Sadržaj

Glava 1

Pripremno poglavlje

1.1 Teorijske osnove

- **Elementi teorije skupova**

1^o *Skup, element skupa*

Oznake: velika štampana slova za skupove, mala za njihove elemente.

Zadavanje skupova: nabrajanjem elemenata, ili, najčešće, ako je P neka osobina koju imaju svi elementi tog skupa sa

$\Omega = \{x : P(x)\}$.

Za element x kažemo da je (nije) u skupu Ω i pišemo $x \in \Omega$ ($x \notin \Omega$).

Broj elemenata skupa Ω: $|\Omega|$.

2^o *Skupovne relacije*

Relacija inkluzije: skup A je podskup skupa B, u oznaci $A \subseteq B$, tj. svi elementi skupa A su u skupu B.

3^o *Skupovne operacije*

Prazan skup $\varnothing$: ne postoji nijedan element sadržan u njemu.

Komplement skupa A, u oznaci A^c: skup svih elemenata koji nisu sadržani u A. Ako je $A \subseteq \Omega$, tada je

$A^c_\Omega = \{x \in \Omega : x \notin A\}$.

- Ukoliko je skup Ω jednoznačno odredjen, donji indeks se izostavlja.
- Važi: $\Omega^c = \varnothing$ i $\varnothing^c = \Omega$.

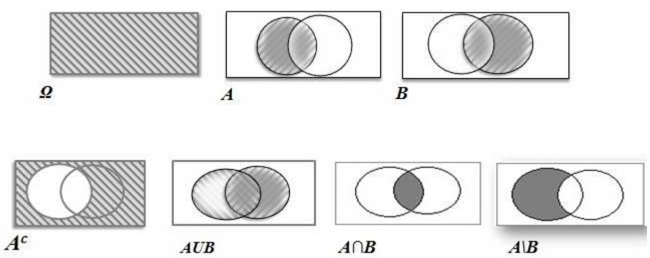
Presek skupova A i B: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$.
- A i B su disjunktni skupovi: važi $A \cap B = \varnothing$.

Unija skupova A i B: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\}$.

- Unija disjunktnih skupova: $A \cup B = A + B$.
- Unija prebrojivo mnogo skupova $A_1, A_2, ..., A_i, ..., i \in \mathbb{N}$:
  $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i \cup ... = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Razlika skupova A i B: $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$.

4^o *Venovi dijagrami* su jedan od najlakših načina da se vizuelno prikaže skup.



Slika 1.1: Venovi dijagrami

5^0 *Partitivni skup datog skupa Ω*

Skup koji se sastoji od svih podskupova skupa Ω uključujući sam skup Ω kao i prazan skup $\varnothing$, tj. skup:
$\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}$.

- $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ako i samo ako $A \subseteq \Omega$;
- $|\Omega| = n \Longrightarrow |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$.

6^o *Podela skupova po broju elemenata*

Konačan: skup koji ima konačno mnogo elemenata, tj. $|\Omega| = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Prebrojivo beskonačan: skup koji ima beskonačno mnogo elemenata koji se mogu poredjati u niz (skup prirodnih brojeva, skup celih brojeva, ...).

Neprebrojivo beskonačni: ostali skupovi (skup realnih brojeva, intervali, segmenti ...).

Diskretni skupovi: konačni ili prebrojivo beskonačni.
Neprekidni(kontinualni) skupovi: neprebrojivo beskonačni.

7^o *Dekartov proizvod skupova*

Uredjeni par (a, b) je niz od dva elementa.

- Važna osobina: $(a, b) \neq (b, a)$.
- Jednakost: $(a, b) = (c, d)$ ako i samo ako $a = c$ i $b = d$.

Dekartov proizvod skupova A i B: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

`Napomena.` Ako su $S \subseteq A$, $T \subseteq B$ tada je $S \times T \subseteq A \times B$.

- **Osnove kombinatorike**

Kombinatorika je matematička disciplina koja se bavi rasporedjivanjem elemenata u konačnim skupovima i odredjivanjem broja takvih rasporeda.

8^o <u>*Potrebne oznake*</u>

(n-)*Faktorijel*: broj $n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1, \quad n \in \mathbb{N}$.

- Po dogovoru je $0! = 1$.

Binomni koeficijent "n nad k" (n i k, $n \geq k \geq 0$):
$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

9^o <u>*Prebrojavanja*</u>

Predstavljaju važan deo kombinatorike.

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B|$.
- *Pravilo proizvoda*: ako se aktivnost 1 može izvršiti na n različitih načina, a aktivnost 2 na m različitih načina, tada je $m \cdot n$ broj načina na koji se mogu izvršiti aktivnosti 1 i 2 jedna za drugom (nezavisno od toga da li realizacija jedne aktivnosti zavisi od realizacije druge aktivnosti).

10^o <u>*Raspored elemenata i njihov broj*</u>

Podela:

- Permutacije su *uredjeni rasporedi*, a kombinacije *neuredjeni*.
- Rasporedi *bez ponavljanja* ukoliko se elementi u datom skupu razlikuju, i rasporedi *sa ponavljanjem* u suprotnom.

10^o1. *Rasporedi bez ponavljanja skupa* Ω, $|\Omega| = n$

Permutacija skupa Ω: svaki redosled zapisivanja njegovih elemenata. Broj svih permutacija skupa Ω je
$P_n = n! = n(n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$.

Varijacija k-te klase ($n \geq k \geq 1$) skupa Ω: svaki raspored elemenata bilo kog podskupa od Ω sa k elemenata. Broj svih varijacija k-te klase od n elemenata je
$V_n^k = n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

`Napomena.` U savremenoj literaturi se često pojam permutacija koristi i za pojam varijacija. Preciznije, varijacije k-te klase od n elemenata se nazivaju i k-permutacijama.

Kombinacije (neuredjeni rasporedi) *k-te klase* ($n \geq k \geq 1$) skupa Ω: svi podskupovi skupa Ω od k-elemenata. Broj svih kombinacija k-te klase od n elemenata je
$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{V_n^k}{k!}$.

10^o2. *Rasporedi sa ponavljanjem skupa* Ω, $|\Omega| = n$

Broj permutacija sa ponavljanjem skupa Ω koji ima n_1 elemenata prve vrste, n_2 elemenata druge vrste,..., n_k elemenata k-te vrste (pri čemu je $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$):
$\overline{P}_n^{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$.

Broj varijacija sa ponavljanjem k-te klase od n elemenata, $n \geq k \geq 1$:
$\overline{V_n^k} = n^k$.

Broj kombinacija sa ponavljanjem k-te klase od n elemenata, $n \geq k \geq 1$:
$\overline{C_n^k} = \binom{n+k-1}{k}$.

1.2 Rešeni zadaci

Zadatak 1.1. *Dat je skup* $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ *i njegovi podskupovi* $A = \{a, b, c\}$ *i* $B = \{c, d\}$. *Naći:* $A \cup B$, $A \cap B$, A^c, B^c, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Rešenje.

$$A \cup B = \{a, b, c, d\}$$
$$A \cap B = \{c\}$$
$$A^c = \{d, e\}$$
$$B^c = \{a, b, e\}$$
$$A \setminus B = \{a, b\}$$
$$B \setminus A = \{d\}$$

Zadatak 1.2. *Naći partitivni skup skupa* $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\Omega) = \{&\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\},\\ &\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,e\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,e\}, \{c,d\}, \{c,e\}, \{d,e\},\\ &\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,e\}, \{a,c,d\}, \{a,c,e\}, \{a,d,e\}, \{b,c,d\},\\ &\quad \{b,c,e\}, \{b,d,e\}, \{c,d,e\},\\ &\{a,b,c,d\}, \{a,c,d,e\}, \{a,b,d,e\}, \{a,b,c,e\}, \{b,c,d,e\},\\ &\{a,b,c,d,e\}\}\end{aligned}$$

Zadatak 1.3. *Naći dekartov proizvod* $A \times B$ *gde su:*

(a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$;

(b) $A = [1, 3]$, $B = [1, 2]$.

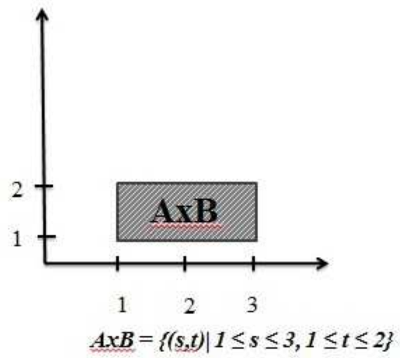
Rešenje. (a)

$$\begin{aligned}A \times B = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),\\ &(2,1), (2,2), (2,3), (2,4),\\ &(3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}.\end{aligned}$$

Ovaj skup može se prikazati i sledećom tabelom:

$\times$	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)

(b) $A \times B = \{(s,t) | 1 \leq s \leq 3, 1 \leq t \leq 2\}$.



Slika 1.2

`Napomena.` Ako su $S \subseteq A$, $T \subseteq B$ tada je $S \times T \subseteq A \times B$.

Zadatak 1.4. *Koliko članova ima muzička grupa ako sedam njenih članova peva, četiri svira gitaru, a dva i peva i svira?*

Rešenje. Neka su:
$|A| = 7$ broj članova koji pevaju,
$|B| = 4$ broj članova koji sviraju,
$|A \cap B| = 2$ broj članova koji i sviraju i pevaju. Ukupan broj članova grupe je:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 7 + 4 - 2 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Zadatak 1.5. *U kutiji su* 3 *crvene,* 4 *bele i* 6 *zelenih kuglica. Na koliko načina možemo izvući jednu kuglicu?*

Rešenje. Jednu kuglicu možemo izvući na $3 + 4 + 6 = 13$ načina.

Zadatak 1.6. *Ako garderoba neke žene sadrži* 4 *suknje i* 5 *košulja na koliko različitih načina se ona može obući?*

Rešenje. Žena se može obući na $4 \cdot 5 = 20$ načina.

Zadatak 1.7. *U nekoj disciplini u finalu svetskog kupa u atletici učestvuje* 5 *takmičara. Na koliko različitih načina se može "formirati" pobedničko postolje?*

Rešenje. Pet je načina da se osvoji zlato, četiri da se osvoji srebro i tri da se osvoji bronza. Dakle, ukupno $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Zadatak 1.8. *Prvo se baca kocka čije su strane numerisane brojevima* $1, 2, ..., 6$, *a zatim žeton na čijim su stranama napisani brojevi* 1 *i* 2. *Naći broj svih mogućih ishoda.*

Rešenje. Pri prvom bacanju kocke može se pojaviti bilo koji broj iz skupa $\{1, 2, ..., 6\}$. U drugom bacanju žetona mogu se pojaviti brojevi 1 ili 2. Prema pravilu proizvoda, ima $6 \cdot 2 = 12$ mogućih ishoda.

Zadatak 1.9. *Napisati sve permutacije skupa* $S = \{a, b, c\}$.

Rešenje. Permutacije su

$$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba.$$

Dakle, ovaj skup ima 6 permutacija.
Do broja permutacija se može doći i korišćenjem pravila proizvoda: postoje 3 načina da se izabere prvi element, 2 za izbor drugog i 1 za treći element, dakle $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina.

> `Napomena.` Važno je primetiti da su abc i bca dve različite permutacije. Dakle, redosled zapisivanja je bitan.

Zadatak 1.10. *Dat je skup* $S = \{a, b, c, d\}$. *Naći:*

(*a*) *broj svih varijacija treće klase i ispisati ih;*

(*b*) *broj svih kombinacija treće klase i napisati ih.*

Rešenje. (a) Na osnovu pravila proizvoda i formule za broj varijacija treće klase od 4 elemenata, njihov broj je

$$V_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Navedimo ih sve:

abc	acb	bac	bca	cab	cba
abd	adb	bad	bda	dab	dba
acd	adc	cad	cda	dac	dca
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb.

(b) Broj svih kombinacija treće klase od četri elemenata je

$$C_4^3 = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 4$$

Navedimo ih

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

`Napomena.` Uočimo razliku između varijacija i kombinacija iz prethodnog zadatka.

abc	acb	bac	bca	cab	cba	{a,b,c}
abd	adb	bad	bda	dab	dba	{a,b,d}
acd	adc	cad	cda	dac	dca	{a,c,d}
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb	{b,c,d}.

Zadatak 1.11. *Koliko se petocifrenih brojeva može sastaviti od brojeva* $1, 2, 3, 4, 5$*, tako da su im sve cifre različite?*

Rešenje. Na prvo mesto u broju može doći bilo koji od brojeva $1, 2, 3, 4, 5$. Na drugo se može staviti bilo koji od preostala 4, na treće bilo koji od preostala 3, na četvrto jedan od preostala dva broja, a na poslednje, peto mesto, stavljamo jedini preostali broj. To se može uraditi na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina.

Zadatak 1.12. *Iz kutije sa* 6 *žetona numerisanih brojevima* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *izvlače se tri žetona, jedan po jedan, tako da se posle izvlačenja ne vraćaju u kutiju (**izvlačenje bez vraćanja**). Na koliko načina se to može uraditi, odnosno koliko ima različitih redosleda tri broja od brojeva* $1, 2, 3, 4, 5, 6$*?*

Rešenje. U prvom izvlačenju može se dobiti bilo koji od 6 brojeva. U drugom izvlačenju može se dobiti neki od preostalih 5 brojeva, a u trećem neki od preostala 4 broja. Prema pravilu proizvoda ovo se može uraditi na $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ načina.

Zadatak 1.13. *Na koliko načina se iz korpe sa po jednom bananom, pomorandžom, jabukom i kruškom mogu izabrati tri voćke?*

Rešenje. Ako se svaka voćka obeleži brojem 1,2,3,4, pitanje se svodi na to na koliko načina se može od 4 broja izabrati tri, tako da im redosled nije bitan, (izbori 1,2,3; 1,3,2; 2,1,3; 2,3,1; 3,1,2 i 3,2,1 smatraju se istim), odnosno koliko tročlanih podskupova ima skup od 4 elemenata?

Broj izvlačenja, kada je redosled elemenata bitan, jeste

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Kako ovde redosled nije bitan, onda se $k! = 3!$ redosleda izvlačenja istog skupa od tri broja (voćke) tretira kao jedan, pa dobijeni broj izvlačenja treba podeliti sa 3!, tj.

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4.$$

Zadatak 1.14. *Na slučajan način se raspoređuju kartoni na kojima su ispisana slova A, A, A, B, N, N. Kolika je verovatnoća da će se formirati reč BANANA?*

Rešenje. Broj svih mogućih reči je $\overline{P}_6^{3,1,2} = \dfrac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = 60$. Povoljna je samo jedna, pa je tražena verovatnoća $\dfrac{1}{60} = 0,01667$.

Zadatak 1.15. *Iz kutije sa 6 žetona numerisana brojevima* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *izvlače se tri žetona, jedan po jedan, tako da se posle izvlačenja žetoni vraćaju u kutiju (**izvlačenje sa vraćanjem**). Na koliko načina je to moguće uraditi, odnosno koliko ima različitih redosleda tri broja od brojeva* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *pri čemu se brojevi mogu ponavljati?*

Rešenje. Kako je pri svakom izvlačenju sastav kutije isti i u njoj ima 6 kuglica, zaključujemo da pri svakom od tri izvlačenja postoji 6 mogućnosti za izbor, pa je prema pravilu proizvoda, broj izvlačenja $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$.

Zadatak 1.16. *U nekoj poslastičarnici se mogu kupiti četiri vrste kolača: šampite, krempite, puslice i orasnice. Na koliko je načina moguće kupiti sedam kolača?*

Rešenje. Broj svih mogućih načina kupovine sedam kolača je jednak broju kombinacija sa ponavljanjem sedme klase ($k = 7$) od četiri elemenata ($n = 7$):

$$\overline{c}_4^7 = \binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$

1.3 Zadaci za vežbu

1. Medju studentima koji su polagali ispit, jedan je načinio 13 grešaka, a ostali manje. Dokazati da postoje bar tri studenta sa istim brojem grešaka.
2. Na koliko načina se mogu izabrati dva polja (crno i belo) na šahovskoj tabli?
3. Iz grupe of 7 muškaraca i 4 žene treba izabrati 6 osoba tako da medju izabranim osobama bude najmanje 2 žene. Na koliko načina se ovo može uraditi?
4. Imamo 12 devojaka i 15 mladića na studentskom balu. Na koliko načina se može formirati 4 plesačka para?
5. Na koliko načina možemo izabrati 12 osoba od 17, ako dve od ovih 17 osoba ne možemo birati zajedno?

