeri za rešavanje praktičnih problema u oblastima primene teorije verovatnoće, matematičke statistike i slučajnih procesa.

Knjiga ima šest poglavlja: *Teorija verovatnoće i matematička statistika, Slučajni procesi, Transportni tokovi materijala, Upravljanje zalihama, Teorija masovnog opsluživanja i Simulaciono modeliranje*. U okviru poglavlja detaljno su opisane teorijske osnove kvantitativnih logističkih metoda sa velikim brojem rešenih primera. Svako poglavlje prati i deo sa spiskom pitanja i nerešenim zadacima koji imaju za cilj utvrđivanje naučenog gradiva. U *Prilogu* na kraju knjige date su statističke tabele neophodne za rešavanje zadataka.

Autori se duboko zahvaljuju recenzentima prof. dr Dragoslavu Janoševiću i prof. dr Melaniji Mitrović, redovnim profesorima Mašinskog fakulteta u Nišu, kao i prof. dr Miomiru Stankoviću, redovnom profesoru Fakulteta zaštite na radu, koji su se prihvatili odgovornog posla recenzije ovog udžbenika i korisnim sugestijama doprineli njegovom kvalitetu. Pored toga, autori se zahvaljuju i svima onima koji su pomogli izdavanje ovog udžbenika.

U Nišu, oktobra 2018.

Goran, Predrag i Miloš

Predgovor

Sadržaj

1. TEORIJA VEROVATNOĆE I MATEMATIČKA STATISTIKA	1
1.1. SLUČAJNI DOGAĐAJI I NJIHOVE VEROVATNOĆE	2
1.1.1. Klasična definicija verovatnoće	3
1.1.2. Aksiomska definicija verovatnoće	4
1.1.3. Statistička definicija verovatnoće	5
1.1.4. Pravila verovatnoće	5
1.1.5. Uslovna verovatnoća i nezavisnost događaja	7
1.2. SLUČAJNE PROMENLJIVE	8
1.2.1. Diskretna slučajna promenljiva	8
1.2.2. Neprekidna slučajna promenljiva	11
1.2.3. Numeričke karakteristike raspodela slučajne promenljive	12
1.2.4. Najznačajnije raspodele promenljivih diskretnog tipa	13
1.2.5. Najznačajnije raspodele promenljivih neprekidnog tipa	18
1.3. OSNOVNI POJMOVI MATEMATIČKE STATISTIKE	23
1.3.1. Statističko obeležje, populacija i uzorak	23
1.3.2. Empirijska funkcija raspodele	27
1.3.3. Tačkaste ocene parametara	27
1.3.4. Intervalna procena parametara	29
1.3.5. Testiranje statističkih hipoteza - χ^2 test	30
1.4. REŠENI PRIMERI	34
1.5. PITANJA I ZADACI	48
 2. SLUČAJNI PROCESI	 50
2.1. DEFINICIJA SLUČAJNIH PROCESA	51
3.1.1. Neke klase slučajnih procesa	52

2.2. MARKOVLJEVI PROCESI	53
3.1.1. Markovljevi procesi u užem smislu	54
3.1.2. Metode računanja verovatnoća stanja	58
2.3. PROCESI „RAĐANJA I UMIRANJA“	59
2.4. REŠENI PRIMERI	64
2.5. PITANJA I ZADACI	70
3. TRANSPORTNI TOKOVI MATERIJALA	72
3.1. ELEMENTI TRANSPORTNOG TOKA	73
3.1.1. Indikatori performansi transportne putanje	74
3.1.2. Račvanje i spajanje transportnih putanja	82
3.2. SISTEMI SKLADIŠTENJA	85
3.2.1. Skladišna tehnika	87
3.2.2. Proračun radnog ciklusa viljuškara i AGV	89
3.2.3. Proračun radnog ciklusa automatizovanih visokoregalnih dizalica	91
3.3. REŠENI PRIMERI	103
3.4. PITANJA I ZADACI	115
4. UPRAVLJANJE ZALIHAMA	117
4.1. STATIČKI MODEL ZALIHA	118
4.1.1. Model zaliha sa stohastičkom potrošnjom i količinom robe kao neprekidno slučajno promenljivom veličinom	118
4.1.2. Model zaliha sa stohastičkom potrošnjom i količinom robe kao diskretno slučajno promenljivom veličinom	121
4.2. STRATEGIJE UPRAVLJANJA ZALIHAMA KOJE SE OBNAVLJAJU U VREMENU	123
4.3. DETERMINISTIČKI MODELI ZALIHA SA KONTINUALNIM PRAĆENJEM	125
4.3.1. Osnovni model zaliha koje se obnavljaju u vremenu i imaju konstantnu potrošnju	125
4.3.2. Osnovni model zaliha koje se obnavljaju u vremenu, imaju konstantnu potrošnju i poznatu funkciju popunjavanja	129

