



МАТЕМАТИКА 1

МАТЕМАТИКА 1
*одабрани задаци и ђроблеми
са ђреїледом ђеорије и ђрименама*

Д. Ракић
М. Љубеновић
Љ. Радовић



*Драїан Ракић
Марїин Љубеновић
Љиљана Радовић*

*Драїан Ракић
Марџин Љубеновић
Љиљана Радовић*

МАТЕМАТИКА 1

***одабрани задаци и љроблеми
са љреїледом љеорије и љрименама***

Машински факултет
Универзитет у Нишу
2023

Ауџори:

др Драган Ракић, доцент Машинског факултета у Нишу
др Мартин Љубеновић, доцент Машинског факултета у Нишу
др Љиљана Радовић, редовни професор Машинског факултета у Нишу

Рецензенти:

др Ивана Ђоловић, редовни професор Техничког факултета у Бору, Универзитета у Београду
др Дијана Мосић, редовни професор Природно-математичког факултета у Нишу

Издавач: Машински факултет, Универзитет у Нишу

Прво издање, 2023. година

Штампа: Графика Галеб

Тираж: 150 примерака

Обрада текста и слика: аутори

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517(075.8)(076)
512.64(075.8)(076)

РАКИЋ, Драган, 1983-

Математика 1 : одабрани задаци и проблеми са прегледом теорије и применама / Драган Ракић, Мартин Љубеновић, Љиљана Радовић. - 1. изд. - Ниш : Универзитет, Машински факултет, 2023 (Ниш : Графика Галеб). - IV, 525 стр. : граф. прикази, табеле ; 24 cm

Тираж 150. - Напомене уз текст. - Библиографија: стр. 525.

ISBN 978-86-6055-166-7

1. Љубеновић, Мартин, 1985- [аутор] 2. Радовић, Љиљана М., 1969- [аутор]
а) Математичка анализа -- Вежбе б) Линеарна алгебра -- Вежба

COBISS.SR-ID 112774665

Одлуком Наставно-научног већа Машинског факултета у Нишу,
број 612-154-7-1/2023 од 14. марта 2023. године, рукопис је одобрен за
штампу као помоћни универзитетски уџбеник.

Ово дело се не сме умножавати и на било који начин репродуковати, у целини или у деловима, без писменог одобрења издавача.

Садржај

Предговор	iii
1 Функције. Гранична вредност и непрекидност	1
1.1 Основни појмови у вези са функцијама	1
1.2 Трансформације над графиком функције	21
1.3 Гранична вредност функције	31
1.4 Непрекидност функције	59
2 Извод функције	71
2.1 Дефиниција извода	71
2.2 Правила диференцирања	83
3 Примена извода	103
3.1 Теорема о средњој вредности	103
3.2 Лопиталова правила	110
3.3 Испитивање функција	120
3.4 Тејлоров и Маклоренов полином	158
3.5 Примена извода у проблемима оптимизације и другим наукама	168
4 Интеграли	201
4.1 Неодређени интеграл	201
4.2 Дефиниција одређеног интеграла	207
4.3 Својства интеграла. Њутн-Лајбницова формула	217
4.4 Смена променљиве и парцијална интеграција	229
4.5 Интеграција неких класа функција	252
4.6 Несвојствени интеграл	282

5	Примене интеграла	289
5.1	Површина, запремина, дужина лука криве	289
5.1.1	Површина области ограничене кривама	289
5.1.2	Запремина тела	301
5.1.3	Дужина лука криве	317
5.1.4	Површина ротационе површи	326
5.2	Примена интеграла у физици и другим наукама	336
6	Матрице и детерминанте.	
	Системи линеарних једначина	353
6.1	Матрице	353
6.2	Детерминанте	366
6.3	Системи линеарних једначина	373
6.4	Системи линеарних једначина са параметром	397
6.5	Инверзна матрица	418
6.6	Матричне једначине	425
7	Векторска алгебра. Аналитичка геометрија	435
7.1	Векторска алгебра	435
7.2	Аналитичка геометрија	453
8	Тестови	499

Предговор

Књига *Математика 1 - одабрани задаци и проблеми са прегледом теорије и примена* је написана по важећем наставном плану и програму предмета Математика 1 на Машинском факултету у Нишу. Превасходно је намењена студентима инжењерских факултета, а надамо се да ће бити од користи и студентима математике и физике, као и ученицима средњих школа.

