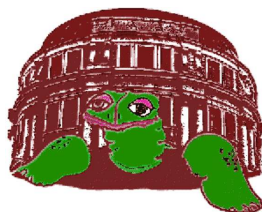


**Ratko G. Pavlović
Goran B. Janevski**

Mehanika II

Kinematika



Izdavačka jedinica
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu



Univerzitet u Nišu - Mašinski fakultet



Ratko G. Pavlović

Goran B. Janevski

Mehanika II – Kinematika

-drugo izdanje-

Niš, 2017.

Autori: dr Ratko G. Pavlović, redovni profesor Mašinskog fakulteta u Nišu
dr Goran B. Janevski, docent Mašinskog fakulteta u Nišu

Mehanika II – Kinematika

-drugo izdanje-

Recenzenti: akademik Teodor Atanacković,
red. prof. Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu
dr Zoran Golubović,
red. prof. Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

Lektor: Irena Stamenković, dipl.filolog, profesor srpskog jezika i književnosti

Recenzije su usvojene odlukom Nastavno-naučnog veća Mašinskog fakulteta u Nišu br. 612-85-5/2013 od 18. januara 2013.god. Odobreno za štampu odlukom Nastavno-naučnog veća Mašinskog fakulteta u Nišu br. 612-85-5-1/2013 od 18. januara 2013.god.

Izdavač: Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu,
Aleksandra Medvedova 14, 18000 Niš.

ISBN: **978-86-6055-033-2**

Tiraž: 200 primeraka

Štampa: SD Press, Cvijićeva 7/25, 13001 Smederevo.

CIP-Katalogizacija u publikaciji
Narodna Biblioteka Srbije, Beograd.

531.1(075.8)
ПАВЛОВИЋ, Ратко Г., 1950-
Mehanika 2 : kinematika / Ratko G. Pavlović, Goran B. Janevski. - 2.
izd. - Niš : Mašinski fakultet Univerziteta, 2017 (Smederevo : SD Press). -
311 str. : ilustr. ; 24 cm
Slike autora. - Tiraž 200. - Beleška o autorima: str. [313-314]. -
Bibliografija: str. [312].
ISBN 978-86-6055-033-2
1. Јаневски, Горан Б., 1970- [аутор]
а) Кинематика
COBISS.SR-ID 248328972

Predgovor drugom izdanju

U drugom izdanju ispravljene su uočene greške i poboljšana je kvaliteta slika. Autori se ovom prilikom zahvaljuju studentima Mašinskog fakulteta u Nišu na korisnim sugestijama.

Niš, novembra 2017. godine

Autori

Predgovor

Ovaj udžbenik predstavlja unekoliko prerađena i mestimično dopunjena predavanja iz Mehanike II - Kinematike koja držimo studentima druge godine osnovnih akademskih studija Mašinskog fakulteta u Nišu. Napisan je prema programu ovog predmeta koji je usvojen u procesu akreditacije fakulteta.

Pri izlaganju materije zadržali smo se na klasičnoj podeli kinematike. U prvom delu proučeni su zakoni kinematike tačke, a u drugom delu zakoni kinematike tela.

S obzirom da studenti tehnike treba da ovladaju pored teorijskog znanja iz kinematike i njenom primenom na konkretne tehničke probleme, posle svakog poglavlja dat je izvestan broj rešenih zadataka sa komentarima čime se omogućuje studentima lakše savladavanje materije.

Zahvaljujemo se recenzentima, akademiku Teodoru Atanackoviću i profesoru Zoranu Goluboviću, na korisnim predlozima i sugestijama što je doprinelo pojašnjavanju mnogih pojmova i učinilo da se, sa pedagoške tačke gledišta, tekst još bolje približi čitaocu.

Tekst je pročitala i korigovala Irena Stamenković, dipl. filolog, na čemu joj se srdačno zahvaljujemo.

