

Predrag M. Rajković
Slađana D. Marinković
Miomir S. Stanković

DIFERENCIJALNO-INTEGRALNI
RAČUN BAZIČNIH
HIPERGEOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu



Niš, 2008.

dr Predrag Rajković
dr Slađana Marinković
dr Miomir Stanković

**DIFERENCIJALNO–INTEGRALNI
RAČUN BAZIČNIH
HIPERGEOMETRIJSKIH FUNKCIJA**

Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu



Niš, 2008.

dr **Predrag Rajković**, vanredni profesor Mašinskog fakulteta u Nišu
dr **Slađana Marinković**, docent Elektronskog fakulteta u Nišu
dr **Miomir Stanković**, redovni profesor Fakulteta zaštite na radu u Nišu

DIFERENCIJALNO–INTEGRALNI RAČUN BAZIČNIH HIPERGEOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Izdavač: Mašinski fakultet u Nišu
Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš

Rezenzenti: dr **Zoran Rakić**, vanredni profesor
Matematičkog fakulteta u Beogradu;
dr **Predrag Stanimirović**, redovni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu;
dr **Ljubica Velimirović**, redovni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu.

Odlukom Nastavno–Naučnog veća Mašinskog fakulteta u Nišu
br. 612-847-5/2008 od 5. septembra 2008. godine, ovaj rukopis
je odobren za štampu kao monografija.

ISBN 978-86-80587-86-8

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS
OF BASIC HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

Mathematical Subject Classification:

33D15, 33D60, 33D45, 33C45, 39A13, 11B65, 26D15, 26A33, 30C15, 41A30

Tiraž: 300 primeraka

Štampa: "M COPS CENTAR", Niš

Sadržaj

1	OSNOVE q-RAČUNA	1
1.1	Osnovni algebarski pojmovi q -računa	1
1.2	Analogoni binomne teoreme	8
1.3	Identiteti proistekli iz q -binomne teoreme	11
1.4	Bazične hipergeometrijske funkcije	13
1.5	Analogoni gama i beta funkcije	17
1.6	Analogoni elementarnih funkcija	18
2	q-HIPERGEOMETRIJSKA SUMIRANJA I PARTICIJE	27
2.1	Hipergeometrijski član	27
2.2	Gosperovi algoritmi	29
2.3	Zeilbergerovi algoritmi	33
2.4	Specijalni q -brojevi	37
2.4.1	q -Fibonaccijski brojevi	38
2.4.2	q -Catalanovi brojevi	39
2.4.3	q -Galoisovi brojevi	40
2.4.4	q -Stirlingovi brojevi	40
2.4.5	q -Bernoullijevi brojevi	41
2.4.6	q -Eulerovi brojevi	42
2.5	Vandermondove determinante sa q -brojevima	43
2.6	Celobrojne particije	45
2.7	Ravanske particije	47
2.8	Prekrivanja	49
2.8.1	Linearna težinska prekrivanja	50
2.8.2	Dvodimeziona težinska prekrivanja	51
3	ELEMENTI q-DIFERENCIJALNO-INTEGRALNOG RAČUNA	55
3.1	O q -izvodima i q -diferencijabilnosti	55