Glava 2

Verovatnoća

2.1 Teorijske osnove

- **Eksperiment. Skup elementarnih dogadjaja. Slučajni dogadjaji**

1^o *Eksperiment*

Deterministički:

- zasnovan na klasičnim zakonima mehanike, tj. na definisanju uzročne veze početnih i konačnih stanja nekog fizičkog sistema;
- pri svakom ponavljanju eksperimenta pri istim uslovima dobija se uvek isti rezultat;
- ishod pojedinačnog eksperimenta je unapred poznat.

Statistički:

- može se ponavljati proizvoljan broj puta pod istim uslovima;
- unaprede je definisano šta se registruje prilikom izvodjenja eksperimenta i poznati su svi mogući ishodi;
- ishod pojedinačnog eksperimenta nije unapred poznat.

2^o *Skup elementarnih dogadjaja*

Elementaran dogadjaj ω: svaki moguć ishod statistističkog eksperimenta.

Ω: skup svih elementarnih dogadjaja.

3^o *Slučajni dogadjaji*

Dogadjaj: svaki podskup skupa Ω.

- Obeležavaju velikim slovom latinice: A, B, C,...
- Dogadjaj A se *realizovao*: pri izvodjenju eksperimenta registrovan jedan od elementarnih dogadjaja koji mu pripadaju.
- Ω: *siguran* dogadjaj;
- $\emptyset$: *nemoguć* dogadjaj.

4^o *Operacije sa dogadjajima u skupu Ω*

$A \subseteq B$: realizacija dogadjaja A povlači realizaciju dogadjaja B;
$A \cup B$: realizovao se dogadjaj A ili dogadjaj B;
$A \cap B = AB$: realizovali su se dogadjaji A i B istovremeno;
$A \setminus B$: realizovao se dogadjaj$A$ ali ne i B;
A^c: *suprotan* dogadjaj dogadjaju A,tj. nije se realizovao A.

Uzajamno isključivi dogadjaji A i B: $AB = \varnothing$.
$A \cup B = A + B$: ako je $AB = \varnothing$.

`Napomena.` Ako je $|\Omega| = n$ konačan skup, tada je broj svih slučajnih dogadjaja jednak $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$. Broj dogadjaja koji sadrže k elementarnih dogadjaja, $n \geq k \geq 1$, jednak je broju kombinacija k-te vrste od n elemenata, C_n^k.

- **Definicija, osobine i metode zadavanja verovatnoće**

5^o *Definicija verovatnoće*

Aksiomatsko zasnivanje: ***verovatnoća*** P je funkcija na odredjenom podskupu $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ za koju važi:

A.1. normiranost: $P(\Omega) = 1$;
A.2. nenegativnost: $0 \leq P(A) \leq 1$, za svaki $A \in \mathcal{F}$ (ili, ekvivalentno, za svski $A \subseteq \Omega$);
A.3. σ-aditivnost: za medjusobno disjunktne dogadjaje $A_1, \ldots, A_i, \ldots \in \mathcal{F}$ važi:

$$P(A_1 + \ldots + A_i + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_i) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Verovatnoća dogadjaja A: broj $P(A)$.

6^o *Osobine verovatnoće*

Značajne za odredjivanje verovatnoća složenijih dogadjaja

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$;
4. $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$;
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
6. $AB = \varnothing$, tj. A i B isključivi, tada je $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

7^o *Metode računanja verovatnoće*

7^o1. *Zadavanje verovatnoće na diskretnom skupu*

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ ili $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$;
$P(\omega_i) = p_i$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ili $i \in \mathbb{N}$;
$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ ili $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} p_i = 1$;
$A \subseteq \Omega$.

Verovatnoća dogadjaja A jednaka je zbiru verovatnoća elementarnih dogadjaja koji pripadaju A

$$P(A) = \sum_{\omega_{i_k} \in A} p_{\omega_{i_k}}.$$

Jednako verovatni elementarni dogadjaji

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, $n = |\Omega|$;
$P(\omega_1) = p(\omega_2) = ... = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$;
$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_m}\}$, $m = |A|$;
$P(A) = \frac{m}{n}$.

7^o2. *Geometrijsko zadavanje verovatnoće*

Elementarni dogadjaji iz Ω: tačke u $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, ili $\mathbb{R}^3$.
Ω je ograničen skup sa konačnom geometrijskom merom $mes(\Omega)$:
u $\mathbb{R}$ je to dužina,
u $\mathbb{R}^2$ površina,
u $\mathbb{R}^3$ zapremina.

Verovatnoća $A \subseteq \Omega$ sa konačnom geometrijskom merom $mes(A)$:
$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}$.

8^o *Uslovnaa verovatnoća*

Uslovna verovatnoća dogadjaja A, pod uslovom da se desio dogadjaj B, $P(B) \neq 0$:
$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.
Teorema proizvoda verovatnoća:
$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$.
Uopštenje:

$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$;
$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)...P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1})$.

9^o *Nezavisnost dogadjaja*

A i B su nezavisni dogadjaji: $P(AB) = P(A)P(B)$.
Nezavisnost A i B povlači nezavisnost sledećih dogadjaja:
A i B^c; A^c i B; A^c i B^c.

Dogadjaji A, B i C su:

- nezavisni po parovima
  $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(AC) = P(A)P(C)$ i $P(BC) = P(B)P(C)$;
- nezavisni u ukupnosti: $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$;
- nezavisni: nezavisni u ukupnosti i po parovima.

- **Formula totalne verovatnoće. Bajesova formula**

10^o *Potpun sistem dogadjaja*

Dogadjaji $H_1, H_2, ..., H_n$ čine *potpun sistem dogadjaja* $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$, ako zadovoljavaju sledeće uslove:

uzajamno su disjunktni: $H_iH_j = \emptyset$, $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$;
čine disjunktno razbijanje ili particiju skupa Ω: $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$.

11^o <u>*Formula totalne verovatnoće*</u>

$P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$

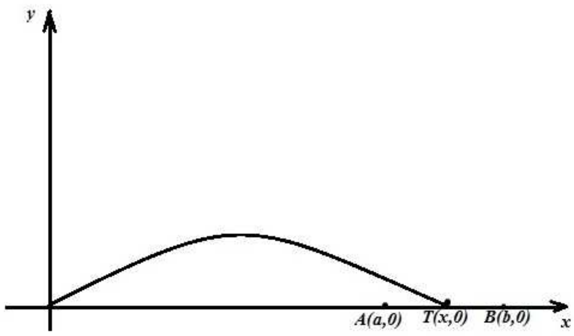
gde je:
$\{H_1, H_2, ..., H_n\}$: potpun sistem dogadjaja,
$P(H_i) > 0$, $i \in \{1, ..., n\}$: apriorne verovatnoće (obično date unapred) ,
$A \subseteq \Omega$.

12^o <u>*Bajesova formula (formula verovatnoće hipoteza*</u>

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{P(A)}, \qquad j \in \{1, ..., n\}.$$

Hipoteze: dogadjaji H_1, H_2,...,H_n.

Primer 2.1.1. Iz početka koordinatnog sistema izbacuje se početnom brzinom v tane pod uglom α prema x-osi. Zanima nas događaj D, da putanja taneta preseče osu x između tačaka $A(a, 0)$ i $B(b, 0)$.



Slika 2.1

(I) kad bi putanja taneta zavisila samo od gravitacione sile i njenog uticaja (deluje u suprotnom smeru od ose y) onda bi ona bila određena jednačinom

$$y = -\frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} - x^2 + x \operatorname{tg} \alpha,$$

a D nastupa onda kada α i v budu odabrani tako da važi:

$$a < \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha < b.$$

Dakle, ishod eksperimenta je potpuno određen izborom ugla α i početne brzine v (Slika 2.1).

(II) Međutim, eksperiment se uglavnom odvija u realnoj sredini, kao što je na primer zemljina atmosfera, a tu pored α i v na ishod eksperimenta deluje i mnoštvo različitih činilaca. Kako ne možemo uzeti u obzir sve te činioce, kažemo da je ISHOD eksperimenta SLUČAJAN, a sam eksperiment nazivamo SLUČAJAN EKSPERIMENT, u kome dakle

- ne možemo tačno predvideti kada će nastupiti događaj D;
- D može u konkretnom eksperimentu nastupiti, a može i ne nastupiti.

2.2 Rešeni zadaci

Zadatak 2.1. *Eksperiment se sastoji u bacanju novčića.*

(a) Odrediti skup elementarnih događaja Ω;

(b) Navesti sve događaje vezane za ovaj eksperiment.

Rešenje. (a) Elementarni događaji su: $\omega_1 = P \quad \omega_2 = G$, tj.

$$\Omega = \{P, G\}$$

(b) $\emptyset$-nemoguć događaj (na primer: pri bacanju novčića pala je kruška)

$A = \{P\}$ - palo je pismo

$B = \{G\}$ - pala je glava

$\Omega = \{P, G\}$ - palo je pismo ili glava.

Zadatak 2.2. *Novčić se baca* 3 *puta za redom. Odrediti skup elementarnih ishoda.*

Rešenje. $\Omega = \{PPP, PPG, PGP, PGG, GPP, GPG, GGP, GGG\}$,
($|\Omega| = 8$).

Zadatak 2.3. *Novčić se baca* 4 *puta i registruje se koliko puta je ukupno palo pismo.*

(a) Opisati Ω;

(b) A - nijednom nije palo pismo;

(c) B - bar jednom je palo pismo;

(d) U kakvoj su vezi događaji A i B?

Rešenje. (a) $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(b) $A = \{0\}$

(c) $B = \{1, 2, 3, 4\}$

(d) $A = B^c$.

Zadatak 2.4. *Eksperiment se sastoji u bacanju novčića dok se dva puta uzastopce ne pojavi isti znak, a najviše pet puta. Odrediti:*

(a) skup elementarnih događaja;

(b) događaj A: "eksperiment je završen u trećem bacanju";

(c) događaj B: "eksperiment je završen u prva tri bacanja".

Rešenje. (a) $\Omega = \{PP, GG, PGG, GPP, PGPP, GPGG, PGPGG, GPGPP,$
$PGPGP, GPGPG\}$;
(b) $A = \{PGG, GPP\}$;
(c) $B = \{PP, GG, PGG, GPP\}$.

Zadatak 2.5. *Novčić se baca dotle dok se dva puta uzastopce ne pojavi ista strana. Odrediti prostor elementarnih događaja.*

Rešenje. $\Omega = \{PP, GG, PGG, GPP, PGPP, GPGG, ...\}$.

Zadatak 2.6. *Bacaju se dva novčića. Odrediti skup Ω. Napisati sledeće događaje vezane za ovaj eksperiment.*

(a) A - pao je grb na prvom novčiću;

(b) B - palo je pismo na drugom novčiću;

(c) C - pao je grb bar na jednom novčiću;

(d) D - siguran događaj.

Rešenje. $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$

(a) $A = \{GP, GG\}$

(b) $B = \{PP, GP\}$

(c) $C = \{PG, GP, GG\}$

(d) $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$.

Zadatak 2.7. *Baca se kocka čije su strane označene brojevima od 1 do 6. Odrediti:*

(a) skup elementarnih događaja;

(b) događaj A - pao je parni broj;

(c) događaj B - pao je neparni broj;

(d) događaj C - pao je broj deljiv sa 3;

(e) broj svih događaja od 3 elementarna događaja;

(f) broj svih događaja od 5 elementarna događaja.

Rešenje. (a) Elementarni događaji su brojevi na koje kocka može pasti:

$\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$, $\omega_4 = 4$, $\omega_5 = 5$, $\omega_6 = 6$.

Skup svih elementarnih događaja je:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(b) $A = \{2, 4, 6\}$

(c) $B = \{1, 3, 5\}$

(d) $C = \{3, 6\}$

(e) $C_6^3 = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

(f) $C_6^5 = \binom{6}{5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6.$

`Napomena.` Ako je $|\Omega| = n$ konačan skup, tada je broj svih slučajnih događaja jednak $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$. Broj događaja koji sadrže k elementarnih događaja, $n \geq k \geq 1$, jednak je broju kombinacija k-te vrste od n elemenata, C_n^k.

Zadatak 2.8. *Bacaju se istovremeno dve kocke čije su strane numerisane brojevima* $1, 2, 3, 4, 5, 6$. *Opisati skup elementarnih događaja* Ω. *Izraziti sledeće događaje:*

(a) A - pojavila su se dva ista broja;

(b) B - pale su dve šestice;

(c) C - zbir brojeva na kockama je 7;

(d) D - oba broja su parna;

(e) oba broja su veća od 4;

(f) razlika brojeva iznosi 2.

Rešenje. Skup elementarnih događaja je dekartov proizvod skupa $\{1, 2, ..., 6\}$ samim sobom:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\},\end{aligned}$$

ili imajući u vidu Poglavlje 1.,

$\times$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

(a) $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$;

(b) $B = \{(6,6)\}$;

(c) $C = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$;

(d) $D = \{(2,2),(4,4),(6,6),(2,4),(2,6),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$;

(e) $E = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$;

(f) $F = \{(3,1),(4,2),(5,3),(6,4),(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$.

Zadatak 2.9. *Kutija sadrži* 10 *artikala od kojih su* 3 *defektna. Artikli se uzimaju jedan za drugim bez vraćanja u kutiju, dok se poslednji defektni proizvod ne izvuče. Registruje se ukupan broj izvučenih artikala.*

(a) Opisati skup Ω;

(b) Odrediti događaj A - broj izvučenih artikala je paran.

Rešenje. (a) $\Omega = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$

(b) $A = \{4,6,8,10\}$

Zadatak 2.10. *Artikli se proizvode dok se* 10 *ispravnih ne proizvede. Registruje se ukupan broj proizvedenih artikala.*

(a) Opisati skup Ω;

(b) Odrediti događaj A - broj proizvedenih artikala je manji od 50.

Rešenje. (a) $\Omega = \{10,11,12,...\}$

(b) $A = \{10,11,12,...,50\}$

Zadatak 2.11. *U kutiji se nalazi pet sijalica od kojih su dve defektne. Sijalice se na slučajan način izvlače jedna po jedna bez vraćanja i kontrolišu dok se obe defektne ne otkriju.*

(a) Razmotriti slučajeve koji se mogu desiti pri kontroli;

(b) U koliko se slučajeva kontrola prekida posle provere treće sijalice?

Rešenje. (a) Označimo sa D pojavu defektne sijalice, a sa I ispravne. Tada su:

$$\begin{array}{llll} \omega_1 = DD & \omega_5 = IDD & \omega_8 = IIDD & \omega_{10} = IIIDD \\ \omega_2 = DID & \omega_6 = IDID & \omega_9 = IIDID & \\ \omega_3 = DIID & \omega_7 = IDIID & & \\ \omega_4 = DIIID & & & \end{array}$$

Dakle, skup svih elementarnih ishoda je

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{10}\}.$$

(b) $A = \{\omega_2, \omega_5, \omega_{10}\}$

Zadatak 2.12. *Opisati Ω ako se eksperiment sastoji od registrovanja dužine trajanja sijalice.*

Rešenje. Teorijski, Ω je skup svih nenegativnih realnih brojeva, tj.

$$\Omega = \{t \in \mathcal{R} : t \geq 0\}.$$

Ipak, dužina života sijalice ne prelazi dovoljno veliki i konačan realni broj T, tako da je, u stvari:

$$\Omega = \{t \in \mathcal{R} : 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

Zadatak 2.13. *Naprava se sastoji od 2 identična uređaja U_1 i U_2 i preklopnika P. Uređaji U_1, U_2 i preklopnik P mogu biti u ispravnom stanju I ili u kvaru K. Čitava naprava je u ispravnom stanju ako je jedan od uređaja U_1 i U_2 u stanju I i ako je preklopnik u stanju I.*

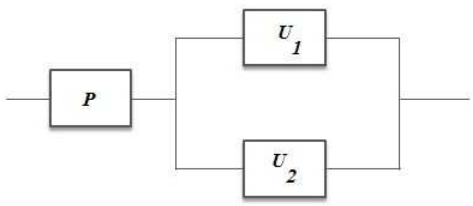
(a) Opisati Ω.

(b) Odrediti događaje

A - uređaj je ispravan, i događaj

B - uređaj je neispravan.