Tekst je pažljivo pregledan, ali imajući u vidu da se radi o prvom izdanju, verovatno se potkrao izvestan broj grešaka. Unapred se zahvaljujemo svima onima koji će nam svojim primedbama i savetima pomoći da se eventualni nedostaci udžbenika otklone prilikom narednog izdanja. Mogu nam se obratiti lično ili putem elektronske pošte na e-mail gocky.jane@gmail.com.

Niš, februara 2013. godine

Autori

Sadržaj

UVOD	1
-------------	----------

I GLAVA	
KINEMATIKA TAČKE	3

1.1	Vektorski postupak određivanja položaja pokretne tačke u prostoru...	3
1.2	Koordinatni postupak određivanja položaja pokretne tačke u prostoru	4
1.2.1	Dekartove pravougle koordinate	4
1.2.2	Polarno-cilindrične i polarne koordinate	6
1.2.3	Generalisane koordinate	8
1.3	Prirodni postupak određivanja položaja pokretne tačke u prostoru	13
1.4	Brzina i ubrzanje tačke	16
1.4.1	Brzina i ubrzanje pri vektorskom postupku određivanja kretanja	16
1.4.1.1	Vektor brzine tačke	16
1.4.1.2	Hodograf vektora brzine tačke	17
1.4.1.3	Vektor ubrzanja tačke	18
1.4.2	Brzina i ubrzanje pri koordinatnom postupku određivanja kretanja	20
1.4.2.1	Određivanje brzine i ubrzanja tačke u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu	20
1.4.2.2	Određivanje brzine i ubrzanja tačke u polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu	25
1.4.2.3	Određivanje brzine i ubrzanja tačke u generalisanom koordinatnom sistemu	30
1.4.2.4	Određivanje brzine i ubrzanja tačke u sfernom koordinatnom sistemu	33

1.4.3	Brzina i ubrzanje pri prirodnom postupku određivanja položaja tačke u prostoru	38
1.4.4	Posebni slučajevi kretanja tačke prema normalnom i tangencijalnom ubrzanju tačke	46
1.4.4.1	Pravolinijsko kretanje tačke	46
1.4.4.2	Krivolinijsko kretanje tačke	48
1.4.4.3	Kružno kretanje tačke	49
1.4.4.4	Harmonijsko oscilatorno kretanje	52
1.4.5	Sektorska brzina i sektorsko ubrzanje tačke	55
1.5	Primeri – kinematika tačke	59

II GLAVA

KINEMATIKA KRUTOG TELA **85**

2.1	Translatorno kretanje krutog tela	89
2.2	Obrtanje krutog tela oko nepokretne ose	91
2.2.1	Ugaona brzina i ugaono ubrzanje tela koje se obrće oko nepokretne ose	92
2.2.2	Posebni slučajevi obrtanja krutog tela oko nepokretne ose	95
2.2.3	Brzina i ubrzanje tačke tela koje se obrće oko nepokretne ose	96
2.2.4	Transmisioni uređaji	100
2.2.5	Primeri – obrtanje tela oko nepomične ose	106
2.3	Ravansko kretanje krutog tela	115
2.3.1	Razlaganje ravanskog kretanja krutog tela na translatorno i obrtno kretanje	118
2.3.2	Brzina tačke tela koje vrši ravansko kretanje	119
2.3.3	Teorema o projekcijama vektora brzina tačaka tela ravne figure	121
2.3.4	Trenutni pol brzina ravne figure	124
2.3.5	Određivanje brzine tačaka ravne figure pomoću trenutnog pola brzina	125
2.3.6	Posebni slučajevi određivanja trenutnog pola brzina	128
2.3.6.1	Poznat je vektor brzine jedne tačke i ugaona brzina ravne figure	128
2.3.6.2	Poznati su vektori brzina dveju tačaka koji su paraleni i upravni na duž koja spaja te tačke	129