3.2	O q -integralima	63
3.3	Tablica q -izvoda i q -integrala	68
4	TEOREME O SREDNJOJ VREDNOSTI U q-RAČUNU	69
4.1	Ekstremne vrednosti i q -izvodi	69
4.2	Teoreme o srednjoj vrednosti funkcija	72
4.3	Teoreme o srednjoj vrednosti q -integrala	74
4.4	O q -Taylorovoj formuli	76
4.5	O q -Taylorovoj formuli za funkcije više promenljivih	81
5	NEJEDNAKOSTI U q-RAČUNU	83
5.1	Neki novi pristupi q -integralima	83
5.2	Nejednakosti za q -integrale	85
6	q-DIFERENCNE JEDNAČINE	103
6.1	q -Holonomične funkcije	103
6.2	Operacije sa q -holonomičnim funkcijama	108
6.3	Preciznost algoritma	116
6.4	q -Taylorova formula za q -holonomične funkcije	120
6.5	Metodi za rešavanje q -diferencnih jednačina	121
7	ORTOGONALNI POLINOMI U q-RAČUNU	125
7.1	q -Ortogonalni polinomi	125
7.2	q -Hahnova klasa polinoma	126
7.3	Ortogonalnost q -Hahnove klase polinoma	128
7.4	q -Rodriguesova formula	130
7.5	Najvažniji nizovi q -Hahnovih polinoma	131
7.5.1	Vrste q -Jacobijevih polinoma	132
7.5.2	Vrste q -Laguerreovih polinoma	135
7.5.3	Vrste diskretnih q -Hermiteovih polinoma	141
7.5.4	Vrste Al-Salam-Carlitzovih polinoma	143
7.6	q -Ortogonalni polinomi na kolekciji intervala	146
7.7	q -Ortogonalni polinomi sa malom q -Jacobievom težinom na kolekciji intervala	153
7.8	q -Ortogonalni polinomi sa q -Laguerreovim težinama na kolekciji intervala	159

8	FRAKCIONI q-RAČUN I q-TRANSFORMACIJE	171
8.1	Osnovni pojmovi frakcionog računa i veza sa q -računom	171
8.2	Frakcioni q -integral	176
8.3	Frakcioni q -izvod Riemann–Liouvilleovog tipa	180
8.4	Frakcioni q -izvod Caputovog tipa	182
8.5	Frakcioni q -račun elementarnih funkcija	184
8.6	Veze između frakcionih q -operatora	189
8.7	Frakciona q -Leibnizova formula	194
8.8	Frakciona q -Taylorova formula	197
8.9	q -Mittag–Lefflerova funkcija	199
8.10	q -Integralne transformacije	207
8.10.1	q -Mellinova transformacija	207
8.10.2	q -Laplaceova transformacija	209
8.10.3	q -Fourierova transformacija	211
8.10.4	q -Hankelova transformacija	212
9	q-RAČUN I NUMERIČKA MATEMATIKA	215
9.1	Analiza konvergencije iterativnih procesa primenom q -izvoda	215
9.2	O q -Newtonovom metodu	218
9.3	Metodi višeg reda	220
9.4	O q -Newton–Kantorovichevom metodu	222
9.5	Primena q -metoda na rešavanje nelinearnih jednačina i sistema jednačina	233
9.6	$\mathcal{Z}$ -transformacija i q -ortogonalni polinomi	241
10	PRIMENE q-RAČUNA U DRUGIM NAUKAMA	249
10.1	Nekomutativni prostori	249
10.2	q -Račun u kvantnim sistemima	253
10.3	Statistička mehanika zasnovana na q -algebri	256
10.3.1	Tsallisova statistička mehanika	257
10.3.2	Bazično–deformisana statistička mehanika	259
10.4	q -Deformisani oscilatori	263
10.5	p -Adični i q -račun	264
10.5.1	p -Adična norma	265
10.5.2	p -Adična algebra i analiza	267
10.5.3	p -Adični i q -integral	269
	LITERATURA	273

