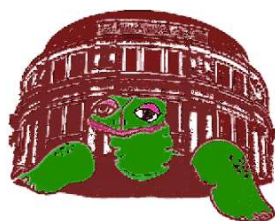


Ratko G. Pavlović
Goran B. Janevski
Ivan R. Pavlović

Mehanika III

Dinamika



Izdavačka jedinica
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu



Univerzitet u Nišu - Mašinski fakultet



Ratko G. Pavlović
Goran B. Janevski
Ivan R. Pavlović

Mehanika III – Dinamika

Niš, 2018.

Autori: dr Ratko G. Pavlović, redovni profesor Mašinskog fakulteta u Nišu
dr Goran B. Janevski, vanredni profesor Mašinskog fakulteta u Nišu
dr Ivan R. Pavlović, docent Mašinskog fakulteta u Nišu

Mehanika III – Dinamika

Recenzenti: dr Dragan Milosavljević, redovni profesor u penziji Fakulteta inženjerskih nauka u Kragujevcu,
dr Srboљub Simić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu.

Recenzije su usvojene odlukom Nastavno-naučnog veća Mašinskog fakulteta u Nišu br. 612-253-5/2018 od 10.maja 2018.god. Odobreno za štampu odlukom Nastavno-naučnog veća Mašinskog fakulteta u Nišu br. 612-253-5-1/2018 od 10.maja 2018.god.

Izdavač: Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu,
Aleksandra Medvedova 14, 18000 Niš.

ISBN: 978-86-6055-104-9

Tiraž: 200 primeraka

Štampa: SVEN, Stojana Novakovića 10, 18000 Niš

CIP-Katalogizacija u publikaciji
Narodna Biblioteka Srbije, Beograd.

CIP - Каталогизација у публикацији - Народна библиотека Србије, Београд

531.3(075.8)

ПАВЛОВИЋ, Ратко Г., 1950-

Mehanika 3. Dinamika / Ratko G. Pavlović, Goran B. Janevski, Ivan R. Pavlović. - Niš : Mašinski fakultet Univerziteta, 2018 (Niš : Sven). - 419 str. : graf. prikazi ; 25 cm

Slike autora. - Tiraž 200. - Beleška o autorima: str. 407-411. - Bibliografija: str. 405.

ISBN 978-86-6055-104-9

1. Јаневски, Горан Б., 1970- [аутор] 2. Павловић, Иван Р., 1979- [аутор]
а) Динамика

COBISS.SR-ID 265127436

PREDGOVOR

Udžbenik Mehanika III – Dinamika napisan je prema programu istoimenog predmeta koji se predaje studentima osnovnih studija na Mašinskom fakultetu u Nišu, ali ga sem mašinskih, mogu koristiti i studenti drugih tehničkih fakulteta na kojima se izučava ova oblast.

Sem teorijskog izlaganja gradiva, posle svake oblasti dat je izvestan broj rešenih praktičnih primera sa komentarima koji treba da pomognu čitaocima u savladavanju materije.

Najsrdačnije se zahvaljujemo recenzentima prof. dr Draganu Milosavljeviću i prof. dr Srboljubu Simiću na korisnim predlozima i sugestijama što je doprinelo pojašnjavanju izvesnih pojmova i učinilo da se tekst približi čitaocima.

Zahvaljujemo se dr Dragici Milenković, red.prof. Mašinskog fakulteta u Nišu, koja je tekst pročitala i dala nam korisne primedbe.

Imajući u vidu neizbežne greške kojih u knjizi sigurno ima kao u svakom prvom izdanju, unapred se zahvaljujemo dobronamernim čitaocima koji će nam ukazati na njih kao i na sugestije i predloge za poboljšanje narednog izdanja.

Niš, 2018. god.