Rešenje. (a) Skup Ω svih mogućih ishoda prilikom posmatranja date naprave (Slika 2.2)



Slika 2.2

ima 8 elemenata.

	P	U_1	U_2
ω_1	I	I	I
ω_2	I	I	K
ω_3	I	K	I
ω_4	I	K	K
ω_5	K	I	I
ω_6	K	I	K
ω_7	K	K	I
ω_8	K	K	K

Dakle,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_8\}.$$

(b) Traženi događaji su:

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\},$$
$$B = A^c = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}.$$

Zadatak 2.14. *Četiri studenta polažu ispit. Ako sa A, B, C, D označimo redom njihov uspeh (prolaznost) na ispitu, izraziti sledeće događaje:*

(a) nijedan nije položio;

(b) položio je samo prvi student;

(c) položio je samo jedan student;

(d) položio je bar jedan student;

(e) položila su dva studenta;

(f) položila su najmanje tri studenta.

Rešenje. (a) $A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c = A^cB^cC^cD^c$.

(b) $AB^cC^cD^c$.

(c) $AB^cC^cD^c + A^cBC^cD^c + A^cB^cCD^c + A^cB^cC^cD$.

(d) $A \cup B \cup C \cup D = A + B + C + D$.

(e) $ABC^cD^c + AB^cCD^c + AB^cC^cD + A^cBCD^c + A^cBC^cD + A^cB^cCD$.

(f) $ABCD^c + ABC^cD + AB^cCD + A^cBCD + ABCD$.

Zadatak 2.15. *Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ skup elementarnih događaja. Proveriti da li je funkcija $P : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija verovatnoće ako je:*

(a) $P(\omega_1) = \dfrac{1}{3}, \quad P(\omega_2) = \dfrac{1}{5}, \quad P(\omega_3) = \dfrac{1}{6}, \quad P(\omega_4) = \dfrac{1}{5};$

(b) $P(\omega_1) = \dfrac{1}{9}, \quad P(\omega_2) = \dfrac{2}{3}, \quad P(\omega_3) = \dfrac{1}{18}, \quad P(\omega_4) = \dfrac{1}{6};$

(*c*) $P(\omega_1) = \dfrac{2}{5}, \quad P(\omega_2) = \dfrac{1}{5}, \quad P(\omega_3) = \dfrac{3}{5}, \quad P(\omega_4) = -\dfrac{1}{5}.$

Rešenje. Na osnovu definicije verovatnoće i njenih osobina treba proveriti da li su svi brojevi $P(\omega_i) \geq 0$, $1 \leq i \leq 4$, i da li je $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$.

(a) Kako je

$$\begin{aligned} P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{27}{30} < 1, \end{aligned}$$

to P nije funkcija verovatnoće.

(b) Kako je

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = 1$$

to je P funkcija verovatnoće.

(c) Kako je $P(\omega_4) = -\dfrac{1}{5}$, to P nije funkcija verovatnoće.

Zadatak 2.16. *Četiri konja koje jašu osobe A, B, C, D učestvuju u trci za veliki pehar. Prema postignutim rezultatima iz prethodnih trka šanse za pobedu su* $3 : 5 : 4 : 1$.

(a) Odrediti verovatnoću pobede svakog jahača.

(b) Kolika je verovatnoća da pobedi B ili D?

Rešenje. (a) Na osnovu uslova zadatka važi:

$$P(A) : P(B) : P(C) : P(D) = 3 : 5 : 4 : 1.$$

Ako je verovatnoća da jahač D pobedi p, tj. $P(D) = p$, tada je:

$$P(A) = 3p, \quad P(B) = 5p, \quad P(C) = 4p.$$

Sledi

$$\begin{gathered} P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1, \\ 3p + 5p + 4p + p = 1 \\ 13p = 1 \\ p = \frac{1}{13}. \end{gathered}$$

Dakle,

$$P(A) = \frac{3}{13}, \quad P(B) = \frac{5}{13}, \quad P(C) = \frac{4}{13}, \quad P(D) = \frac{1}{13}.$$

(b) Označimo sa $E = \{B, D\}$ događaj da pobeđuje B ili D. Tada je

$$\begin{aligned} P(E) &= P(B) + P(D) \\ &= \frac{5}{13} + \frac{1}{13} \\ &= \frac{6}{13}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.17. *Na šahovskom turniru učestvuju Aleksandar, Ivana, Vlada, Marija i Goran. Aleksandar, Ivana i Marija pobeđuju sa istom verovatnoćom. Verovatnoće da pobede Vlada i Goran su jednake, ali trostruko veće u odnosu na prethodna tri učesnika.*

(a) Kolika je verovatnoća pobede svakog igrača?

(b) Kolika je verovatnoća da pobednik turnira bude žena?

Rešenje. (a) Označimo sa a, i, v, m, g (elementarne) događaje da redom Aleksandar, Ivana, Vlada, Marija, Goran budu pobednici turnira. Dakle, $\Omega = \{a, i, v, m, g\}$. Na osnovu uslova zadatka je

$$P(a) = P(i) = P(m) = p,$$

$$P(v) = P(g) = 3p,$$

što dalje povlači

$$p + p + 3p + p + 3p = 1,$$

$$p = \frac{1}{9}.$$

Verovatnoće pobeda su

$$P(a) = P(i) = P(m) = \frac{1}{9},$$

$$P(v) = P(g) = \frac{1}{3}.$$

(b) Označimo sa $A = \{i, m\}$ događaj da turnir osvaja žena. Tada je

$$P(A) = P(i) + P(m) = \frac{2}{9}.$$

Zadatak 2.18. *Neka je* $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ *i* $P(AB) = \frac{1}{4}$. *Odrediti:*

(a) $P(A \cup B)$;

(b) $P(A^c)$, $P(B^c)$;

(c) $P(A^cB^c)$;

(d) $P(A^c + B^c)$.

Rešenje. (a) Na osnovu osobine verovatnoće sledi

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

(b) Primenom osobine (2), dobijamo

$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8},$

$P(B^c) = \frac{1}{2}.$

(c) Primenom De Morganovog zakona, a potom i osobine (2), dobija se:

$$\begin{aligned} P(A^cB^c) = P((A \cup B)^c) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \frac{5}{8} \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(A^c + B^c) &= P(A^c) + P(B^c) - P(A^cB^c) \\ &= \frac{5}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.19. *Strelac gađa u metu koja se sastoji od* 3 *zone. Verovatnoća pogađanja u prvu zonu je* $0,15$*, u drugu zonu je* $0,25$*, a u treću* $0,45$*. Kolika je verovatnoća da se pri gađanju meta promaši?*

Rešenje. Označimo događaje na sledeći način:

A_i - pogodak u i-tu zonu, $(i = 1, 2, 3)$

A - meta je pogođena

B - promašaj mete

Važi

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

pri čemu je $A_1 \cap A_2 = \emptyset,\ A_1 \cap A_3 = \emptyset,\ A_2 \cap A_3 = \emptyset.$, što daje:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &= 0,15 + 0,25 + 0,45 \\ &= 0,85 \end{aligned}$$

Verovatnoća traženog događaja B je:

$$P(B) = P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0,85 = 0,15.$$

Zadatak 2.20. *Dati su događaji A i B za koje se zna da je $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ i $P(B) = p$. Odrediti p ako se zna:*

(a) da se događaji A i B uzajamno isključuju;

(b) da je događaj A podskup događaja B.

Rešenje. (a) Na osnovu osobine (5), važi:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$$P(B) = P(A+B) - P(A)$$

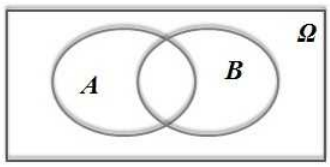
$$P(B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{12}.$$

(b) Uslov zadatka $A \subseteq B$ povlači $AB = A$. Primenom osobine (4), dobija se:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A) \\ P(A \cup B) &= P(B) \\ P(B) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.21. *Neka je dat skup elementarnih događaja Ω, i neka su A i B događaji vezani za njega takvi da važi $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ i $P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{3}$. Odrediti $P(A \cup B^c)$.*



Slika 2.3

Rešenje. Kako su A i $A^c \cap B^c$ disjunktni događaji i

$$A \cup B^c = A \cup (A^c \cap B^c),$$

to važi

$$\begin{aligned} P(A \cup B^c) &= P(A \cup (A^c \cap B^c)) \\ &= P(A) + P(A^c \cap B^c) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.22. *Ako je $P(A) = 0,25$ i $P(B) = 0,8$, dokazati da je $0,05 \leq P(A \cap B) \leq 0,25$.*

Rešenje. Na osnovu osobine (6), 2.2.2, važi:

$$A \cap B \subseteq A \Longrightarrow P(A \cap B) \leq P(A),$$

$$A \cap B \subseteq B \Longrightarrow P(A \cap B) \leq P(B),$$

što povlači da je

$$P(A \cap B) \leq min\ \{P(A), P(B)\} = min\ \{0,25; 0,8\} = 0,25.$$

Dakle,

$$P(A \cap B) \leq 0,25.$$

Ista osobina daje

$$A \cup B \subseteq \Omega \Longrightarrow P(A \cup B) \leq P(\Omega) = 1,$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,8 + 0,25 - P(A \cap B) \leq 1, \end{aligned}$$

a to, dalje, povlači

$$0,8 + 0,25 - 1 \leq P(A \cap B),$$

$$0,05 \leq P(A \cap B).$$

Konačno imamo

$$0,05 \leq P(A \cap B) \leq 0,25.$$

Zadatak 2.23. *Osoba se javlja na raspisane konkurse za dva radna mesta. Verovatnoća da dobije prvi posao je $0,45$, drugi $0,55$, a da dobije oba $0,30$. Koja je verovatnoća da dobije (bar jedno) radno mesto?*

Rešenje. Označimo događaje
A - dobija prvo radno mesto,
B - dobija drugo radno mesto.
Na osnovu uslova zadatka

$$P(A) = 0,45 \quad P(B) = 0,55 \quad P(AB) = 0,3$$

Na osnovu osobine (4), tražena verovatnoća je:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= 0,45 + 0,55 - 0,3 \\ &= 0,7. \end{aligned}$$

Zadatak 2.24. *Na aparatu za igru se pojavljuje broj $n \in \mathbb{N}$ sa verovatnoćom $\frac{1}{2^n}$, tj. $P(n) = \frac{1}{2^n}$. Kolika je verovatnoća da se pojavi neparan broj?*

Rešenje. Skup elementarnih događaja je

$$\Omega = \{1, 2, 3, ..., n, ...\},$$

a događaj A da se pojavi neparan broj je

$$A = \{1, 3, ..., 2k-1, 2k+1, ...\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Na osnovu uslova zadatka $P(n) = \frac{1}{2^n}$ sledi

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{2k+1}} + ... \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^2} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.25. *Baca se kocka i registruje broj na gornjoj strani. Odrediti verovatnoću sledećih događaja:*

(a) A - pao je broj 2;

(b) B - pao je broj koji nije veći od 4;

(c) C - pao je neparan broj;

(d) D - pao je broj 3 ili 4;

(e) E - pao je broj različit od 5;

(f) F - pao je broj koji nije manji od 4.

Rešenje. Skup svih mogućih ishoda je

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

pa je $n = |\Omega| = 6$. Tražene verovatnoće nalaze se primenom formule za jednako verovatne događaje:

(a) $A = \{2\}, \quad m = |A| = 1,\ P(A) = \frac{1}{6}$

(b) $B = \{1,2,3,4\}, \quad m = |B| = 4,\ P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(c) $C = \{1,3,5\}, \quad m = |C| = 3,\ P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(d) $D = \{3,4\}, \quad m = |D| = 2,\ P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(e) $E = \{1,2,3,4,6\}, \quad m = |E| = 5,\ P(E) = \frac{5}{6}$

(f) $F = \{4,5,6\}, \quad m = |F| = 3,\ P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

Zadatak 2.26. *Naći verovatnoću da pri bacanju dve kocke padne zbir manji od* 12.

Rešenje. Označimo sledeće događaje sa:
A - pao je zbir manji od 12,
B - pao je zbir 12.
Kako je

$$B = \{(6,6)\},$$

$n = |\Omega| = 36$, $m = |B| = 1$, to je, primenom formule za jednako verovatne događaje:

$$P(B) = \frac{1}{36}.$$

Kako je $A = B^c$ to je

$$\begin{aligned} P(A) = P(B^c) &= 1 - P(B) \\ &= 1 - \frac{1}{36} \\ &= \frac{35}{36}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.27. *U grupi od* 20 *studenata i* 10 *studentkinja polovina studenata i polovina studentkinja puši. Naći verovatnoću da je slučajno izabrana osoba ili studentkinja, ili pušač.*

Rešenje. Označimo sledeće događaje sa:
A - izabrana osoba je studentkinja;
B - izabrana osoba je pušač;
$A \cap B$ - izabrana osoba je studentkinja i pušač;
$A \cup B$ -izabrana osoba je ili studentkinja ili pušač;
Na osnovu uslova zadatka:

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \quad P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(AB) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

Tražena verovatnoća je

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.28. *Novčić se baca 3 puta za redom i beleži se javljanje pisma P ili glave G. Odrediti:*

(a) ukupan broj događaja vezan za ovaj eksperiment;

(b) skup elementarnih događaja Ω;

(c) verovatnoću događaja A - glava se pojavila jednom;

(d) verovatnoću događaja pismo se pojavilo u trećem bacanju;

(e) verovatnoću događaja pojavila se barem jedna glava;

(f) verovatnoću događaja glava se pojavila dva puta za redom.

Rešenje. (a) Elementarni događaj je svaka uređena trojka napisana od elemenata skupa $\{P, G\}$. Njih ima

$$|\Omega| = \overline{V}_2^3 = 2^3 = 8.$$

(b) Elementarni događaji vezani za ovaj eksperiment su

$$\omega_1 = GGG,\ \omega_2 = GGP,\ \omega_3 = GPG,\ \omega_4 = GPP$$
$$\omega_5 = PGG,\ \omega_6 = PGP,\ \omega_7 = PPG,\ \omega_8 = PPP.$$

Dakle, prostor elementarnih događaja je:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_8\}.$$

(b) $|\Omega| = 8$

Nekoliko događaja izdvojenih za ovaj eksperiment dati su od $(c) - (f)$.

(c) $A = \{\omega_4, \omega_6, \omega_7\}$, $P(A) = \dfrac{3}{8}$.

(d) $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8\}$, $P(B) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

(e) $C = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_7\}$, $P(C) = \dfrac{7}{8}$.

(f) $D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5\}$, $P(D) = \dfrac{3}{8}$.

Zadatak 2.29. *U lift stambene zgrade sa pet spratova ulaze četvoro ljudi. Svako od njih izlazi sa jednakom verovatnoćom na svakom od spratova. Odrediti Ω i $|\Omega|$, a zatim naći verovatnoće sledećih događaja:*

(a) A - svi izlaze na trećem spratu;

(b) B - svi izlaze istovremeno na istom spratu.

Rešenje. Dodelimo svakoj osobi broj sprata na kom je izašla. Elementarni događaj $\omega = (a, b, c, d)$ je uređena četvorka čiji su elementi brojevi spratova, tj.

$$\Omega = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

Broj elemenata ovog skupa je:

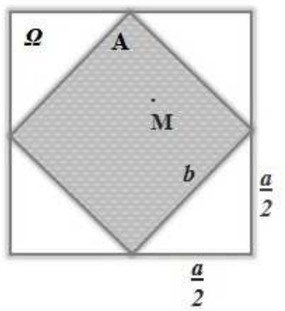
$$|\Omega| = \overline{V}_5^4 = 5^4 = 625.$$

(a) $A = \{(3, 3, 3, 3)\}$, $P(A) = \dfrac{1}{625}$;

(b) $B = \{(1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), (5, 5, 5, 5)\}$,
$P(B) = \dfrac{5}{625} = \dfrac{1}{125}$.

Zadatak 2.30. *Sredine stranica kvadrata stranice a spajanjem daju ponovo kvadrat. Tačka M se bira na slučajan način unutar kvadrata stranice a. Odrediti verovatnoću da izabrana tačka M pripada manjem kvadratu.*

Rešenje. Skup svih mogućih ishoda Ω je skup svih tačaka u kvadratu stranice a, pa je $mes(\Omega) = a^2$. Neka je događaj A da je tačka izabrana unutar manjeg kvadrata (Slika 2.4).