OZNAKE

ZNAČENJA

$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva
$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbb{C}$	skup kompleksnih brojeva
i	imaginarna jedinica
$\operatorname{Re}(z)$	realni deo kompleksnog broja z
$\operatorname{Im}(z)$	imaginarni deo kompleksnog broja z
$[a]$	najmanji celi deo
$(a)_m$	Pochhammerov simbol
$[a]_q$	q -broj a
$(a; q)_n$	q -pomereni faktorijel reda n
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	q -binomni koeficijent
δ_{mn}	Kroneckerov simbol
$\Gamma_q(x)$	q -Gamma funkcija
$B_q(x, y)$	q -Beta funkcija
$e_q(z)$	q -eksponencijalna funkcija
$\operatorname{Ln}_q(x)$	q -logaritamska funkcija
$\sin_q(z)$	q -sinusna funkcija
$\cos_q(z)$	q -kosinusna funkcija
${}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle z \right)$	hipergeometrijska funkcija
${}_r\Phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle q; z \right)$	bazična hipergeometrijska funkcija
$F_n(x; q)$	q -Fibonaccijevi polinomi
$D_q^n f(x)$	q -izvod funkcije $f(x)$ reda n
$\int_a^b f(x) d_q x$	q -integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$
$[\cdot, \cdot], (\cdot, \cdot), \langle \cdot, \cdot \rangle$	skalarni proizvodi funkcija
$P_n(x; a, b, c; q)$	veliki q -Jacobijev polinom
$L_n^{(\alpha)}(x; q)$	q -Laguerreov polinom
$h_n(x; q)$	diskretni q -Hermiteov polinom prve vrste
$(I_{q,a}^\alpha f)(x)$	frakcioni q -integral reda α funkcije $f(x)$ na $[a, b]$
$(D_{q,a}^\alpha f)(x)$	Riemann–Liouvilleov frakcioni q -izvod reda α
$(\star D_{q,a}^\alpha f)(x)$	Caputov frakcioni q -izvod reda α
$E_{q;\alpha,\beta}(x; c)$	velika q -Mittag–Lefflerova funkcija
$\mathcal{M}_q[f(t)](s)$	q -Mellinova transformacija
$\mathcal{L}_q[f](s)$	q -Laplaceova transformacija
$\mathcal{F}_{\gamma,q}[f(t)](s)$	q -Fourierova transformacija
$H_\alpha(f)(s)$	q -Hankelova transformacija
$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}$ -transformacija

PREDGOVOR

Ova knjiga je nastala nakon skoro desetogodišnjeg istraživačkog rada autora i predstavlja pokušaj sistematizacije objavljenih naučnih rezultata iz oblasti računa bazičnih hipergeometrijskih funkcija (skraćeno, q -računa). Ona može biti od koristi, ne samo matematičarima koji se bave specijalnim funkcijama, kombinatorikom ili numeričkom matematikom, već i širem krugu čitalaca za upoznavanje sa atraktivnim i veoma aktuelnim matematičkim sadržajem.

Sa razvojem moderne nauke, kada su potrebe za matematičkim modelima raznih mikro i makro prostora sve veće, klasična matematika više nije dovoljno širok okvir za opisivanje fizičke realnosti. U prirodi postoje mnogi difuzioni i fenomeni u sistemima, kao što su, na primer, magnetni i gravitacioni, koji se ne mogu opisati konvencionalnim matematičkim pristupom. Takođe, na sisteme sa diskretnom dilatacionom simetrijom, odnosno sa fraktalnom i multifraktalnom prirodom ne može se dovoljno dobro primeniti klasični diferencijalni i integralni račun. Skorašnja istraživanja su pokazala da je matematička analiza zasnovana na bazičnim hipergeometrijskim funkcijama prirodno proširenje klasične i prigodan alat za tumačenje ovakvih sistema.

Proučavanje bazičnih hipergeometrijskih funkcija, ili q -hipergeometrijskih funkcija, započelo je još sredinom osamnaestog veka, kada je Euler 1748. godine posmatrao jedan beskonačan proizvod kao funkciju generatrisu za niz particija prirodnog broja. Ipak, svi rezultati koji se sada svrstavaju u ovu oblast ostvareni tih godina od strane Cauchyja, Gaussa i drugih poznatih matematičara bili su sporadični i nepovezani. Nemački matematičar Heine je 1846. godine formirao novu klasu funkcija uvodeći bazu q , tako da se u graničnom slučaju svode na Gaussove hipergeometrijske funkcije.

Poslednjih godina XIX i početkom XX veka L.J. Rogers i S.A. Ramanujan su dokazali čudesne identitete sa beskonačnim sumama i proizvodima kojima je bio zadivljen ne samo matematički svet toga doba. U isto vreme, ali nezavisno od njih, F.H. Jackson se upustio u razvoj novog matematičkog aparata, zasnovanog na uvođenju analogona objekata diferencijalnog i integralnog računa u onom smislu koji povezuje klasične i bazične hipergeomet-

rijske funkcije. Pojava q -diferenciranja i q -integracije, kao i q -analogona ostalih pojmova standardnog kalkulusa omogućila je razvoj teorije bazičnih hipergeometrijskih funkcija na mnogo sistematičniji način nego do tada, kao i njihovu primenu u sasvim novim oblastima. Tako, sredinom dvadesetog veka W. Hahn je, proučavanjem q -diferencijalnog i q -integralnog računa došao i do q -analogona nekih integralnih transformacija, kao što je Laplaceova transformacija, koja je primenjena za rešavanje q -diferencnih jednačina.