2.3.6.3	Poznati su vektori brzina dveju tačaka paralelnih pravaca koji nisu upravni na duž koja spaja te tačke	131
2.3.6.4	Ravna figura se kotrlja bez klizanja po površini drugog tela	132
2.3.7	Trenutni pol brzina ravne figure – analitički izraz	133
2.3.8	Ubrzanje tačke tela koje vrši ravansko kretanje	135
2.3.9	Trenutni pol ubrzanja ravne figure	138
2.3.10	Određivanje ubrzanja tačaka ravne figure	140
2.3.11	Posebni slučajevi određivanja trenutnog pola ubrzanja	141
2.3.11.1	Poznat je vektor ubrzanja jedne tačke, ugaona brzina $\omega \neq 0$, a ugaono ubrzanje $\varepsilon = 0$	142
2.3.11.2	Poznat je vektor ubrzanja jedne tačke, ugaona brzina $\omega = 0$, a ugaono ubrzanje $\varepsilon \neq 0$	142
2.3.11.3	Poznat je vektor ubrzanja jedne tačke, a ugaona brzina $\omega = 0$ i ugaono ubrzanje $\varepsilon = 0$	143
2.3.11.4	Poznati su vektori ubrzanja dveju tačaka koje su različitih pravaca i intenziteta	144
2.3.11.5	Poznati su vektori ubrzanja dveju tačaka, paralelnih pravaca	145
2.3.11.6	Kotrljanje bez klizanja ravne figure	146
2.3.12	Analitički postupak određivanja trenutnog pola ubrzanja ravne figure	149
2.3.13	Bernuli-Šalova teorema o centru obrtanja za konačno pomeranje ravne figure	150
2.3.14	Centroide	152
2.3.14.1	Kardanov direktni problem	155
2.3.14.2	Kardanov inverzni problem	157
2.3.15	Rulete	159
2.3.15.1	Cikloida	161
2.3.15.2	Evolventa kružnice	162
2.3.15.3	Epicikloida	163
2.3.15.4	Hipocikloida	166
2.3.16	Primeri – ravansko kretanje krutog tela	169
2.4	Obrtanje krutog tela oko nepokretne tačke	197
2.4.1	Ojler-Dalamberova teorema	202

2.4.2	Vektor trenutne ugaone brzine	204
2.4.3	Ojlerove kinematičke jednačine	205
2.4.4	Vektor trenutnog ugaonog ubrzanja	208
2.4.5	Projekcije vektora trenutnog ugaonog ubrzanja na ose nepokretnog i pokretnog koordinatnog sistema	210
2.4.6	Brzina tačke tela koje vrši sferno kretanje	212
2.4.7	Ubrzanje tačke tela koje se obrće oko nepokretne tačke	214
2.4.8	Projekcije vektora ubrzanja na ose nepokretnog i pokretnog Dekartovog koordinatnog sistema	216
2.4.9	Jednačina trenutne ose obrtanja. Aksoidi. Poasonova teorema ...	218
2.4.10	Regularna precesija	220
2.4.11	Primeri – obrtanje krutog tela oko nepokretne tačke	225
2.5	Opšte kretanje krutog tela	239
2.5.1	Brzina tačke tela koje vrši opšte kretanje	240
2.5.2	Ubrzanje tačke tela koje vrši opšte kretanje	242
2.5.3	Nezavisnost vektora trenutne ugaone brzine i trenutnog ugaonog ubrzanja tela koje vrši opšte kretanje od izbora pola translacije	243
2.5.4	Trenutna zavojna osa i trenutno zavojno kretanje.....	245

III GLAVA

SLOŽENO KRETANJE **251**

3.1	Složeno kretanje tačke	251
3.1.1	Apsolutna brzina tačke	252
3.1.2	Apsolutno ubrzanje tačke	255
3.2	Primeri – složeno kretanje tačke.....	258
3.3	Složeno kretanje tela	287
3.3.1	Slaganje translatornih kretanja krutog tela	287
3.3.2	Slaganje obrtanja krutog tela oko osa koje se seku	288
3.3.3	Slaganje obrtanja krutog tela oko paralelnih osa	291
3.3.3.1	Obrtanje tela oko paralelnih osa u istom smeru	291
3.3.3.2	Obrtanje tela oko paralelnih osa u suprotnim smerovima	294
3.3.3.3	Obrtanje tela oko paralelnih osa, ugaonim brzinama istog intenziteta a suprotnih smerova. Kinematički spreg	296