Књига је подељена у осам глава. Прва глава покрива основне појмове везане за функцију једне реалне променљиве, граничну вредност функције и непрекидност функције. У овој глави су такође обрађене трансформације над графиком функције. Друга глава је посвећена изводу функције, а трећа његовој примени. Четврта и пета глава су посвећене интегралу функције и његовој примени. Матрице, детерминанте и системи линеарних једначина су тема шесте главе. Седма глава обрађује основне елементе векторске алгебре и аналитичке геометрије. На почетку сваке главе је дат целовит теоријски преглед области са свим потребним дефиницијама, теоремама и објашњењима, неопходним за решавање задатака и проблема. Велики број задатака и појмова је илустрован сликом. Осму главу чине тестови састављени од кратких задатака и питања. Циљ ових тестова је провера знања из целокупног градива обрађеног у првих седам глава.

Неколико циљева којима смо тежили је утицало на начин излагања, садржину и форму књиге. Пре свега смо желели да читаоцу, што је могуће више, приближимо и појаснимо апстрактне математичке појмове и идеје. Упоредо са тим смо желели да укажемо на могућу примену свих математичких области обрађених у књизи. Мишљења смо да се ови циљеви не могу постићи само математичким формализмом кроз дефиниције, теореме и доказе, нити стандардним задацима по принципу „решити интеграл”, „испитати функцију” и слично. Због тога је посебна пажња посвећена различитим интерпретацијама математичких појмова и теорема. На пример, читалац се упознаје са, како формалном та-

ко и неформалном, дефиницијом граничне вредности функције, затим са геометријском и физичком интерпретацијом Лагранжове теореме о средњој вредности, са физичком интерпретацијом Њутн-Лајбницевог теореме и тако даље. Књига садржи велики број задатака и проблема у којима су представљене конкретне примене математике у проблемима оптимизације, природним, техничким и другим наукама. Циљ ових задатака је да кроз реалне проблеме читалац стекне увид о широким могућностима примене различитих математичких области, као што су диференцијални и интегрални рачун и линеарна алгебра. Осим тога, читалац непосредно увиђа неопходност познавања математичког апарата. Наравно, свака област у књизи је покривена и великим бројем стандардних, типских задатака који за циљ имају усвајање и проверу конкретних математичких знања и вештина неопходних сваком студенту.

У изради књиге смо користили неколико математичких класика, као што су [4], [2] и [3], који се као уџбеници годинама користе на великом броју инжењерских факултета у свету. Такође смо користили и неколико интернет енциклопедија, блогова и других доступних извора.

Задовољство нам је да се захвалимо рецензентима ове књиге професорки Ивани Ђоловић и професорки Дијани Мосић. Њихове сугестије су допринеле побољшању квалитета књиге.

Ниш, март 2023. године

Аутори

Драган Ракић је рођен 10. маја 1983. године у Нишу, где је завршио основну школу и гимназију. Дипломирао је 2008. године на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу, на одсеку за математику. На истом факултету је докторирао 2015. године.

Од 2012. године запослен је на Машинском факултету у Нишу, на Катедри за природно-математичке науке. Тренутно изводи наставу из предмета Математика 1 и Математика 2. Такође је ангажован на докторским студијама. У звање доцента изабран је 2018. године, а у звање ванредног професора 2023. године.

Објавио је 17 научних радова у међународним научним часописима.

Мартин Љубеновић је рођен 28. марта 1985. године у Нишу, где је завршио основну школу и гимназију. Дипломирао је 2010. године на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу, на одсеку за математику. На истом факултету је докторирао 2017. године.

Од 2014. године запослен је на Машинском факултету у Нишу на Катедри за природно математичке науке, где тренутно изводи наставу из предмета Математика 1 и Нумеричка математика, као и на докторским студијама. У звање доцента изабран је 2020. године, а у звање ванредног професора 2025. године.

Објавио је 11 научних радова у међународним научним часописима.

Љиљана Радовић је рођена 28. октобра 1969. године у Нишу, где је завршила основну школу и гимназију. Дипломирала је 1993. године на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу, на одсеку за математику где је и магистрала 2000. године. На истом факултету је и докторирала 2004. године.

Од 1994. године запослена је на Машинском факултету у Нишу (Катедри за природно математичке науке) у звању редовни професор. Током година изводила је наставу на основним и докторским студијама из многих предмета (Математика 1, Математика 2, Математика у инжењерском менаџменту, Пословна статистика...).

Објавила је преко 30 научних радова у домаћим и међународним научним часописима.