Slika 2.4

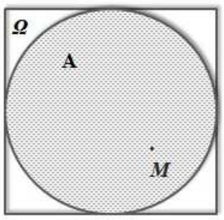
Stranica manjeg kvadrata je $b = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.
Njegova površina je

$$mes(A) = b^2 = (\frac{a}{2}\sqrt{2})^2 = \frac{a^2}{4} \cdot 2 = \frac{a^2}{2}.$$

Tada je

$$P(A) = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Zadatak 2.31. *U kvadrat je upisan krug. Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tačka u kvadratu pripada i krugu.*



Slika 2.5

Rešenje. Kako su $mes(\Omega) = a^2$ i $mes(A) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi$, to je

$$P(A) = \frac{\frac{a^2}{4}\pi}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Zadatak 2.32. *Tačka $M(x, y)$ je na slučajan način izabrana u kvadratu čije tačke $M(x, y)$ zadovoljavaju uslove $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. Odrediti verovatnoću da će slučajno izabrana tačka $M(x, y)$ pripadati i podskupu određenim uslovima:*

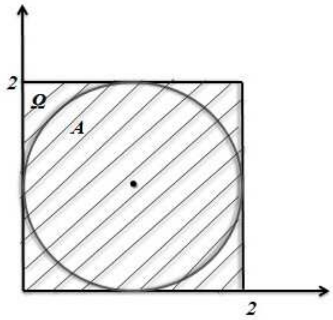
(a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$;

(b) $1 < x + y < 3$;

(c) $y = x$.

Rešenje. Ω je kvadrat stranice 2 pa je $mes(\Omega) = 4$

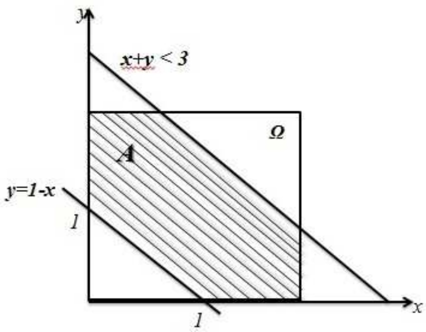
(a) Označimo sa A događaj da je izabrana tačka M u upisanom krugu kvadrata (Slika 2.6). Kako je $mes(A) = \pi$ to je $P(A) = \frac{\pi}{4}$



Slika 2.6

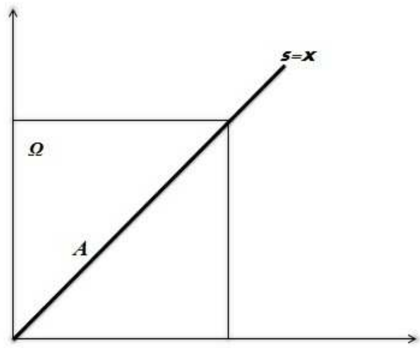
(b) Označimo sa B događaj da je izabrana tačka M u delu kvadrata koji se nalazi između paralelnih pravih $y = 1 - x$ i $y = 3 - x$ (slika 2.7). Događaj B^c je da tačka padne u jedan od dva jednakokraka pravougla trougla katete 1 pa je $mes(B^c) = 1$, pa je $P(B^c) = \frac{1}{4}$. Tražena verovatnoća je

$$P(B) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



Slika 2.7

(c) Označimo sa C događaj da izabrana tačka M pripada pravoj $y = x$ (Slika 2.8). Kako je $mes(C) = 0$, to je i $P(C) = 0$.



Slika 2.8

Zadatak 2.33. *U kutiji se nalaze* 4 *bele i* 8 *crnih kuglica. Izvlačimo dve kuglice jednu za drugom bez vraćanja. Izračunati verovatnoću sledećih događaja:*

(a) A *- prva izvučena kuglica bude bela;*

(b) B *- obe kuglice su bele.*

Rešenje. (a) Primenom formule za jednako verovatne elementarne događaje dobija se:

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

(b) Posmatrajmo događaje:

A - prva izvučena kuglica je bela,

B - druga izvučena kuglica je bela,

C - obe izvučene kuglice su bele

Tada je

$$\begin{aligned} P(C) &= P(AB) \\ &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{11} \\ &= \frac{1}{11}. \end{aligned}$$

`Napomena.` U slučaju da se izvučena kuglica vraća nazad u kutiju verovatnoća događaja B ne zavisi od realizacije događaja A, pa je:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{3}.$$

Zadatak 2.34. *Bacaju se dve kocke i registruju brojevi na gornjim stranama, Ako je zbir brojeva na gornjim stranama kocaka* 10*, odrediti verovatnoću da na jednoj od njih bude broj* 6*.*

Rešenje. Neka su:

A - pojavljuje se zbir 10;

B - pojavljuje se broj 6 na jednoj od njih.

$B|A$ - pojavljuje se broj 6 na jednoj od njih pod uslovom da se pojavio zbir 10.

Skup svih mogućih ishoda Ω ima $n = |\Omega| = 36$ elemenata (Zadatak 2.8). Kako su

$$A = \{(4,6), (5,5), (6,4)\},$$

$$AB = \{(4,6), (6,4)\}.$$

to su

$$P(A) = \frac{3}{36},$$

$$P(AB) = \frac{2}{36},$$

pa je:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{2}{3}.$$

Zadatak 2.35. *Novčić se baca tri puta i registruju se pojavljivanje pisma P ili grba G na gornjoj strani pri bacanju.*

(a) Ako se prva dva puta padne pismo, koja je verovatnoća da će i treći put pasti pismo?

(b) Ako u prvom bacanju padne pismo, kolika je verovatnoća da u druga dva bacanja bude najmanje jedan grb?

Rešenje. U rešavanju ovog zadatka koristimo rešenje Zadatka 2.28 ((a), (b)) Posmatrajmo događaje:

(a) A - prva dva puta pada pismo;

B - treći put pada pismo;

AB - sva tri puta pada pismo;

$B|A$ - treći put je palo pismo pod uslovom da je prva dava puta palo pismo.

Kako su

$$A = \{PPP, PPG\},$$

$$AB = \{PPP\},$$

to su, primenom definicije

$$P(A) = \frac{2}{8}, \quad P(AB) = \frac{1}{8},$$

pa je:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2}.$$

Slično kao pod (a). Posmatrajmo događaje:

(b) C - prvi put pada pismo;

D - u druga dva bacanja pada najmanje 1 grb;

CD - prvi put pada pismo, a u ostala dva bacanja najmanje 1 grb.

Tada

$$C = \{PPP, PPG, PGP, PGG\}, \text{ pa je } P(C) = \frac{4}{8},$$
$$D = \{PPG, PGP, PGG, GPG, GGP, GGG\},$$
$$CD = \{PPG, PGP, PGG\}, \text{ pa je } P(CD) = \frac{3}{8},$$

Tražena verovatnoća je

$$P(D|C) = \frac{P(CD)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{3}{4}.$$

Zadatak 2.36. *Konsultantska firma učestvuje na* 2 *tendera koje su raspisale dve multinacionalne korporacije. Rukovodioci firme su procenili da je verovatnoća da firma dobije angažman od prve kompanije* $0,45$. *Takođe procenjuju da verovatnoća da dobiju posao od druge kompanije pod uslovom da su je dobili od prve iznosi* $0,9$. *Koje su šanse firme da dobije oba posla?*

Rešenje. Posmatrajmo sledeće događaje sa

A - firma dobija posao od prve kompanije,

$B|A$ - firma dobija posao od druge kompanije pod uslovom da je dobila od prve,

AB - firma dobija oba posla.

Na osnovu uslova zadatka je $P(A) = 0,45$, $P(B|A) = 0,9$. Tražena verovatnoća je

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B|A) \\ &= 0,45 \cdot 0,9 \\ &= 0,405. \end{aligned}$$

Zadatak 2.37. *kutija sadrži* 2 *zelene,* 5 *crvenih i* 3 *crne kuglice. Izvlače se dve kuglice redom jedna za drugom bez vraćanja u kutiju. Naći verovatnoću sledećih događaja:*

(a) izvučene su 2 *zelene kuglice;*

(b) izvučene su 2 *crvene kuglice;*

(c) izvučene su 2 *crne kuglice;*

(d) prva kuglica je crvena, a druga crna;

(e) prva kuglica je zelena, a druga crvena.

Rešenje. Označimo događaje:

A_i - u i - tom izvlačenju izvučena je zelena kuglica,

B_i - u i - tom izvlačenju izvučena je crvena kuglica,

C_i - u i - tom izvlačenju izvučena je crna kuglica.

gde je $i = 1, 2$. Poismatrajmo događaj

(a) A - obe izvučene kuglice su zelene.

Kako je $A = A_1A_2$, to važi

$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{45}$;

(b) Slično kao pod (a). Ako je $B = B_1B_2$ događaj da su izvučene kuglice crvene tada je

$P(B) = P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{2}{9}$.

(c) Slično kao pod (a) i (b). Važi $P(C) = \frac{1}{15}$, gde je C događaj da su obe izvučene kuglice crne.

(d) Posmatrajmo događaj

D - prva izvučena je crvena a druga crna.

Tada je:

$P(D) = P(B_1C_2) = P(B_1)P(C_2|B_1) = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{6}$.

(e) Slično kao pod (d).

$P(E) = P(A_1B_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{5}{9} = \dfrac{1}{9}$.

Zadatak 2.38. *U kutiji je* 12 *sijalica od kojih su* 4 *neispravne. Na slučajan način izvlačimo* 3 *sijalice jednu za drugom bez vraćanja. Naći verovatnoću da su sve tri izvučene sijalice ispravne.*

Rešenje. Posmatrajmo događaje:

A_i - u i - tom izvlačenju izvučena je ispravna sijalica, $(i = 1, 2, 3)$

A - sve tri sijalice su ispravne.

Tada je $A = A_1A_2A_3$, pa je

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2A_3) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \\ &= \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \\ &= \frac{14}{55}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.39. *Dva strelca gađaju jedan za drugim isti cilj. Verovatnoća da prvi strelac pogodi cilj je* $0,7$*, a verovatnoća da drugi strelac pogodi je* $0,4$*. Izračunati verovatnoću:*

(a) da oba strelca pogode cilj;

(b) da prvi pogodi, a drugi promaši;

(c) da bar jedan pogodi cilj;

(d) da tačno jedan pogodi cilj.

Rešenje. Posmatrajmo sledeće događaje:
A - prvi strelac je pogodio cilj,
B - drugi strelac je pogodio cilj,
AB - oba strelca su pogodila cilj,
AB^c - prvi je pogodio, drugi promašio,
$A \cup B$ - bar jedan je pogodio cilj.
Primetimo da su A i B nezavisni događaji, što ćemo koristiti u rešavanju zadatka

(a) Verovatnoća da oba strelca pogode cilj je

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ &= 0,7 \cdot 0,4 \\ &= 0,28. \end{aligned}$$

(b) Korišćenjem osobine nezavisnih događaja se dobija

$$\begin{aligned} P(AB^c) &= P(A)P(B^c) \\ &= 0,7 \cdot (1 - 0,4) \\ &= 0,42. \end{aligned}$$

(c) Verovatnoća da bar jedan od njih pogodi cilj je

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0,7 + 0,4 - 0,7 \cdot 0,4 \\ &= 0,82. \end{aligned}$$

(d) Kako su AB^c i A^cB isključivi događaji, to važi

$$\begin{aligned} P(AB^c + A^cB) &= P(AB^c) + P(A^cB) \\ &= P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) \\ &= 0,42 + 0,3 \cdot 0,4 \\ &= 0,54. \end{aligned}$$

Zadatak 2.40. *Na ispitu* 2 *studenta biraju po jednu od* 10 *cedulja. Svaki student zna odgovore na pitanja koja se nalaze na* 5 *istih cedulja. Naći verovatnoće događaja:*

(a) prvi student je izvukao cedulju sa pitanjima koje zna;

(b) oba studenta su izvukla cedulje sa pitanjima koja znaju;

(c) drugi student je izvukao cedulju sa pitanjima koje zna.

Rešenje. Neka su događaji
A_i - i - ti student je izvukao cedulju sa pitanjima koje zna, $i = 1, 2$.

(a) Kako je $|A_i| = 5$, to je
$$P(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{5}{10} = 0,5 \ \ (i = 1, 2).$$

(b) A_1A_2 Kako je ovo događaj da su oba studenta izvukla pitanja koja znaju, to je

$$P(A_1A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}.$$

(c) Posmatrajmo događaj

B - drugi student je izvukao cedulju sa pitanjima koje zna. Kako je $B = A_1A_2 \cup A_1^cA_2$, a A_1A_2 i $A_1^cA_2$ isključivi događaji to važi:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1A_2) + P(A_1^cA_2) \\ &= \frac{2}{9} + P(A_2|A_1^c)P(A_1^c) \\ &= \frac{2}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.41. *Prema evidenciji o potrošnji rezervnih delova za jedan tip automobila ustanovljeno je da se deo A zamenjuje u 36% , deo B u 42%, a oba ta dela u 30% slučajeva.*

(a) Može li se na osnovu ovih podataka izvesti zaključak o zavisnosti zamene delova A i B kod jednog automobila?

(b) Naći verovatnoću, da prilikom servisa motora deo B bude zamenjen, ako je deo A zamenjen.

Rešenje. Posmatrajmo događaje
A - zamenjen je deo A;
B - zamenjen je deo B;
AB - zamenjeni su i A i B;
Na osnovu uslova zadatka $P(A) = 0,36$, $P(B) = 0,42$, $P(AB) = 0,30$.

(a) Kako je

$$P(A) \cdot P(B) = 0,36 \cdot 0,42 = 0,1512 \neq 0,30 = P(AB),$$

to događaji nisu nezavisni i zamena jednog dela uslovljava zamenu drugog.

(b) $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0,30}{0,36} = 0,83.$

Zadatak 2.42. *Od 100 radnika 22 ima visoku kvalifikaciju, a 78 srednju. Slučajno se bira 1 radnik, a zatim od svih 100 radnika ponovo još jedan. Kolika je verovatnoća događaja:*

(a) A - oba izabrana radnika imaju visoku kvalifikaciju;

(b) B - bar 1 ima visoku kvalifikaciju;

(c) C - izabran je prvo radnik sa visokom kvalifikacijom, a onda sa srednjom;

(d) D - izabrani radnici su različitih kvalifikacija.

Rešenje. (a) Događaji

A_1 - prvi izabrani radnik ima visoku kvalifikaciju i

A_2 - drugi izabrani radnik ima visoku kvalifikaciju

su nezavisni, pa je

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{22}{100} \cdot \frac{22}{100} = 0,0484.$$

(b) B Posmatrajmo događaje

B_1 - prvi izabrani radnik ima srednju kvalifikaciju,

B_2 - drugi izabrani radnik ima srednju kvalifikaciju.

koji su nezavisni. Kako je $B = (B_1B_2)^c$, to sledi

$$\begin{aligned} P(B) = P((B_1B_2)^c) &= 1 - P(B_1B_2) \\ &= 1 - P(B_1)P(B_2) \\ &= 1 - \frac{78}{100} \cdot \frac{78}{100} \\ &= 0,3916. \end{aligned}$$

(c) Kako je $C = A_1B_2$, to sledi

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1B_2) \\ &= P(A_1)P(B_2) \\ &= \frac{22}{100} \cdot \frac{78}{100} \\ &= 0,1716. \end{aligned}$$

(d) Kako je $D = (A_1B_2) \cup (A_2B_1)$, a A_1B_2 i A_2B_1 isključivi događaji, to važi

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A_1B_2) + P(A_2B_1) \\ &= 2 \cdot \frac{22}{100} \cdot \frac{78}{100} \\ &= 0,3432. \end{aligned}$$

Zadatak 2.43. *Bacaju se tri novčića i registruje pojavljivanje pisma ili grba na gornjoj strani. Neka su događaji:*

A *- pala su 3 grba ili 3 pisma;*

B *- pala su bar 2 pisma;*

C *- pala su najviše dva grba.*

(a) Da li su događaji A, B i C nezavisni po parovima?

(b) Da li su događaji A, B i C nezavisni u ukupnosti?