Tako se oblikovala nova matematička teorija, koja ima svoje definicije pojma broja, elementarnih funkcija, izvoda i integrala, specijalnih funkcija i transformacija, za koju se u literaturi najčešće koristi termin *račun bazičnih hipergeometrijskih funkcija* ili, skraćeno, *q -račun*.

Prilikom pripreme ove knjige, autori su proučili veći broj monografija i nekoliko stotina radova poznatih istraživača u ovoj naučnoj oblasti.

Knjiga je podeljena na deset glava.

U prvoj glavi predstavljeni su osnovni elementi ovog računa, kao što su q -brojevi, q -faktorijski, q -binomni koeficijenti i bazične hipergeometrijske funkcije. Preko ovih hipergeometrijskih funkcija predstavljeni su i analogoni nekih elementarnih funkcija u bazičnom računu, kao što su q -eksponencijalne, q -trigonometrijske, q -hiperboličke funkcije, zatim specijalnih funkcija, kao što su q -gama, q -beta funkcija, q -Besselove funkcije, itd.

O čvrstim vezama između kombinatorike i q -računa govori se u drugoj glavi. Dat je pregled poznatih klasa specijalnih q -brojeva i ukazano na njihovo pojavljivanje u prekrivanjima euklidskih prostora. Proučeni su algoritmi za dokazivanje identiteta u ovom računu.

U trećoj glavi uvedeni su q -diferencijalni i q -integralni operatori i date njihove osnovne osobine. Kao nastavak, u četvrtoj glavi obrađeni su q -analogoni nekih fundamentalnih teorema diferencijalnog i integralnog računa, dok su u sledećoj dati novi pristupi q -integralima i q -integralnim nejednakostima.

Šesta glava posvećena je jednačinama u kojima učestvuju q -izvodi. Posebno su obrađene q -holonomične jednačine, tj. jednačine sa polinomijalnim koeficijentima, a zatim predloženi neki metodi za rešavanje kako holonomičnih, tako i opštijih q -diferencnih jednačina.

U sedmoj glavi se ukazuje na činjenicu da je najopštiji način opisivanja ortogonalnih polinoma preko hipergeometrijskih i q -hipergeometrijskih funkcija. Ovo dovodi do novih klasifikacija ortogonalnih polinoma, predstavljenih Askeyevom i q -Askeyevom shemom. Polazeći od q -diferencne jednačine Sturm-Liouvilleovog tipa, izvedena je q -Rodriguesova formula za q -Hahnove polinome, čije različite klase predstavljaju analogije klasa klasičnih ortogonalnih polinoma. Posle upoznavanja sa osnovnim osobinama nekih klasa polinoma,

kao što su vrste q -Jacobićevih, q -Laguerreovih, diskretnih q -Hermiteovih, Al-Salam-Carlitzovih polinoma, uvedene su neke klase polinoma ortogonalnih na kolekciji intervala u kompleksnoj ravni u odnosu na skalarne proizvode definisane preko q -integrala.

U osmoj glavi uvedeni su q -integralni i q -diferencijalni operatori proizvoljnog reda sa promenljivom donjom granicom integracije i proučena njihova osnovna svojstva, kao i frakcione formule Taylorovog i Leibnizovog tipa. Data je i q -analogija poznate Mittag-Lefflerove funkcije. Konačno, predstavljene su i najznačajnije q -integralne transformacije, kao analogije Mellinove, Fourierove, Laplaceove i Hankelove transformacije.