4.3.3.	Osnovni model zaliha koje se obnavljaju u vremenu, imaju konstantnu potrošnju i planirano odsustvo zaliha	130
4.3.4.	Osnovni model zaliha koje se obnavljaju u vremenu i imaju konstantnu potrošnju uz prisustvo popusta u ceni u zavisnosti od količine koja se naručuje	132
4.3.5.	Model zaliha sa više artikala koji imaju konstantnu potrošnju i zajedničko ograničenje	135
4.4.	STOHAŠTIČKI MODEL ZALIHA SA KONTINUALNIM PRAĆENJEM	140
4.4.1.	Model zaliha koje se obnavljaju u vremenu sa stohastičkom potrošnjom i poznatim rokom isporuke	140
4.4.2.	Model zaliha koje se obnavljaju u vremenu sa potrošnjom i rokom isporuke kao stohastičkim veličinama	146
4.5.	SISTEMI ZALIHA SA PERIODIČNIM PRAĆENJEM	147
4.6.	PITANJA I ZADACI	151
5.	TEORIJA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA	153
5.1.	OSNOVNE DEFINICIJE, OZNAKE I PODELA	154
5.1.1.	Kendalova notacija	157
5.1.2.	Osnovna relacija sistema masovnog opsluživanja – Litlova formula	158
5.2.	MARKOVLJEVI MODELI SISTEMA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA	159
5.2.1.	Model jednokanalnog sistema masovnog opsluživanja sa neograničenim redom ($M/M/1/\infty$)	159
5.2.2.	Model višekanalnog sistema masovnog opsluživanja sa neograničenim redom ($M/M/m/\infty$)	163
5.2.3.	Model jednokanalnog sistema masovnog opsluživanja sa ograničenom veličinom populacije ($M/M/1/N$)	168
5.2.4.	Model jednokanalnog sistema masovnog opsluživanja sa ograničenim redom čekanja ($M/M/1/K/\infty$)	173
5.2.5.	Model višekanalnog sistema masovnog opsluživanja sa ograničenim redom čekanja ($M/M/m/K/\infty$)	174
5.3.	NE-MARKOVLJEVI MODELI SISTEMA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA	176
5.3.1.	Model D/D/1	176
5.3.2.	Model M/D/1	177
5.3.3.	Model M/E _k /1	178

5.4. REŠENI PRIMERI	179
5.5. PITANJA I ZADACI	185
6. SIMULACIONO MODELIRANJE	187
6.1. MODELIRANJE, MODELI I VRSTE MODELA	188
6.2. SIMULACIJA I SIMULACIONI MODELI	192
6.3. MONTE CARLO SIMULACIJA	202
6.3.1. Monte Carlo metoda	202
6.3.2. Manualna Monte Carlo simulacija	204
6.3.3. Primena Monte Carlo metode za statičku simulaciju korišćenjem stohastičkih matematičkih modela	209
6.3.4. Primena Monte Carlo metode za simulaciju diskretnih događaja	214
6.4. PITANJA I ZADACI	218
7. STATISTIČKE TABELE	225
8. LITERATURA	229