Rešenje. Na osnovu dela rešenja u Zadatku 2.28

$$n = |\Omega| = \overline{V}_2^3 = 2^3 = 8.$$

Važi:

$A = \{PPP, GGG\}$, pa je $m = |A| = 2$, a $P(A) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$;

$B = \{PPG, PGP, GPP, PPP\}$, pa je $m = |B| = 4$, a $P(B) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$;

$C = \{PPP, PPG, PGP, GPP, PGG, GPG, GGP\}$, $\quad m = |C| = 7$, $P(C) = \dfrac{7}{8}$;

$AB = \{PPP\}$, $\quad P(AB) = \dfrac{1}{8}$;

$AC = \{PPP\}$, $\quad P(AC) = \dfrac{1}{8}$;

$BC = \{PPG, PGP, GPP, PPP\}$, $\quad P(BC) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$;

$ABC = \{PPP\}$, $\quad P(ABC) = \dfrac{1}{8}$.

(a) Događaji A i B su nezavisni jer važi

$$P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = P(AB).$$

Događaji A i C su zavisni jer važi

$$P(A)P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{32} \neq \frac{1}{8} = P(AC).$$

Događaji B i C su zavisni jer važi

$$P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{16} \neq \frac{1}{2} = P(BC).$$

(b) Na osnovu dela pod (a), ali i na osnovu

$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{64} \neq \frac{1}{8} = P(ABC),$$

sledi da su događaji A, B i C zavisni u ukupnosti.

Zadatak 2.44. *Bacaju se dva novčića i registruje pojavljivanje pisma ili glave na gornjoj strani. Neka su događaji:*

A - pala je glava na prvom novčiću;

B - pala je glava na drugom novčiću;

C - pala je glava na tačno jednom novčiću.

(a) Ispitati nezavisnost ovih događaja po parovima.

(b) Da li su događaji A, B i C nezavisni?

Rešenje. Skup elementarnih događaja je

$$\Omega = \{PP, PG, GP, GG\} \qquad (n = |\Omega| = 4).$$

Kako su :

$$\begin{aligned} A &= \{GG, GP\}, \\ B &= \{GG, PG\}, \\ C &= \{PG, GP\}, \end{aligned}$$

to su:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

Važi i:

$$\begin{aligned} AB = \{GG\}, \\ AC = \{GP\}, \\ BC = \{PG\}, \end{aligned}$$

pa su

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}.$$

(a) Kako je

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(AB),$$

to su događaji A i B nezavisni. Na sličan način se pokazuje da su i događaji A i C, kao i B i C nezavisni.

(b) Pošto je $ABC = \emptyset$, to je $P(ABC) = 0$. Kako važi

$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8} \neq 0,$$

to događaji A, B i C nisu nezavisni u ukupnosti, pa nisu ni nezavisni.

Zadatak 2.45. *Tržišni analitičar predviđa da je verovatnoća rasta berze za narednu godinu* $0,7$ *pod uslovom pozitivnog privrednog rasta, i* $0,2$ *u suprotnom. On takođe predviđa da je verovatnoća pozitivnog privrednog rasta za narednu godinu* $0,8$*. Izračunati verovatnoću da berza raste tokom sledeće godine.*

Rešenje. Potpun sistem događaja čine sledeće hipoteze:
H_1 - privreda beleži rast.
H_2 - privreda ne beleži rast.
Neka je A događaj da berza raste. Označimo sa
$A|H_1$ - rast berze u uslovima privrednog rasta.
$A|H_2$ - rast berze u uslovima kada privreda ne raste.
Prema uslovu zadatka

$$\begin{aligned} P(H_1) = 0,8 \qquad & P(H_2) = 0,2 \\ P(A|H_1) = 0,7 \qquad & P(A|H_2) = 0,2 \end{aligned}$$

Na osnovu formule totalne verovatnoće važi:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) \\ &= 0,8 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,2 \\ &= 0,6. \end{aligned}$$

Zadatak 2.46. *Na ispit iz poslovne statistike je izašlo* 60% *studenata koji polažu prvi put i* 40% *ostalih. Verovatnoća da će student koji polaže prvi put položiti ispit je* $0,3$, *a za ostale je* $0,4$. *Odrediti verovatnoću da će slučajno izabrani student položiti ispit.*

Rešenje. Neka su hipoteze:
H_1 - student polaže prvi put,
H_2 - student polaže više puta.
Označimo sa A događaj da je student položio ispit.
Na osnovu uslova zadatka je

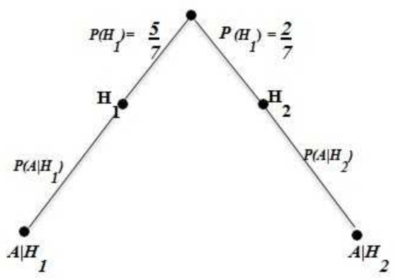
$$P(H_1) = 0,6 \qquad\qquad P(H_2) = 0,4$$

$$P(A|H_2) = 0,3 \qquad\qquad P(A|H_2) = 0,4.$$

Formula totalne verovatnoće daje

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) \\ &= 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,4 \\ &= 0,34. \end{aligned}$$

Zadatak 2.47. *U kutiji se nalaze* 5 *crvenih i* 2 *zelene loptice. Izvlače se dve loptice jedna za drugom. Izračunati verovatnoću da druga izvučena loptica bude crvena.*



Slika 2.9

Rešenje. Neka su hipoteze:
H_1 - izvučena je crvena kuglica u prvom izvlačenju,
H_2 - izvučena je zelena kuglica u drugom izvlačenju.
Neka je A događaj da je izvučena crvena kuglica u drugom izvlačenju. Označimo sa
$A|H_1$ - izvučena je crvena kuglica pod uslovom da je u prvom izvlačenju izvučena crvena.

$A|H_2$ - izvučena je crvena kuglica pod uslovom da je u prvom izvlačenju izvučena zelena.
Na osnovu uslova zadatka je

$$P(H_1) = \frac{5}{7} \qquad P(H_2) = \frac{2}{7}$$

$$P(A|H_1) = \frac{4}{6} \qquad P(A|H_2) = \frac{5}{6}$$

Primenom formule totalne verovatnoće imamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) \\ &= \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.48. *Kutija sadrži 2 zelene i 5 crvenih loptica. Izvlači se jedna loptica (i ne vraća nazad u kutiju). Ako je izvučena loptica zelene boje u kutiju se dodaje nova crvena loptica i obrnuto, ako je izvučena crvena loptica u kutiju se dodaje nova zelena. Potom se izvlači druga loptica. Koja je verovatnoća da je njena boja zelena?*

Rešenje. Neka su hipoteze:
H_1 - u prvom izvlačenju loptica je crvena,
H_2 - u prvom izvlačenju loptica je zelena.
Označimo sa A događaj da je u drugom izvlačenju izvučena crvena kuglica. Tada je:

$$P(H_1) = \frac{5}{7} \qquad P(H_2) = \frac{2}{7}$$

$$P(A|H_1) = \frac{4}{7} \qquad P(A|H_2) = \frac{6}{7}.$$

Formula totalne verovatnoće daje

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) \\ &= \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{6}{7} \\ &= \frac{32}{49}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.49. *Iz kutije u kojoj su 3 bele i 2 crne loptice prebačene su 2 loptice u kutiju sa 4 bele i 4 crne. Naći verovatnoću da se posle prebacivanja iz druge kutije izvuče bela kuglica.*

Rešenje. Posmatrajmo hipoteze
H_1 - prebacivanje dve bele kuglice iz prve u drugu kutiju,
H_2 - prebacivanje jedne bele i jedne crne,
H_3 - prebacivanje dve crne.

Neka je A događaj da je iz druge kutije izvučena bela kuglica. Važi

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A|H_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
$$P(A|H_2) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$
$$P(A|H_3) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Tada je:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A|H_i) \\ &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} \\ &= 0,5. \end{aligned}$$

Zadatak 2.50. *Date su tri jednake kutije. U prvoj se nalaze dve bele i jedna crna loptica, u drugoj tri bele i jedna crna i u trećoj jedna crna i jedna bela kuglica. Na slučajan način se bira kutija i iz nje uzima loptica. Naći verovatnoću da će izvučena kuglica biti bela.*

Rešenje. Posmatrajmo hipoteze:
H_i - izbor iz i - te kutije, $i = 1, 2, 3$.
Neka je A događaj da bude izvučena bela kuglica.
Na osnovu uslova zadatka (slučajan izbor) važi:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Ako sa $A|H_i$ označimo događaj da je izvučena bela kuglica iz i - te kutije, $i = 1, 2, 3$, onda su:

$$P(A|H_1) = \frac{2}{3}$$
$$P(A|H_2) = \frac{3}{4}$$
$$P(A|H_3) = \frac{1}{2}$$

Na osnovu formule totalne verovatnoće je:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A|H_i) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{23}{36}. \end{aligned}$$

Zadatak 2.51. *Fabrika proizvodi automobilske gume. Tri pogona proizvode respektivno 25%, 35% i 40% celokupne proizvodnje. Pogoni redom daju 5%, 4% i 2% škartova. Slučajna guma iz produkcije pokazala se defektnom. Koja je verovatnoća da je defektna guma proizvedena u prvom, drugom ili trećem pogonu?*

Rešenje. Hipoteze su:
H_1 - guma je proizvedena u prvom pogonu;
H_2 - guma je proizvedena u drugom pogonu;
H_3 - guma je proizvedena u trećem pogonu.
Neka je A događaj da je izabrana dfektna guma.
Na osnovu uslova zadatka je

$$P(H_1) = 0,25 \qquad P(H_2) = 0,35 \qquad P(H_3) = 0,4$$

$$P(A|H_1) = 0,05 \qquad P(A|H_2) = 0,04 \qquad P(A|H_1) = 0,02$$

Formula totalne verovatnoće daje

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A|H_i) \\ &= 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 \\ &= 0,125 + 0,014 + 0,008 \\ &= 0,147. \end{aligned}$$

Primenom Bajesove formule dobijaju se tražene verovatnoće:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,147} = \frac{0,125}{0,147} = 0,8503 \approx 0,85.$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,04}{0,147} = \frac{0,014}{0,147} = 0,0952 \approx 0,095.$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{0,008}{0,147} = 0,05442 \approx 0,054.$$

2.3 Zadaci za vežbu

1. Partner računovodstvene firme analizira rad tima za reviziju. Posebno ga interesuje da li su revizije urađene na vreme. Partner definiše elementarne ishode:

   - ω_1 - revizija urađena pre roka.
   - ω_2 - revizija urađena na vreme.
   - ω_3 - revizija urađena posle roka.

   (a) Ako je izvršena samo jedna revizija, naći skup svih mogućih elementarnih događaja Ω.

   (b) Ako su izvršene dve revizije, naći skup svih mogućih elementarnih događaja Ω.

2. Partner računovodstvene firme analizira rad tima za reviziju. Posebno ga interesuje da li su revizije urađene na vreme. U odnosu na vremenski rok kada su revizije završene, partner definiše elementarne ishode:

- ω_1 - revizija urađena pre roka.
- ω_2 - revizija urađena na vreme.
- ω_3 - revizija urađena posle roka.

Ako su izvršene dve revizije, odrediti događaje:

A - ni jedna revizija nije posle roka.

B - Obe revizije su urađene u istom vremenskom roku.

3. Bračni par ima troje dece. Ako sa A označimo da imaju dečaka, a sa B da imaju devojčicu, opisati:
   - Skup svih mogućih događaja Ω.
   - C - imaju decu istog pola.
   - D - imaju bar jednu ćerku.
   - Imaju više sinova nego ćerki.
4. Lekar pregleda 5 pacijenata od kojih svaki može biti zdrav A ili bolestan B. Opisati skup svih mogućih ishoda Ω. Opisati događaje:
   - Više pacijenata je bolesno nego zdravo.
   - Dva pacijenta su bolesna i tri zdrava.
   - Svi zdravi ili svi bolesni.
   - Više zdravih nego bolesnih pacijenata.
5. Verovatnoća da student A ploži ispit iz statistike je 0,5, a da ga položi student B je 0,3. Studenti polažu ispit nezavisno jedan od drugoga. Odrediti verovatnoće:
   - Bar jedan student je položio ispit.
   - Oba studenta su položila ispit.
   - Ispit je položio samo jedan od njih.
6. Strelac pogađa metu se verovatnoćom 0,4. Koliko puta treba da gađa metu da bi verovatnoća da bar jednom pogodi metu bila 0,99?
7. Kružna meta poluprečnika R je podeljena na koncentrične krugove poluprečnika $R/4$ i $R/2$. Pogodak u zonu najbližu centru nosi 5 poena. Pogodak u srednju zonu nosi 2 poena, a pogodak u perifernu zonu nosi 1 poen. Ako je meta gađana dva puta, naći verovatnoću da je osvojeno 6 poena.
8. U restoranu brze ishrane je utvrđno da je verovatnoća da će kupac naručiti gazirano piće 0,9. Verovatnoća da će naručiti hamburger je 0,6, a da će naručiti pomfrit je 0,5.

   (a) Kolika je verovatnoća da će kupac naručiti i gazirano piće i pomfrit, ako su ova dva događaja nezavisna?

   (b) Utvrđeno je takođe da ako kupac naruči hamburger, verovatnoća da će naručiti i pomfi je 0,8. Odrediti verovatnoću da će porudžbina sadržati hamburger i pomfit.

9. Proizvođač sapuna ima dva pogona, jedan u Zrenjaninu, a drugi u Kikindi. U Zrenjaninu se proizvodi 60% proizvoda, a u Kiknidi 40%. Menadžer za kvalitet je nakon uzorkovanja uvrdio da je 5% proizvoda proizvedenih u Zrenjaninu i 10% proizvoda proizvedenih u Kikindi neupotrebljivo zbog lošeg kvaliteta. Svi proizvoda iz oba pogona se šalju u zajedničko skladište, gde se skladište kako pristižu, pa se ne zna iz kojeg su pogona. Kada se proda loš proizvod, pojavljuju se troškovi ne samo zbog zamene lošeg proizvoda, nego i zbog gubitka ugleda kompanije. Menadžer želi da ove troškove pošteno raspodeli na dva pogona. Zato traži odgovore na sledeća pitanja:

   (a) Kolika je verovatnoća da je proizvod izabran slučajno iz skladišta lošeg kvaliteta?

   (b) Koja je verovatnoća da je proizvod proizveden u Zrenjaninu, ako je izabran proizvod lošeg kvaliteta?

   (c) Koja je verovatnoća da je proizvod proizveden u Kikindi, ako je izabran proizvod lošeg kvaliteta?

   (d) Koji procenat troškova zbog lošeg proizvoda treba dodeliti pogonu u Zrenjanin, a koji pogonu u Kikindi?

10. Proizvođač konzervirane hrane obrađuje provrće dobijeno u letnjoj berbi. Kontrolor kvaliteta je pronašao konzervu koja nije dobro zatvorena. Konzerve te vrste se proizvode na tri proizvodne linije i menadžer želi da proceni koja je proizvodna linija najverovatnije proizvela neispravan proizvod. Na osnovu podataka iz sledeće tabele

Linija	% proizvedenih proizvoda	% neispravnih proizvoda
1	40%	5%
2	35%	10%
3	25%	7%

    izračunati verovatnoće da je proizvodna linija 1,2,3 proizvela neispravan proizvod.

Glava 3

Slučajna promenljiva

3.1 Teorijske osnove

- **Slučajna promenljiva. Funkcija raspodele**

1^o <u>*Definicija. Oznake*</u>

Slučajna promenljiva X: Preslikavanje $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ koje elementarnom događaju $\omega \in \Omega$ pridružuje realni broj $X(\omega)$.

- Oznake slučajnih promenljivih: X, Y, Z,...

Realizacije slučajne promenljive X: vrednosti $X(\omega_i) = x_i$ koje slučajna promenljiva uzima;
Skup realizacija, vrednosti, slučajne promenljive X: $\mathcal{R}_X = X(\Omega)$.

2^o <u>*Podela slučajnih promenljivih*</u>

Diskretne: $\mathcal{R}_X$ diskretan skup.
Neprekidne: $\mathcal{R}_X$ neprekidan skup.
Mešovite.

3^o <u>*Funkcija raspodele*</u>

Funkcija raspodele verovatnoća slučajne promenljive X, ili, kraće, funkcija raspodele: Funkcija $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$F_X(x) = P\{X < x\}$, (u nekim knjigama i $F_X(x) = P\{X \leq x\}$),

tj. funkcija koja predstavlja verovatnoću da slučajna promenljiva X uzme vrednost manju od x, $x \in \mathbb{R}$.

Označava se i sa $F(x)$ ako je jasno o kojoj se slučajnoj promenljivoj radi.