Autori

Sadržaj

U V O D	1
Istorijski razvoj	3
I Glava	5
OSNOVNI POJMOVI I ZAKONI DINAMIKE	
1.1 Osnovni zakoni dinamike	5
1.2 Fizičke veličine i jedinice mera	7
1.3 Njutnov zakon opšte gravitacije	8
1.4 Sila otpora sredine kroz koju se kreće materijalna tačka	10
II Glava	13
DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE	
2.1 Diferencijalne jednačine kretanja slobodne materijalne tačke	13
2.1.1 Diferencijalne jednačine kretanja u vektorskom obliku	13
2.1.2 Diferencijalne jednačine kretanja u Dekartovom koordinatnom sistemu	14
2.1.3 Diferencijalne jednačine kretanja slobodne materijalne tačke u polarnim koordinatama	15
2.1.4 Diferencijalne jednačine kretanja slobodne materijalne tačke u prirodnom trijedru	16
2.1.5 Diferencijalne jednačine kretanja slobodne materijalne tačke u generalisanom koordinatnom sistemu	17
2.2 Rešavanje zadataka dinamike materijalne tačke	17
2.2.1 Rešavanje prvog zadatka dinamike tačke	17
2.2.2 Rešavanje drugog zadatka dinamike tačke	18
2.3 Prvi i drugi integral diferencijalne jednačine kretanja	21
2.4 Pravolinijsko kretanje slobodne materijalne tačke	21
2.4.1 Postupak rešavanja zadataka	22
2.4.2 Sila je konstantna	23
2.4.3 Sila zavisi samo od vremena	26
2.4.4 Sila zavisi samo od položaja tačke	28
2.4.5 Sila zavisi samo od brzine	33
2.5 Krivolinijsko kretanje materijalne tačke	38
2.5.1 Kretanje teške tačke u vertikalnoj ravni	38

III Glava **51**

OPŠTI ZAKONI DINAMIKE MATERIJALNE TAČKE

3.1 Osnovne mere kretanja materijalne tačke	51
3.1.1 Količina kretanja, moment količine kretanja za nepokretni pol O i kinetička energija	51
3.2 Osnovne mere dejstva sile	53
3.2.1 Impuls sile	54
3.2.2 Rad sile	55
3.2.3 Snaga (efekt rada)	57
3.3 Zakon o promeni količine kretanja materijalne tačke	57
3.3.1 Zakon o održanju količine kretanja materijalne tačke	58
3.4 Zakon o promeni momenta količine kretanja materijalne tačke za nepokretni pol i nepokretnu osu	59
3.4.1 Zakon o održanju momenta količine kretanja materijalne tačke	60
3.5 Zakon o promeni kinetičke energije materijalne tačke	61

IV Glava **63**

KONZERVATIVNE SILE I ZAKON O ODRŽANJU MEHANIČKE ENERGIJE

4.1 Polje sile	63
4.2 Konzervativne sile	63
4.3 Rad konzervativne sile	64
4.4 Koši – Rimanovi uslovi	65
4.5 Određivanje funkcije sile	66
4.6 Integral energije. Zakon o održanju mehaničke energije	68
4.7 Primeri konzervativnih sila	69
4.7.1 Sila teže	69
4.7.2 Sila elastičnosti opruge	70
4.8 Lagranževe jednačine II vrste za materijalnu tačku	73

V Glava **77**

KRETANJE MATERIJALNE TAČKE POD DEJSTVOM CENTRALNE SILE

5.1 Centralna sila i diferencijalne jednačine kretanja pod dejstvom centralne sile	77
5.2 Bineova jednačina	79
5.3 Centralne sile koje zavise samo od rastojanja su konzervativne ...	80
5.4 Kretanje tačke pod dejstvom Njutnove gravitacione sile	82

VI Glava **91**

NESLOBODNO (PRINUDNO) KRETANJE MATERIJALNE TAČKE

6.1 Osnovna dinamička jednačina i opšti zakoni dinamike pri prinudnom kretanju materijalne tačke	91
6.2 Jednačine veza. Podela veza	92
6.3 Diferencijalne jednačine kretanja neslobodne materijalne tačke. Lagranževe jednačine prve vrste	93
6.3.1 Kretanje tačke po idealnoj nepokretnoj površi	93
6.3.2 Zakon o promeni kinetičke energije pri kretanju materijalne tačke po glatkoj površi	95
6.3.3 Kretanje materijalne tačke po glatkoj obrtnoj površi	96
6.3.4 Kretanje materijalne tačke po nepokretnoj glatkoj krivoj ...	98
6.3.5 Zakon o promeni kinetičke energije za kretanje tačke po glatkoj krivoj liniji	100
6.3.6 Diferencijalne jednačine neslobodnog kretanja materijalne tačke u prirodnom (Ojlerovom) koordinatnom sistemu	101
6.4 Kretanje materijalne tačke po realnoj vezi	102
6.4.1 Kretanje materijalne tačke po hrapavoj nepokretnoj površi	102
6.4.2 Kretanje materijalne tačke po hrapavoj nepokretnoj liniji	103
6.5 Rad sile trenja pri klizanju	104
6.6 Dalamberov princip za vezanu materijalnu tačku	104