3.3.4	Slaganje obrtanja krutog tela oko ukrštenih osa	298
3.3.5	Translatorno i obrtno kretanje krutog tela	300
3.3.5.1	Brzina translatornog kretanja je upravna na obrtnu osu	300
3.3.5.2	Brzina translatornog kretanja je kolinearna sa osom obrtanja	302
3.3.5.3	Brzina translantornog kretanja i ugaona brzina grade proizvoljan ugao	303



Dr Ratko G. Pavlović rođen je 19. oktobra 1950. godine u Studeni, kod Babušnice. Diplomirao je na Mašinskom fakultetu u Nišu 1974. godine, a nakon služenja vojnog roka zaposlio se u IGP "Tigar" u Pirotu. Od 1976. godine radi na Mašinskom fakultetu u Nišu.

Magistarski rad iz oblasti nelinearnih oscilacija plitkih cilindričnih ljuski odbranio je 1982. godine, a doktorirao je 1990. godine iz oblasti stabilnosti kontinualnih sistema od kompozitnih materijala pod dejstvom slučajne pobude. Za docenta na Mašinskom fakultetu u Nišu izabran je 1990., u zvanje vanrednog profesora 1995., a za redovnog profesora 2001. godine.

Tokom 1985. i 1989. godine bio je na naučnom usavršavanju u Poljskoj, na Varšavskoj Politehnici.

Služi se engleskim, ruskim i poljskim jezikom.

Objavio je veći broj radova u časopisima: Journal of Sound and Vibration, International Journal of Solids and Structures, European Journal of Mechanics A/Solids, Trans. ASME Journal of Applied Mechanics, International Journal of Mechanical Sciences, Probabilistic Engineering Mechanics, Mechanics Research Communications, Meccanica, Archive Applied Mechanics, Journal of Vibration and Control, Journal of Mechanics of Materials and Structures, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Mašinoznavstvo, Theoretical and Applied Mechanics i Facta Universitatis.

Recenzirao je radove u časopisima: International Journal of Solids and Structures, International Journal of Mechanical Sciences, Nonlinear Dynamics i Facta Universitatis.

Izvodio je nastavu iz predmeta Mehanika I – Statika, Mehanika II – Kinematika i Mehanika III – Dinamika na osnovnim akademskim studijama, kao i nastavu na većem broju predmeta na posleddiplomskim i doktorskim studijama na Mašinskom fakultetu u Nišu.



Dr Goran B. Janevski rođen je 23. marta 1970. god. u Boru, gde je završio osnovnu i srednju školu. Diplomirao je na Mašinskom fakultetu u Nišu, smer Proizvodnog mašinstva, 1994. godine.

Od novembra 1994 godine radi na Mašinskom fakultetu u Nišu, u početku kao istraživač-saradnik, a od februara 1996. god. kao asistent-pripravnik na Katedri za Mehaniku. Nakon magistriranja na Mašinskom fakultetu, od 2003.god. radi kao asistent na predmetima Mehanika I (Statika), Mehanika II (Kinematika) i Mehanika III (Dinamika).

Doktorsku disertaciju je odbranio marta 2010.god. Oktobra iste godine je izabran u zvanje docenta na Mašinskom fakultetu u Nišu a oktobra 2015.godine za vanrednog profesora, u kom statusu je i danas angažovan na izvodjenju nastave kao nastavnik na predmetu Mehanika I – Statika, Mehanika II – Kinematika i Mehanika III – Dinamika.

Služi se engleskim jezikom.

Živi u Nišu, u porodici sa suprugom Jelenom i sinom Pavlom.