Osnovne osobine:

1. neopadajuća funkcija: $x_1 < x_2 \Longrightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$;
2. uzima vrednosti izmedju 0 i 1:
   $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

3. neprekidna sa desne strane: $\lim\limits_{\epsilon \to 0} F(x+\epsilon) = F(x)$;
4. $P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

- **Diskretne slučajne promenljive**

Diskretna slučajna promenljiva X: postoji konačan ili prebrojiv skup vrednosti $\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ takav da je $P\{X \in \mathcal{R}_X\} = 1$.

Važi:

- $\mathcal{R}_X = \bigcup\limits_k \{X = x_k\}$;
- $\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \varnothing$, $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$;
- ako je $p_k = P\{X = x_k\}$, $1 \leq k \leq n$ ili $k \in \mathbb{N}$ tada je
  $\sum\limits_k P\{X = x_k\} = \sum\limits_k p_i = 1$.

Zakon raspodele verovatnoća diskretne slučajne promenljive X: skup vrednosti $\mathcal{R}_X$ zajedno sa odgovarajućim verovatnoćama

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

Funkcija raspodele diskretne slučajne promenljive X:

$F(x) = \sum\limits_{k : x_k < x} P\{X = x_k\}$.

- Specijalno, $\mathcal{R}_X$ konačan skup:

$$\begin{cases} 0, & x < x_1; \\ p_1 & x_1 \leq x < x_2; \\ p_1 + p_2 & x_2 \leq x < x_3; \\ \vdots & \\ 1 & x \geq x_n. \end{cases}$$

- **Neke numeričke karakteristike diskretne slučajne promenljive**

4^o Parametri (pokazatelji) centralne tendencije

- *Matematičko očekivanje*: $m = E(X) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i$.
- *Modus* M_o: vrednost sa najvećom verovatnoćom.
- *Medijana* M_e: vrednost za koju važi $F_X(M_e) = 1/2$.
- Običan *momenat reda* r, $r \in \mathbb{N}$: $m_r = E(X^r) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^r p_i$.
- *Centralni momenat reda* r, $r \in \mathbb{N}$: $\mu_r = E[(X - E(X))^r]$.

5^o Parametri (pokazatelji) rasipanja oko centralnih vrednosti

- *Disperzija* (*varijansa*):
  $\sigma^2 = \mu_2 = D(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E^2(X)$.
- *Standardno odstupanje* (*standardna devijacija*): $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

- **Neprekidne slučajne promenljive**

(Apsolutno) Neprekidna slučajna promenljiva X: postoji nenegativna funkcija $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, takva da je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Skup vrednosti $\mathcal{R}_X$ je interval, podskup skupa $\mathbb{R}$ ili sam $\mathbb{R}$;
- $f(x)$ se zove *gustina raspodele* slučajne promenljive X;
- Grafik funkcije $f(x)$ se naziva kriva gustine raspodele, ili, kraće, *kriva raspodele verovatnoća*.

Važne osobine:

- površina figure određene x - osom i krivom gustine raspodele jednaka je 1, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$;
- verovatnoća da slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa uzme vrednost u intervali (a, b) jednaka je površini krivolinijskog trapeza ispod krive gustine $f(x)$ nad odsečkom $[a, b]$

$P\{a < X < b\} = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

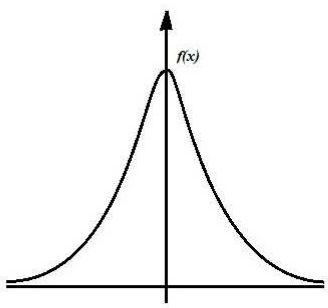
- kako je $P\{X = x\} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, to je

$$\begin{aligned} P\{a < X < b\} &= P\{a \le X < b\} \\ &= P\{a < X \le b\} \\ &= P\{a \le X \le b\} \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

6^o Normalna standardizovana (normirana) raspodela

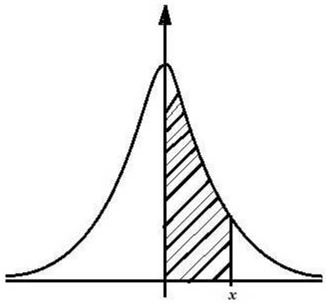
$X^* : \mathcal{N}(0,1)$

· Kriva gustine raspodele simetrična u odnosu na y - osu (Slika 3.1);



Slika 3.1

· Funkcija raspodele (Slika 3.2): $F_{X^*}(x) = 0,5 + \Phi(x)$, gde je



Slika 3.2

$\Phi(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = P\{0 \leq X \leq x\}$.

Vrednosti $\Phi(x)$ date su u Tabeli 3 (?) u Prilogu.

· Funkcija $\Phi(x)$ se koristi za izračunavanje verovatnoće

$P\{a < X^* < b\} = \Phi(b) - \Phi(a)$.

7^o Normalna (Gausova) raspodela

$X^* : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

· Kriva gustine raspodele simetrična u odnosu na pravu $x = m$.

Standardizacija: postupak prelaska sa normalne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ na standardizovanu normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0,1)$

- zadat formulom $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$;
- važi:

$$\begin{aligned} P\{a < X < b\} &= P\left\{\frac{a-m}{\sigma} < X^* < \frac{b-m}{\sigma}\right\} \\ &= \Phi(b) - \Phi(a). \end{aligned}$$

3.2 Rešeni zadaci

Zadatak 3.1. *Eksperiment se sastoji od* 3 *nezavisna izvođenja u kome se beleži realizacija događaja A. Opisati slučajnu promenljivu X koja označava broj realizacija događaja A.*

Rešenje. Elementarni događaji su:
$\omega_1 = AAA \quad \omega_2 = AAA^c \quad \omega_3 = AA^cA \quad \omega_4 = AA^cA^c$
$\omega_5 = A^cAA \quad \omega_6 = A^cAA^c \quad \omega_7 = A^cA^cA \quad \omega_8 = A^cA^cA^c \quad ,$
pa je skup elementarnih događaja

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}.$$

Svakom od elementarnih događaja $\omega \in \Omega$ možemo pridružiti broj $X(\omega)$ koji označava broj realizacija događaja A:

$$X(\omega_1) = 3 \quad X(\omega_2) = X(\omega_3) = X(\omega_5) = 2,$$
$$X(\omega_4) = X(\omega_6) = X(\omega_7) = 1, X(\omega_8) = 0.$$

Slučajna promenljiva X je preslikavanje

$$X : \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\} \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}.$$

Skup $\mathcal{R}_X = X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ je skup realizacija slučajne promenljive X.

Zadatak 3.2. *Istovremeno se bacaju dve homogene numerisane kocke. Odrediti skup realizacija slučajne promenljive X koja predstavlja zbir brojeva koji se pojavljuju na obe kocke.*

Rešenje. Skup mogućih ishoda je

$$\Omega = \{(i, j) : \ 1 \leq i, j \leq 6\}, \quad \text{(videti zadatak 2.8)}$$

Realizacije slučajne promenljive X su:

$$\begin{array}{llllll}
X(1,1) = 2 & X(1,2) = 3 & X(1,3) = 4 & X(1,4) = 5 & X(1,5) = 6 & X(1,6) = 7 \\
X(2,1) = 3 & X(2,2) = 4 & X(2,3) = 5 & X(2,4) = 6 & X(2,5) = 7 & X(2,6) = 8 \\
X(3,1) = 4 & X(3,2) = 5 & X(3,3) = 6 & X(3,4) = 7 & X(3,5) = 8 & X(3,6) = 9 \\
X(4,1) = 5 & X(4,2) = 6 & X(4,3) = 7 & X(4,4) = 8 & X(4,5) = 9 & X(4,6) = 10 \\
X(5,1) = 6 & X(5,2) = 7 & X(5,3) = 8 & X(5,4) = 9 & X(5,5) = 10 & X(5,6) = 11 \\
X(6,1) = 7 & X(6,2) = 8 & X(6,3) = 9 & X(6,4) = 10 & X(6,5) = 11 & X(6,6) = 12
\end{array}$$

Skup realizacija slučajne promenljive X je

$$\mathcal{R}_X = X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Zadatak 3.3. *Lopta se baca u koš dok se ne postignu 2 pogotka ili ne izvedu 4 bacanja. Neka je X broj bacanja, a Y broj promašaja. Odrediti skup mogućih ishoda i realizacija slučajnih promenljivih X i Y.*

Rešenje. Označimo sa:
0 - promašaj,
1 - pogodak.
Skup elementarnih događaja je

$$\Omega = \{11; 011; 101; 0000; 0001; 0010; 0011; 0100; 0101; 1000; 1001\}.$$

Preslikavanja su data u sledećoj šemi:

ω	11	011	101	0000	0001	0010	0100	0101	1000	1001
$X(\omega)$	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4
$Y(\omega)$	0	1	1	4	3	2	3	2	3	2

Skup realizacija slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{2, 3, 4\}$, a slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Zadatak 3.4. *Eksperiment se sastoji u bacanju* 3 *novčića.*

(a) Odrediti skup realizacija slučajne promenljive X koja predstavlja broj grbova, kao i verovatnoće sa kojima te vrednosti ostvaruje, tj. odrediti njen zakon raspodele;

(b) Prikazati grafički zakon raspodele;

(c) Odrediti funkciju raspodele $F(x)$, i prikazati je grafički;

(d) Odrediti $P\{\frac{1}{2} \leq X < \frac{5}{2}\}$.

Rešenje. (a) Skup elementarnih događaja je

$$\Omega = \{PPP, PPG, PGP, GPP, PGG, GPG, GGP, GGG\}.$$

Realizacije slučajne promenljive X su redom:
$X(PPP) = 0,\ X(PPG) = 1,\ X(PGP) = 1,\ X(GPP) = 1,$
$X(PGG) = 2,\ X(GPG) = 2,\ X(GGP) = 2,\ X(GGG) = 3,$
pa je,

$$\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Odgovarajuće verovatnoće su

$$p_0 = P\{X = 0\} = P\{PPP\} = \frac{1}{8},$$
$$p_1 = P\{X = 1\} = P\{PPG, PGP, GPP\} = \frac{3}{8},$$
$$p_2 = P\{X = 2\} = P\{PGG, GPG, GGP\} = \frac{3}{8},$$
$$p_3 = P\{X = 3\} = P\{GGG\} = \frac{1}{8}.$$

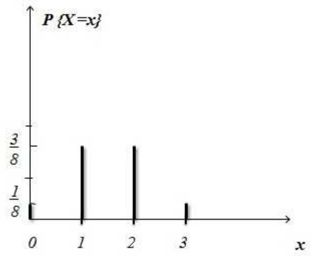
Zakon raspodele ove slučajne promenljive je:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

(b)

(c) Važi

1. ako je $x < 0$ tada je $F(x) = P\{X < x\} = 0$,
2. za $0 \leq x < 1$ tada je $F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} = p_0 = \dfrac{1}{8}$,



Slika 3.3

3. ako je $1 \leq x < 2$ tada je

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X < x\} \\ &= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

4. ako je $2 \leq x < 3$ tada je

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X < x\} \\ &= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 3\} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{7}{8}, \end{aligned}$$

5. ako je $x \geq 3$, tada je $F(x) = 1$.

Tražena funkcija raspodele je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{8} & 0 \leq x < 1; \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2; \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 3; \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

(d) $P\left\{\frac{1}{2} \leq X < \frac{5}{2}\right\} = F\left(\frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$

Zadatak 3.5. *Slučajna promenljiva X je broj koji se javlja na gornjoj strani prilikom bacanja kocke. Odrediti:*

(a) zakon raspodele;

(b) funkciju raspodele;

(c) verovatnoće događaja $\{1 < X \leq 4\}$, $\{2 < X \leq 3\}$;

(d) matematičko očekivanje.

Rešenje. (a)

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{1}{6} & 1 \leq x < 2; \\ \frac{1}{3} & 2 \leq x < 3; \\ \frac{1}{2} & 3 \leq x < 4; \\ \frac{2}{3} & 4 \leq x < 5; \\ \frac{5}{6} & 5 \leq x < 6; \\ 1 & x \geq 6. \end{cases}$$

(c) $P\{1 < X \leq 4\} = F(4) - F(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$P\{2 < X \leq 3\} = F(3) - F(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(d)

$$\begin{aligned} m = E(X) &= \sum_{i=1}^{6} x_i p_i \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 3,5. \end{aligned}$$

Zadatak 3.6. *Slučajna promenljiva ima zakon raspodele:*

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

Odrediti momente prvog, drugog i trećeg reda.

Rešenje.

$$m_1 = m = E(X) = -1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{11}{12};$$

$$m_2 = E(X^2) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{9}{4};$$

$$m_3 = E(X^3) = (-1)^3 \cdot \frac{1}{4} + 1^3 \cdot \frac{1}{3} + 2^3 \cdot \frac{5}{12} = \frac{41}{12}.$$

Zadatak 3.7. *Slučajna promenljiva X ima zakon raspodele*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Odrediti:

(a) matematičko očekivanje;

(b) momente drugog i trećeg reda;

(c) modus;

(d) centralne momente drugog (disperziju) i trećeg reda;

(e) standardnu devijaciju.

Rešenje.

(a) $m = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$

(b) $m_2 = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$

$$m_3 = 0^3 \cdot \frac{1}{4} + 1^3 \cdot \frac{1}{2} + 2^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}.$$

(c) $M_0 = 1$ (vrednost sa najvećom verovatnoćom)

(d)

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mu_2 &= E(X-1)^2 \\ &= (0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= E(X-1)^3 \\ &= (0-1)^3 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^3 \cdot \frac{1}{2} + (2-1)^3 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(e) $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,71$.

Zadatak 3.8. *Slučajna promenljiva X ima zakon raspodele*

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Odrediti njenu disperziju i standardnu devijaciju.

Rešenje. $m = E(X) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} = 2,25.$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = D(X) &= (1 - \frac{9}{4})^2 \cdot \frac{1}{4} + (2 - \frac{9}{4})^2 \cdot \frac{1}{4} + (3 - \frac{9}{4})^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{16} = 0,6875. \end{aligned}$$

Disperzija se može izračunati i na drugi način:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{23}{4} = 5,75. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = D(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \frac{23}{4} - \frac{81}{16} = \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{11}{16}} = 0,8292.$$

Zadatak 3.9. *Slučajna promenljiva X ima normalnu normiranu raspodelu, tj.* $X : \mathcal{N}(0,1)$*. Neka je* $a \in \mathbb{R}^+$ *pozitivan realan broj. Odrediti verovatnoće:*

(a) $P\{X > a\}$;

(b) $P\{X < a\}$;

(c) $P\{-a < X < 0\}$;

(d) $P\{X > -a\}$;

(e) $P\{X < -a\}$.

Rešenje.

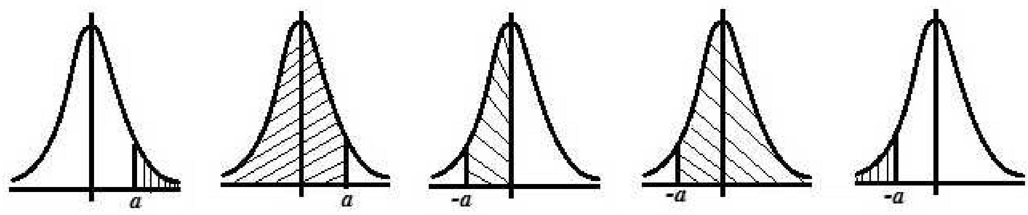
(a) $P\{X > a\} = 0,5 - P\{0 < X < a\} = 0,5 - (\Phi(a) - \Phi(0)) = 0,5 - \Phi(a)$

(b) $P\{X < a\} = 0,5 + P\{0 < X < a\} = 0,5 + \Phi(a)$

(c) $P\{-a < X < 0\} = \Phi(0) - \Phi(-a) = -(-\Phi(a)) = \Phi(a)$

(d) $P\{X > -a\} = 0,5 + P\{-a < X < 0\} = 0,5 + \Phi(a)$

(e) $P\{X < -a\} = 0,5 - P\{-a < X < 0\} = 0,5 - \Phi(a)$



Slika 3.4

Zadatak 3.10. *Slučajna promenljiva* X *ima standardizovanu normalnu raspodelu, tj.* $X : \mathcal{N}(0,1)$*. Odrediti verovatnoće:*

(a) $P\{X < 2\}$*;*

(b) $P\{0 < X \leq 1,42\}$*;*

(c) $P\{-1,79 \leq X < 0,54\}$*.*

Rešenje.