VII Glava **119**

PRAVOLINIJSKE OSCILACIJE MATERIJALNE TAČKE

7.1 Oblici oscilatornih kretanja	119
7.2 Slobodne neprigušene oscilacije tačke	120
7.3 Prinudne neprigušene oscilacije tačke	123
7.3.1 Rezonancija	126
7.4 Slobodne prigušene oscilacije materijalne tačke	128
7.4.1 Slučaj slabog prigušenja, (pseudoperiodičko kretanje)	129
7.4.2 Slučaj jakog prigušenja, (aperiodičko kretanje)	131
7.4.3 Granično aperiodičko kretanje	133
7.4.4 Promena energije oscilatornog sistema	134
7.5 Prinudne prigušene oscilacije materijalne tačke	135

VIII Glava **141**

KRIVOLINIJSKE OSCILACIJE MATERIJALNE TAČKE

8.1 Cikloidno klatno	141
8.2 Matematičko klatno	144
8.2.1 Male oscilacije matematičkog klatna	149

IX Glava **151**

DINAMIKA RELATIVNOG KRETANJA MATERIJALNE TAČKE

9.1 Diferencijalna jednačina relativnog kretanja materijalne tačke	151
9.2 Zakon o promeni kinetičke energije materijalne tačke pri relativnom kretanju	153

X Glava **167**

DINAMIKA SISTEMA MATERIJALNIH TAČAKA

10.1 Podela sila koje dejstvuju na materijalni system	167
10.2 Neke osobine unutrašnjih sila	168
10.3 Masa i centar masa materijalnog sistema	169
10.3.1 Osobine centra masa materijalnog sistema	171
10.4 Momenti inercije materijalnog sistema	173
10.4.1 Hajgens-Štajnerove teoreme	176
10.4.2 Moment inercije za proizvoljnu osu kroz datu tačku	179
10.4.3 Elipsoid inercije	181
10.4.4 Osobine glavnih i glavnih centralnih osa inercije	183
10.4.5 Momenti inercije homogenih tela	186
10.4.5.1 Pravolinijski tanki štap	186
10.4.5.2 Kružni tanki obruč	187
10.4.5.3 Kružni tanki disk	188
10.4.5.4 Momenti inercije homogenih obrtnih tela	189
10.4.5.4.1 Momenti inercije homogenog valjka	190
10.4.5.4.2 Momenti inercije homogenog konusa	191
10.4.5.4.3 Momenti inercije homogene lopte	192

XI Glava **197**

OPŠTI ZAKONI DINAMIKE SISTEMA MATERIJALNIH TAČAKA

11.1 Diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema	197
11.2 Količina kretanja materijalnog sistema.....	198
11.3 Zakon o promeni količine kretanja materijalnog sistema	199
11.4 Zakon o održanju količine kretanja materijalnog sistema	200
11.5 Zakon o kretanju centra masa materijalnog sistema	201
11.6 Zakon o održanju kretanja centra masa materijalnog sistema	202
11.7 Moment količine kretanja materijalnog sistema	205
11.8 Zakon o promeni momenta količine kretanja materijalnog sistema za nepokretni pol	207
11.9 Zakon o održanju momenta količine kretanja materijalnog sistema za nepokretni pol	208
11.10 Rezalova teorema	210

11.11 Veza između momenta količine kretanja za nepokretni pol i momenta količine kretanja za centar mase materijalnog sistema	211
11.12 Zakon o promeni momenta količine kretanja materijalnog sistema za centar mase	213
11.13 Kinetička energija materijalnog sistema	215
11.14 Kenigova teorema	215
11.15 Zakon o promeni kinetičke energije materijalnog sistema	216
11.16 Rad unutrašnjih sila materijalnog sistema	217
11.17 Dinamika materijalne tačke promenljive mase	221
11.17.1 Jednačina Meščerskog	222
11.17.2 Formula Ciolkovskog	224
11.18 Dalamberov princip za materijalni system	232
XII Glava	235
DINAMIKA KRUTOG TELA	
12.1 Osnovi dinamike krutog tela	235
12.2 Rad sprega sila	237
12.3 Dinamika translatornog kretanja krutog tela	238
12.3.1 Diferencijalne jednačine translatornog kretanja krutog tela	238
12.3.2 Kinetička energija translatornog kretanja krutog tela	239
12.3.3 Rad sila pri translatornom kretanju krutog tela	239
XIII Glava	241
DINAMIKA OBRTANJA KRUTOG TELA OKO NEPOKRETNE OSE	
13.1 Diferencijalna jednačina obrtanja krutog tela oko nepokretne ose	241
13.2 Kinetička energija tela koje se obrće oko nepokretne ose	244
13.3 Rad sila pri obrtanju tela oko nepokretne ose	245
13.4 Dinamičke reakcije u ležištima pri obrtanju tela oko nepokretne ose	246
13.5 Uslovi dinamičke uravnoteženosti tela koje se obrće oko nepokretne ose	249
13.6 Fizičko klatno	252
XIV Glava	263
DINAMIKA RAVANSKOG KRETANJA KRUTOG TELA	
14.1 Diferencijalne jednačine ravanskog kretanja krutog tela	263
14.2 Kinetička energija tela koje vrši ravansko kretanje	265
14.3 Rad sila pri dejstvu na telo koje vrši ravansko kretanje	266
14.4 Kotrljanje tela po krutoj podlozi	267