U devetoj glavi su sličnosti i razlike standardnog diferencijalnog i integralnog računa sa q -računom iskorišćene za formiranje originalnih metoda u numeričkoj matematici. Tako, primenom q -izvoda funkcija, koji ne podrazumeva granični proces, izvedeni su metodi za rešavanje nelinearnih jednačina i sistema nelinearnih jednačina. Takvi metodi mogu biti od značaja pri radu sa funkcijama koje nisu diferencijabilne, za koje mnogi od poznatih metoda ne daju rezultate.

U desetoj glavi problematika q -računa osvetljena je sa stanovišta geometrije nekomutativnih prostora, kvantne mehanike i fizike, statističke mehanike, teorije oscilatora i p -adične analize.

Ovom prilikom autori se zahvaljuju recenzentima dr Zoranu Rakiću, dr Ljubici Velimirović i dr Predragu Stanimiroviću na pažljivom čitanju rukopisa i pruženoj podršci pri izdavanju knjige.

Kako je ovo prvo izdanje, verovatno postoje propusti i greške. Stoga se autori unapred izvinjavaju čitaocima i mole ih za razumevanje.

U citiranim radovima se može naći veliki broj hipoteza koje čekaju na odgovore. Autori se nadaju da će ova knjiga zainteresovati mlade istraživače da se upuste u izučavanje i primenu q -računa.

U Nišu,
septembra, 2008. g.

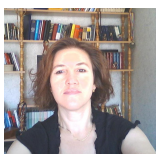
Autori

Dr Predrag Rajković
Dr Slađana Marinković
Dr Miomir Stanković

AUTORI:



Predrag M. Rajković, doktor matematičkih nauka, vanredni profesor Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu, rođen je 9. juna 1959. godine u Velikoj Plani kod Prokuplja. Godine 1983. diplomirao je na Filozofskom fakultetu u Nišu, na Grupi za matematiku. Na istom fakultetu, 1991. godine odbranio je magistarsku tezu, a 1998. doktorsku disertaciju. U svojim naučnim radovima se bavi specijalnim funkcijama, numeričkom analizom i njihovim primenama u drugim naukama. Predavao je matematiku, programiranje i kompjutersku grafiku. Sa suprugom Snežanom ima troje dece Kostadina, Jovana i Mirjanu.



Slađana D. Marinković, doktor matematičkih nauka, docent Elektronskog fakulteta Univerziteta u Nišu, rođena je 9. juna 1963. godine u Prizrenu. Na Grupi za matematiku Filozofskog fakulteta u Nišu diplomirala je 1986. godine. Magistarsku tezu odbranila je 1995., a doktorsku disertaciju 2005. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu. Profesionalna interesovanja vezana su za oblast specijalnih funkcija i transformacija, a lična uglavnom za ćerku Danicu, sina Lazara i supruga Mirka.



Miomir S. Stanković, doktor matematičkih nauka, je redovni profesor Fakulteta zaštite na radu Univerziteta u Nišu. Povezujući matematiku sa drugim naukama ostvario je vrlo obiman i širok naučni opus u kojem centralno mesto zauzimaju specijalne funkcije, integralne i diskretne transformacije i njihove prieme. Posebnu oblast istraživanja predstavljaju neuronske mreže i teorija rizika. Ostvario je plodnu saradnju sa mnogim, a posebno mladim istraživačima.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517.588

РАЈКОВИЋ, Предраг М., 1959-

Diferencijalno–integralni račun bazičnih
hipergeometrijskih funkcija / Predrag M. Rajković,
Slađana D. Marinković, Miomir S. Stanković. – Niš:
Mašinski fakultet, 2008 (Niš: M COPS CENTAR). – VII,
287 str.: ilustr.; 24cm

U kolofonu: Differential and Integral Calculus of Basic
Hypergeometric Functions. –
Slike autora. - Tiraž 300. – Autori: str. [289]. -
Bibliografija: str. 273–287.

ISBN – 978-86-80587-86-8

1. Маринковић, Слађана Д. [аутор], 1963- 2.
Станковић, Миомир С. [аутор]
а) Хипергеометријске функције
COBISS.SR – ID 151307020

$$\begin{aligned}x &= R \cos_q((1-q)t) \;, \\ y &= R \sin_q((1-q)t) \;, \\ 0 &\leq t \leq 2\pi \;.\end{aligned}$$