(a) $P\{X < 2\} = 0,5 + \Phi(2) = 0,5 + 0,47725 = 0,97725.$

(b) $P\{0 < X \leq 1,42\} = \Phi(1,42) = 0,42220.$

(c)

$$\begin{aligned} P\{-1,79 < X < 0,54\} &= \Phi(0,54) - \Phi(-1,79) \\ &= \Phi(0,54) + \Phi(1,79) \\ &= 0,20540 + 0,46327 \\ &= 0,66867. \end{aligned}$$

Zadatak 3.11. *Neka je* $X : \mathcal{N}(150,100)$*. Odrediti sledeće verovatnoće:*

(a) $P\{X < 140\}$*;*

(b) $P\{X \geq 170\}$*;*

(c) $P\{135 \leq X < 160\}$*.*

Rešenje. Kako X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(150,100)$, sledi da je $m = 150$, $\sigma^2 = 100$.

(a)

$$\begin{aligned} P\{X < 140\} &= P\{X^* < \frac{140-150}{10}\} \\ &= P\{X^* < -1\} \\ &= 0,5 - \Phi(1) \\ &= 0,5 - 0,34134 \\ &= 0,15866. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
P\{X \geq 170\} &= P\{X^* \geq \frac{170-150}{10}\} \\
&= P\{X^* \geq 2\} \\
&= 0,5 - \Phi(2) \\
&= 0,5 - 0,47725 \\
&= 0,02275.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
P\{135 \leq X < 160\} &= P\{\frac{135-150}{10} \leq X^* < \frac{160-150}{10}\} \\
&= P\{-1,5 \leq X^* < 1\} \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1,5) \\
&= \Phi(1) + \Phi(1,5) \\
&= 0,34134 + 0,43319 \\
&= 0,77453.
\end{aligned}$$

Zadatak 3.12. *Dimenzija prečnika šrafa je slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom sa parametrima $m = 0,5$ mm i $\sigma^2 = 0,01$ mm^2. Kolika je verovatnoća da će prečnik biti između 2,35 i 2,8 mm?*

Rešenje.

$$\begin{aligned}
P\{2,35 < X < 2,8\} &= P\{\frac{2,35-2,5}{0,1} < X^* < \frac{2,8-2,5}{0,1}\} \\
&= P\{-1,5 < X^* < 3\} \\
&= \Phi(3) - \Phi(-1,5) \\
&= \Phi(3) + \Phi(1,5) \\
&= 0,49865 + 0,43319 \\
&= 0,93184
\end{aligned}$$

Zadatak 3.13. *Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(20,4)$, naći:*

(a) $P\{X \leq 2\}$;

(b) $P\{18 < X \leq 25\}$.

Rešenje. $X : \mathcal{N}(20,4) \Longrightarrow m = 20,\ \sigma^2 = 4$

(a)

$$\begin{aligned}
P\{X \leq 2\} &= P\{\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{2-m}{\sigma}\} \\
&= P\{\frac{X-20}{2} \leq \frac{2-20}{2}\} \\
&= P\{X^* \leq -9\} \\
&= 0,5 - (\Phi(0) - \Phi(-0,9)) \\
&= 0,5 - \Phi(0,9) \\
&= 0,5 - 0,31594 \\
&= 0,18406.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
P\{18 < X \leq 25\} &= P\{\frac{18-20}{2} < \frac{X-20}{2} < \frac{25-20}{2}\} \\
&= P\{-2 < X^* < 2,5\} \\
&= \Phi(2,5) - \Phi(-2) \\
&= \Phi(2,5) + \Phi(2) \\
&= 0,49379 + 0,47725 \\
&= 0,97104.
\end{aligned}$$

3.3 Zadaci za vežbu

1. Za koju vrednost parametra k šema

$$X : \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ k & 2k & 3k & 4k & 5k & 6k \end{pmatrix}.$$

predstavlja uspeh studenta na ispitu?

2. U kutiji se nalazi 5 belih i 3 crne kuglice. Iz kutije se bez vraćanja izvlači kuglica sve dok se prvi put ne izvuče bela kuglica. Neka je X broj izvučenih kuglica.

   (a) Odrediti raspodelu slučajne promenljive X.

   (b) Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X.

3. Na putu kretanja automobila se nalaze 4 semafora. Verovatnoća zaustavljanja automobila na prvom semaforu je 0,4, na drugom 0,6 i na trećem 0,5. Semafori rade nezavisno jedan od drugog.

   (a) Naći raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj semafora koje je vozač prošao do prvog zaustavljanja.

   (b) Naći raspodelu slučajne promenljive Y koja predstavlja broj semafora na kojima se vozač zaustavio.

4. Igrač igra igru u kojoj sa verovatnoćom 0,65 gubi 5 dinara, a sa verovatnoćom 0,35 dobija 2 dinara. Odrediti očekivani dobitak igrača u jednoj igri.

5. Broj poziva u hitnoj pomoći u toku sata ima raspodelu

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,075 & 0,1 & 0,25 & 0,2 & 0,175 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Odrediti očekivanu vrednost broja poziva, disperziju, standardnu devijaciju. Koji je najverovatniji broj poziva u toku sata?

6. Slučajna promenljiva X ima normalnu $\mathcal{N}(12, 16)$ raspodelu. Odrediti verovatnoće:

(a) $P\{X > 17\}$;

(b) $P\{|X| < 15,2\}$;

(c) $P\{X < 10\}$;

(d) Naći t tako da je $P\{t < X < 15,2\} = 0,95.$;

7. Hemoglobin kod odraslih ljudi ima normalnu raspodelu $X : \mathcal{N}(120, 100)$.

(a) Koji procenat odraslih ljudi ima vrednost hemoglobina između 109 i 131?

(b) Koji procenat odraslih ljudi ima vrednost hemoglobina veću od 132?

8. Dužina proizvoda je 5 cm sa tolerancijom $\pm 0,1$ cm. Odrediti procenat škarta ako obrada na ovoj mašini ima standardno odstupanje $\sigma = 0,08$ cm.

9. Prosečna površina šuma koje izgore u šumskim požarima u Brazilu je $430\, km^2$ godišnje, sa standardnom devijacijom od $75\, km^2$. Površina koja izgori godišnje ima normalnu raspodelu.

(a) Izračunati verovatnoću da godišnje izgori više od $500\, km^2$ šume.

(b) Izračunati verovatnoću da godišnje izgori manje od $400\, km^2$ šume.

(c) U godinama kad aizgori više od $550\, km^2$ šume potrebana je pomoć dodatnih vatrogasnih timova. Odrediti verovatnoću da će naredne godine biti potrebna pomoć dodatnih vatrogasnih timova.

10. Menadžer bioskopa u Americi je proučavao koliko posetioci bioskopa potroše na piće i kokice koje se prodaju u njihovim bioskopima. Iz studije zasnovane na velikom broju posetilaca dobijeno je da potrošnja ima normalnu raspodelu sa aritmetičkom sredinom 4.11 dolara i standardnom devijacijom 1.37 dolara.

(a) Između koje dve vrednosti se nalazi potrošnja 80% posetilaca, ako pretpostavimo da su te dve vrednosti simetrične u odnosu na aritmetičku sredinu?

(b) Prikazuje se veoma popularan film i očekuje se da će bioskop biti popunjen sledeće dve nedelje. Bioskop ima 1000 mesta. Pomozite manadžeru da proceni očekivanu zaradu od pića i kokica u sledeće dve nedelje.

Glava 4

Statistički skup

4.1 Teorijske osnove

Statistika : prikupljanje, sistematizacija, prikazivanje i obrada podataka koji karakterišu elemente odredjenih skupova sa ciljem da se izvedu zaključci i donesu odluke.

Statistički skup, *osnovni skup* ili ***populacija*** Ω: skup svih elemenata na kojima se prpučava neka pojava.

- Može biti konačan ili beskonačan.
- U ovoj knjizi Ω je konačan skup
  · *Obim populacije*: broj $N = |\Omega|$.
  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$.

Statističko obeležje ili, kraće, *obeležje*: osobina po kojoj se elementi populacije razlikuju, i ona su u osnovi statističke obrade.

Oznake:
· obeležje: $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$;
· vrednosti koje obeležje može uzeti: $\mathcal{R} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

- **Prikazivanje podataka**

Načini prikazivanja:

- nabrajanje - najlakši, ali često i najnepregledniji;
- tabelarni
- grafički.

1^o <u>*Tabelarno prikazivanje podataka*</u>

Neka je $i \in \{1, ..., k\}$.

Apsolutna frekvencija ili *frekvencija* f_i: broj elemenata populacije Ω na kojima obeležje X uzima vrednost x_i

$f_1 + f_2 + ... + f_k = N.$

Relativna frekvencija $p_i = \frac{f_i}{N}$: predstavlja zastupljenost odredjenih elemenata unutar skupa.

- Može biti data i procentualno.

Kumulativna frekvencija $F_i = \sum\limits_{j=1}^{i} f_j$ elementa x_i: zbir svih frekvencija koje prethode i odgovaraju elementu x_i.

- Pretpostavlja sa su vrednosti $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ poredjane po veličini.
- Specijalno: $F_1 = f_1$ i $F_k = N$.

Kumulativna relativna frekvencija $F_i^r = \sum\limits_{j=1}^{i} p_j, \ \ i \in \{1, ..., k\}$.

1^o1. *Diskretno obeležje*

Elementi skupa x_i	frekvencija f_i	relativna frekvencija	kumulativne frekvencije	relativne kumulativne frekvencije
x_1	f_1	p_1	F_1	F_1^r
x_2	f_2	p_2	F_2	F_2^r
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	f_k	p_k	F_k	F_k^r

1^o2. *Neprekidno obeležje. Obeležje sa velikim brojem različitih vrednosti*

Grupisanje u intervale:

- broj intervala k i širina intervala d odredjuju se korišćenjem Strugesove formule:

$k = 1 + 3,322 \log N, \quad d = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}$,

gde su x_{min} i x_{max} najmanja i najveća vrednost u populaciji;
- ne preporučuje se više od $5 \cdot \log N$ intervala;
- često je i sam statistički skup snabdeven nekom unutrašnjom logičnom podelom koje se treba pridržavati pri podeli na intervale.

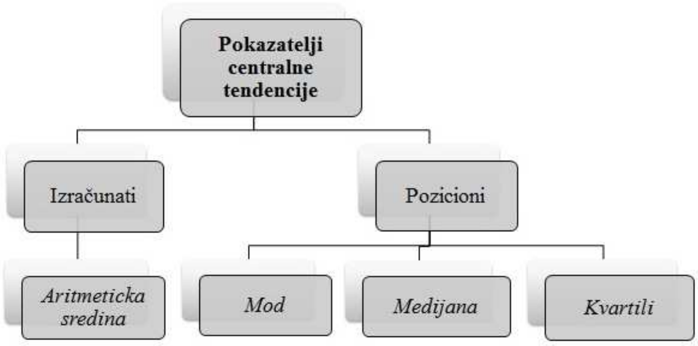
Intervali	frekvencija	relativna frekvencija	kumulativne frekvencije	relativne kumulativne frekvencije
I_1	f_1	p_1	F_1	F_1^r
I_2	f_2	p_2	F_2	F_2^r
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
I_k	f_k	p_k	F_k	F_k^r

2^o Grafičko prikazivanje podataka

- Poligonalna linija: spaja tačke (x_1, f_1),...,(x_k, f_k);
- kriva distribucije ili ogiva: spaja tačke (x_1, F_1),...,(x_k, F_k);
- stubičasti dijagram;
- histogram.

- **Numeričke karakteristike obeležja**

3^o *Pokazatelji centralne tendencije*



Slika 4.1

$3^o1.$ *Izračunati*

Aritmetička sredina m

- za negrupisane podatke: $m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$;
- za grupisane podatke: $m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i$.

$3^o2.$ *Pozicioni*

Mod M_0

- za negrupisane podatke: vrednost koja ima najveću frekvenciju, tj. vrednost koja se najčešće javlja;
- za grupisane podatke: izračunava se i to po sledećoj proceudri (ne vidi se direktno)

  · odredjuje se modalni interval (interval sa najvećom frekvencijom);
  · izračunava se broj
  $M_0 = L_{m_0} + \frac{d_1}{d_1+d_2} \cdot d_{m_0}$,

  gde su
  L_{m_0} donja granica modalnog intervala,
  d_{m_0} širina modalnog intervala,
  $d_1 = f_{m_0} - f_{m_0-1}$,
  $d_2 = f_{m_0} - f_{m_0+1}$,
  f_{m_0} frekvencija modalnog intervala,
  f_{m_0-1} frekvencija intervala pre modalnog,
  f_{m_0+1} frekvencija intervala posle modalnog.

Medijana M_e

- za negrupisane podatke: vrednost obeležja koje u nizu $\{y_n\}$ podataka poredjanih po veličini zauzima srednju poziciju:

$$M_e = \begin{cases} y_{\frac{N+1}{2}}, & N \text{ neparno} \\ \dfrac{y_{\frac{N}{2}} + y_{\frac{N}{2}+1}}{2}, & N \text{ parno} \end{cases}$$

- za grupisane podatke: izračunava se i to po sledećoj proceudri (ne vidi se direktno)

  · odredjuje se medijalni interval (prvi interval čija je kumulativna frekvencija veća od $\frac{N}{2}$);

  · izračunava se broj

  $M_e = L_{m_e} + \frac{\frac{N}{2} - F_{m_e-1}}{f_{m_e}} \cdot d_{m_e}$,

  gde su

  L_{m_e} donja granica medijalnog intervala,
  d_{m_e} širina medijalnog intervala,
  f_{m_e} frekvencija medijalnog intervala,
  F_{m_e-1} kumulativna frekvencija intervala pre medijalnog.

<u>Kvantili</u>

Kvantil reda p, $p \in (0,1)$, je broj koji je veći od $p \cdot 100\%$ vrednosti obeležja.
· Medijana je kvantil reda $p = 0$.
· Kvantili normalne, Studentove i χ^2 raspodele se nalaze u tabelama u Prilogu.

Kvartili Q_i, $i = 1,2,3$ su kvantili reda $p \in \{0,25; 0,5; 0,75\}$. Kvartili dele vrednosti obeležja uredjene po veličini na četiri jednaka dela, odnosno intervali

$(-\infty, Q_1)$, (Q_1, Q_2), (Q_2, Q_3), $(Q_3, +\infty)$

sadrže po 25% podataka populacije.

- za negrupisane podatke: prvi kvartil je medijana donje polovine populacije, a treći kvartil je medijana gornje polovine populacije;
- za grupisane podatke: izračunava se i to po sledećoj proceudri (ne vidi se direktno)

  · odredjuje se kvartilni interval za M_p (prvi interval čija je kumulativna frekvencija veća ili jednaka od od Np;

  · izračunava se broj

  $M_p = L_p + \frac{N_p - F_{p-1}}{f_p} \cdot d_p$,

  gde su

  L_p donja granica kvartilnog intervala,
  d_p širina kvartilnog intervala,
  f_p frekvencija kvartilnog intervala,
  F_{p-1} kumulativna frekvencija intervala pre kvartilnog .

Momenti

Običan momenat reda r, $r \in \mathbb{N}$:

$m_r = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^r f_i$.

$m = m_1$

Centralni momenat reda r, $r \in \mathbb{N}$:

$\mu_r = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{k} (x_i - m)^r f_i$.

4^o. *Pokazatelji rasipanja, disperzije*

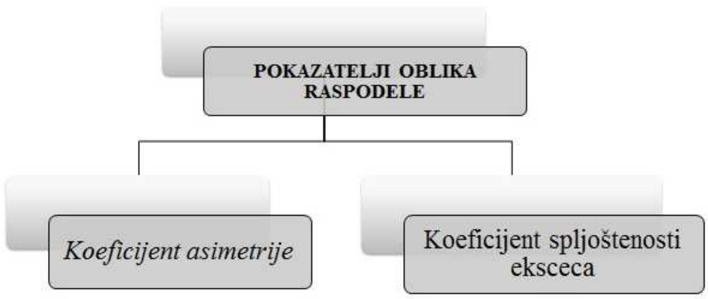
Slika 4.2

Raspon populacije: $R = x_{max} - x_{min}$
Interkvartilni razmak: $IQR = Q_3 - Q_1$
Disperzija (varijansa): $\sigma^2 = \mu_2$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i - m)^2 f_i$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i - m^2$$

Standardna devijacija, standardno odstupanje: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
Koeficijent varijacije: $V = \frac{\sigma}{m} \cdot 100\%$

5^o. *Pokazatelji oblika raspodele*



Slika 4.3

Koeficijent asimetrije K_A:

$$K_A = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i - m)^3 f_i}{(\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i - m)^2 f_i)^{3/2}}.$$

- $K_A = 0$ simetrična raspodela u odnosu na pravu $x = m$ i važi $M_0 = M_e = m$;
- $K_A > 0$ raspodela asimetrična na desno i važi $M_0 \leq M_e \leq m$;
- $K_A < 0$ raspodela asimetrična na levo i važi $m \leq M_e \leq M_0$.