14.4.1 Kotrljanje bez klizanja	268
14.4.2 Kotrljanje sa klizanjem	269
14.4.3 Uslov kotrljanja bez klizanja	270
14.4.4 Kotrljanje bez klizanja tela po deformabilnoj podlozi	270
14.5 Rad sile i sprega trenja pri kotrljanju	272

XV Glava **277**

DINAMIKA OBRTANJA KRUTOG TELA OKO NEPOKRETNE TAČKE

15.1 Diferencijalne jednačine obrtanja krutog tela oko nepokretne tačke	278
15.2 Kinetička energija krutog tela koje se obrće oko nepokretne tačke	281
15.3 Rad sila pri obrtanju tela oko nepokretne tačke	283
15.4 Ojlerov slučaj obrtanja krutog tela oko nepokretne tačke	283
15.4.1 Kruto telo ima osu materijalne simetrije	285
15.4.2 Opšti slučaj	287
15.5 Lagranžev slučaj obrtanja krutog tela oko nepokretne tačke	288
15.6 Približna teorija giroskopa	292
15.6.1 Osnovna formula približne teorije giroskopa	293
15.6.2 Uravnoteženi giroskop	294
15.6.3 Regularna precesija teškog giroskopa	295
15.6.4 Giroskop sa dva stepena slobode. Giroskopski efekt	296

XVI Glava **307**

DINAMIKA OPŠTEG KRETANJA KRUTOG TELA

16.1 Diferencijalne jednačine opšteg kretanja krutog tela	308
16.2 Kinetička energija tela koje vrši opšte kretanje	309
16.3 Rad sila pri opštem kretanju krutog tela	310
16.4 D'alamberov princip za kruto telo	311

XVII Glava **319**

ELEMENTI ANALITIČKE MEHANIKE

17.1 Veze materijalnog sistema	319
17.2 Generalisane koordinate materijalnog sistema	320
17.3 Virtualno pomeranje materijalnog sistema	321
17.4 Rad sila na virtualnom pomeranju.....	324
17.5 Idealne i realne veze	324
17.6 Generalisane sile	325
17.7 Lagranžev princip virtualnih pomeranja. Opšta jednačina statike	327

17.8 Lagranž-Dalamberov princip. Opšta jednačina dinamike	339
17.9 Lagranževe jednačine druge vrste	341
XVIII Glava	365
TEORIJA UDARA	
18.1 Definicija udara. Udarne sile i udarni impuls	365
18.2 Fizičke osnove udara	367
18.3 Udar materijalne tačke	369
18.3.1 Udar materijalne tačke o nepokretnu površ	369
18.3.1.1 Upravni udar materijalne tačke o nepokretnu površ...	370
18.3.1.2 Kosi udar materijalne tačke o nepokretnu površ	372
18.3.1.3 Gubitak kinetičke energije pri udaru materijalne tačke o nepokretnu površ	373
18.3.2 Udar materijalne tačke o pokretnu površ	374
18.4 Udar materijalnog sistema	375
18.4.1 Zakon o promeni količine kretanja materijalnog sistema pri udaru	375
18.4.2 Zakon o promeni momenta količine kretanja materijalnog sistema pri udaru	376
18.4.3 Gubitak kinetičke energije pri udaru materijalnog sistema	378
18.4.4 Lagranževe jednačine II vrste u teoriji udara materijalnog sistema	378
18.4.5 Upravan centralni sudar dva tela	380
18.4.6 Gubitak kinetičke energije pri upravnom centralnom sudar	383
18.5 Dejstvo udarnih impulsa na kruto telo	385
18.5.1 Dejstvo udarnih impulsa na kruto telo koje se obrće oko nepokretne ose. Centar udara	386
Literatura	405
Biografije autora	407



Dr Ratko G. Pavlović rođen je 19. oktobra 1950. godine u Studeni, kod Babušnice. Diplomirao je na Mašinskom fakultetu u Nišu 1974. godine, a nakon služenja vojnog roka zaposlio se u IGP “Tigar” u Pirotu. Od 1976. godine radi na Mašinskom fakultetu u Nišu.

Magistarski rad iz oblasti nelinearnih oscilacija plitkih cilindričnih ljuski odbranio je 1982. godine, a doktorirao je 1990. godine iz oblasti stabilnosti kontinualnih sistema od kompozitnih materijala pod dejstvom slučajne pobude. Za docenta na Mašinskom fakultetu u Nišu izabran je 1990., u zvanje vanrednog profesora 1995., a za redovnog profesora 2001. godine.

Tokom 1985. i 1989. godine bio je na naučnom usavršavanju u Poljskoj, na Varšavskoj Politehnici.

Služi se engleskim, ruskim i poljskim jezikom.

Objavio je veći broj radova u časopisima: Journal of Sound and Vibration, International Journal of Solids and Structures, European Journal of Mechanics A/Solids, Trans. ASME Journal of Applied Mechanics, International Journal of Mechanical Sciences, International Journal of Engineering Science, Composite Structures, Applied Mathematical Modelling, Probabilistic Engineering Mechanics, Mechanics Research Communications, Meccanica, Archive Applied Mechanics, Journal of Vibration and Control, Journal of Mechanics of Materials and Structures, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Mašinoznavstvo, Theoretical and Applied Mechanics i Facta Universitatis.

Recenzirao je radove u časopisima: International Journal of Solids and Structures, International Journal of Mechanical Sciences, Journal of Sound and Vibration, Meccanica, Nonlinear Dynamics i Facta Universitatis.

Izvodio je nastavu iz predmeta Mehanika I – Statika, Mehanika II – Kinematika i Mehanika III – Dinamika na osnovnim akademskim studijama, kao i nastavu na većem broju predmeta na posleddiplomskim i doktorskim studijama na Mašinskom fakultetu u Nišu.



Dr Goran B. Janevski rođen je 23. marta 1970. god. u Boru, gde je završio osnovnu i srednju školu. Diplomirao je na Mašinskom fakultetu u Nišu, smer Proizvodnog mašinstva, 1994. godine.

Od novembra 1994 godine radi na Mašinskom fakultetu u Nišu, u početku kao istraživač-saradnik, a od februara 1996. god. kao asistent-pripravnik na Katedri za Mehaniku. Nakon magistriranja na Mašinskom fakultetu, od 2003.god. radi kao asistent na predmetima Mehanika I (Statika), Mehanika II (Kinematika) i Mehanika III (Dinamika).

Doktorsku disertaciju je odbranio marta 2010.god. Oktobra iste godine je izabran u zvanje docenta na Mašinskom fakultetu u Nišu a oktobra 2015.godine za vanrednog profesora, u kom statusu je i danas angažovan na izvodjenju nastave kao nastavnik na predmetu Mehanika I – Statika, Mehanika II – Kinematika i Mehanika III – Dinamika.

Služi se engleskim jezikom.

Živi u Nišu, u porodici sa suprugom Jelenom i sinom Pavlom.



Dr Ivan R. Pavlović rođen je 02. novembra 1979. god. u Nišu. Na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Nišu je diplomirao 2003, a doktorirao 2014. godine.

Od 2006. godine je zapošljen na Mašinskom fakultetu u Nišu prvo kao istraživač-pripravnik, a zatim kao asistent na Katedri za Mehaniku. Maja 2017. godine je izabran u zvanje docenta na katedri za Mehaniku.

Angažovan je u nastavi na predmetima: Mehanika I – Statika, Mehanika II – Kinematika, Mehanika III – Dinamika, Tehnička fizika.

Učestvovao je na više nacionalnih i međunarodnih projekata i objavio je brojne naučne radove u vodećim domaćim i međunarodnim časopisima.

Oženjen je, otac dvoje dece. Živi u Nišu.