Koeficijent spljoštenosti, ekscesa K_E:

$$k_E = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i - m)^4 f_i}{(\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i - m)^2 f_i)^2}$$

- $K_E = 3$ mezokurtična: distribucija ima normalnu spljoštenost;
- $K_E > 3$ leptokurtična: distribucija je više izdužena u odnosu na normalnu raspodelu;
- $K_E < 3$ platikurtična: distribucija je više spljoštena u odnosu na normalnu raspodelu.

4.2 Rešeni zadaci

Zadatak 4.1. *Anketirano je 30 studenata. Jedno pitanje se odnosilo na broj položenih ispita u toku jedne godine. Dobijeni su sledeći podaci:*

$$\begin{array}{cccccccccc} 3, & 2, & 2, & 3, & 5, & 1, & 6, & 2, & 3, & 3 \\ 4, & 5, & 2, & 3, & 4, & 4, & 5, & 3, & 3, & 4 \\ 4, & 3, & 5, & 4, & 3, & 5, & 4, & 2, & 3, & 5. \end{array}$$

(*a*) *Prikazati podatke tabelarno. Izračunati kumulativne i relativne frekvencije.*

(*b*) *Nacrtati poligonalnu liniju, stubičasti dijagram i ogivu.*

Rešenje. (*a*) Podatke nabrojane u zadatku bi trebalo sortirati po nekom pravilu. Najčešće je korisno njihovo sređivanje po veličini:

$$1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6$$

Broj ponavljanja neke od vrednosti $x_i = i$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, u sortiranom nizu predstavlja frekvenciju f_i. Na primer,

$$f_1 = 1,\ f_2 = 5,\ f_3 = 10,\ f_4 = 7,\ f_5 = 6,\ f_6 = 1.$$

Kumulativna frekvencija F_i elementa x_i je zbir svih frekvencija elemenata koji mu prethode i odgovaraju:

$F_1 = 1$
$F_2 = 1 + 5 = 6$
$F_3 = 1 + 5 + 10 = 16$
$F_4 = 1 + 5 + 10 + 7 = 23$
$F_5 = 1 + 5 + 10 + 7 + 6 = 29$
$F_6 = 1 + 5 + 10 + 7 + 6 + 1 = 30.$

Relativna vrekvencija $p_i = \frac{f_i}{n}$ elementa x_i predstavlja zastupljenost elementa x_i unutar skupa realizovanih vrednosti:

$p_1 = p_6 = \frac{1}{30} \approx 0,0333... \approx 0,033$
$p_2 = \frac{5}{30} = 0,1666... \approx 0,17$
$p_3 = \frac{10}{30} = 0,3333... \approx 0,33$
$p_4 = \frac{7}{30} = 0,2333... \approx 0,23$
$p_5 = \frac{6}{30} = 0,2$

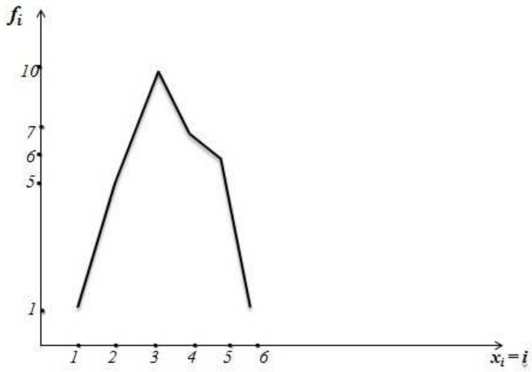
Relativne frekvencije mogu biti iskazane i procentualno:

$p_1 = p_6 = 3,33\%$
$p_2 = 16,67\%$
$p_3 = 33,33\%$
$p_4 = 23,33\%$
$p_5 = 20\%.$

Izračunate vrednosti se mogu pregledno pokazati pomoću tabele:

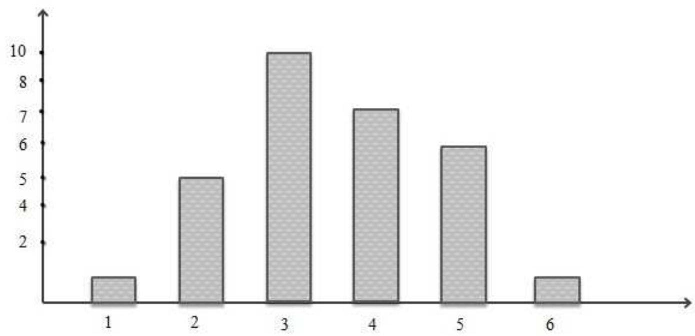
x_i	f_i	F_i	p_i
1	1	1	0,03
2	5	6	0,17
3	10	16	0,33
4	7	23	0,23
5	6	29	0,2
6	1	30	0,03

(b) Poligonalna linija se dobija spajanjem tačaka $(1,1)$,$(2,5)$,$(3,10)$,$(4,7)$,$(5,6)$ i $(6,1)$, tj. spajanjem tačaka (i, f_i), $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ (Slika 4.4).



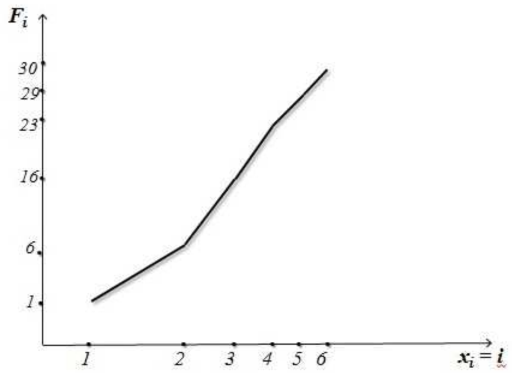
Slika 4.4

Stubičasti dijagram (bar dijagram) se sastoji od niza razdvojenih pravougaonika kojima jedna dimenzija pokriva vrednost $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ a druga je odgovarajuća vrednost frekvencija (Slika 4.5).



Slika 4.5

Kriva distribucije ili ogiva dobija se spajanjem tačaka $(1,1)$,$(2,6)$,$(3,16)$,$(4,23)$,$(5,29)$ i $(6,30)$, tj. spajanjem tačaka (i, F_i), $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ (Slika 4.6).



Slika 4.6

Zadatak 4.2. *Anketirano je* 30 *studenata. Pitanje se odnosilo na broj bodova koji su osvojili na testu iz matematike, na prijemnom ispitu. Dobijeni su sledeći podaci:*

$$\begin{array}{cccccccccc} 30, & 0, & 2, & 10, & 48, & 14, & 14, & 54, & 6, & 28 \\ 30, & 40, & 18, & 30, & 44, & 38, & 10, & 4, & 10, & 34 \\ 14, & 6, & 48, & 0, & 0, & 8, & 26, & 60, & 54, & 52. \end{array}$$

(a) *Grupisati podatke intervalno.*

(b) *Nacrtati histogram frekvencije.*

Rešenje. (a) S obzirom da posmatrano obeležje ima veliki broj različitih vrednosti, one će biti grupisane u intervale čije određivanje sledi. Na osnovu datih podataka imamo:

$$N = 30, \ x_{min} = 0, \ x_{max} = 60.$$

Maksimalni broj intervala ne može preći broj

$$5 \cdot \log N = 5 \cdot \log 30 = 7,3856...$$

Korišćenjem Strugesove formule važi da je broj intervala

$$k = 1 + 3,322 \log N = 1 + 3,322 \log 30 = 5,906,$$

$$k \approx 6,$$

dok je širina svakog intervala

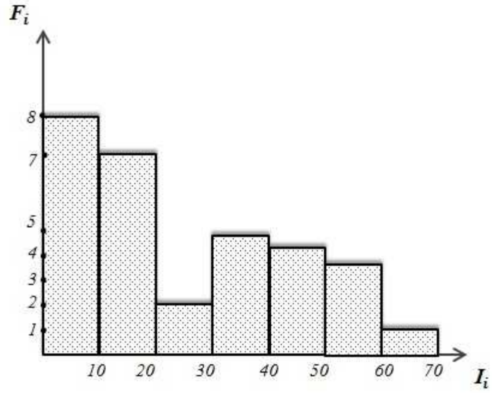
$$d = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{60 - 0}{5,9} = 10,1694...,$$

$$d = 10.$$

Sređeni podaci su dati u tabeli koja sledi zajedno sa apsolutnim, relativnim i kumulativnim frekvencijama:

I_i	f_i	F_i	p_i
$[0,10)$	8	8	0,27
$[10,20)$	7	15	0,23
$[20,30)$	2	17	0,07
$[30,40)$	5	22	0,17
$[40,50)$	4	26	0,13
$[50,60)$	3	29	0,1
$[60,70)$	1	30	0,03

(b) Histogram se sastoji od niza pravougaonika kojima je jedna stranica interval I_i, a druga odgovarajuća frekvencija f_i (Slika 4.7).



Slika 4.7

Zadatak 4.3. *Promet (u hiljadama dinara) na jednom šalteru u toku nedelje iznosi:*

1. *ponedeljak* - 98,
2. *utorak* - 76,
3. *sreda* - 79,
4. *četvrtak* - 56,
5. *petak* - 81,
6. *subota* - 51.

Izračunati prosečni promet te nedelje.

Rešenje.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i \\ &= \frac{1}{6}(98+76+79+56+81+51) \\ &= 73,5. \end{aligned}$$

Zadatak 4.4. *Izračunati aritmetičku sredinu za podatke date u Zadatku 4.1.*

Rešenje.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{6} x_i f_i \\ &= \frac{1}{30}(1\cdot 1 + 2\cdot 5 + 3\cdot 10 + 4\cdot 7 + 5\cdot 6 + 6\cdot 1) \\ &= 3,5. \end{aligned}$$

Do aritmetičke sredine se može doći i korišćenjem tabele

x_i	f_i	$x_i f_i$
1	1	1
2	5	10
3	10	30
4	7	28
5	6	30
6	1	6
$\sum$	30	105

$$m = \frac{105}{30} = 3,5.$$

Zadatak 4.5. *Izračunati aritmetičku sredinu za podatke u Zadatku 4.2.*

Rešenje. Za podatke grupisane u intervale vrednost x_i izračunava se kao sredina intervala, pa imamo:

I_i	f_i	x_i	$x_i f_i$
$[0,10)$	8	5	40
$[10,20)$	7	15	105
$[20,30)$	2	25	50
$[30,40)$	5	35	175
$[40,50)$	4	45	180
$[50,60)$	3	55	165
$[60,70)$	1	65	65
$\sum$	30		780

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} x_i f_i \\ &= \frac{780}{30} \\ &= 26. \end{aligned}$$

Zadatak 4.6. *Odrediti mod za niz podataka:*

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.$$

Rešenje. Ne postoji mod.

Zadatak 4.7. *Odrediti mod obeležja čiji su podaci dati u tabeli.*

x_i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
f_i	3	2	2	1	2	3	2	3	1	1	2

Rešenje. Postoje tri moda i to:

$$M_1 = 1, \qquad M_2 = 11, \qquad M_3 = 15.$$

Zadatak 4.8. *U zadatku 4.1 odrediti:*

(a) mod;

(b) medijanu;

(c) kvartile.

Rešenje. (a) $M_0 = 3$

(b) Kako je $N = 30$ paran broj, to je:

$$\begin{aligned} M_e &= \frac{y_{\frac{N}{2}} + y_{\frac{N}{2}+1}}{2} \\ &= \frac{y_{15} + y_{16}}{2} \\ &= \frac{3+3}{2} \\ &= 3. \end{aligned}$$

(c) $Q_2 = M_e = 3$
$Q_1 = M_{0,25}$ je medijana donje polovine varijacionog niza (prvih 15 članova tog niza) koja glasi:

$$1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3.$$

Dakle, $N_1 = 15$ je neparan broj pa je:

$$Q_1 = M_{0,25} = y_{\frac{N_1+1}{2}} = y_8 = 3.$$

Slično, $Q_3 = M_{0,75}$ je medijana gornje polovine varijacionog niza koja glasi:

$$3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6.$$

Kako je $N_2 = 15$ neparno to je:

$$Q_3 = M_{0,75} = y_{\frac{N_1+1}{2}} = y_8 = 4.$$

Zadatak 4.9. *U Zadatku 4.2 izračunati:*

(a) mod;

(b) medijanu;

(c) kvartile.

Rešenje. Iz Zadatka 4.2:

I_i	f_i	F_i
$[0,10)$	8	8
$[10,20)$	7	15
$[20,30)$	2	17
$[30,40)$	5	22
$[40,50)$	4	26
$[50,60)$	3	29
$[60,70)$	1	30

(a) modalni interval je $[0,10)$ ($f_1 = 8$ je najveća frekvencija). Kako su:

$$L_{m_0} = 0, \quad f_{m_o} = 8, \quad f_{m_0-1} = 0, \quad f_{m_0+1} = 7,$$

to važi:

$$\begin{aligned} d_1 &= f_{m_o} - f_{m_0-1} = 8 - 0 = 8, \\ d_2 &= f_{m_o} - f_{m_0+1} = 8 - 7 = 1. \end{aligned}$$

Zamenom u formuli dobijamo

$$\begin{aligned} M_0 &= L_{m_0} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot d_{m_0} \\ &= 0 + \frac{8}{8+1} \cdot 10 \\ &= 8,888..., \end{aligned}$$

tj,

$$M_0 = 8,89.$$

(b) Modalni interval je $[20,30)$, $(F_{M_e} = 17 > 15)$. Kako su:

$$L_{m_e} = 20, \qquad F_{m_e-1} = 15, \qquad f_{m_e} = 2,$$

to je:

$$\begin{aligned} M_e &= L_{m_e} + \frac{\frac{N}{2} - F_{m_e-1}}{f_{m_e}} \cdot d_{m_e} \\ &= 20 + \frac{15 - 15}{2} \cdot 10 \\ &= 20. \end{aligned}$$

(c) Kvartilni interval za $Q_1 = M_{0,25}$ je $[0,10)$ jer je

$$N_p = 30 \cdot 0,25 = 7,5 < 8 = F_p.$$

Kako su

$$L_{0,25} = 0, \quad f_{0,25} = 8, \quad F_{0,25-1} = 0,$$

to je

$$\begin{aligned} Q_1 = M_{0,25} &= 0 + \frac{7,5-0}{8} \cdot 10 \\ &= \frac{75}{8} \\ &= 9,375. \end{aligned}$$

Slično, kvartilni interval za $Q_3 = M_{0,75}$ je $[40, 50)$ jer je

$$N_p = 30 \cdot 0,75 = 22,5 < 26 = F_p.$$

Kako su

$$L_{0,75} = 40, \quad f_{0,75} = 4, \quad F_{0,75-1} = 22,$$

to je

$$Q_3 = M_{0,75} = 40 + \frac{22,5-22}{4} \cdot 10 = 41,25.$$

Zadatak 4.10. *Za Zadatak 4.1 izračunati:*

(a) raspon populacije;

(b) interkvartilni razmak;

(c) disperziju i standardnu devijaciju;

(d) centralni momenat reda 2;

(e) koeficijent varijacije.

Rešenje. U rešavanju se koriste podaci iz Zadatka 4.1.

(a) $\mathcal{R} = x_{max} - x_{min} = 6 - 1 = 5$

(b) $IQR = Q_3 - Q_1 = 4 - 3 = 1$

(c)

x_i	f_i	$x_i^2 f_i$
1	1	1
2	5	20
3	10	90
4	7	112
5	6	150
6	1	36
$\sum$		409

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} x_i^2 f_i &= \frac{409}{30}\\ &= 113,6333...\\ &\approx 13,63\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} x_i^2 f_i - m^2\\ &= 13,63 - 3,5^2\\ &= 13,63 - 12,25\\ &= 1,38\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{1,38} = 1,17473... = 1,17$$

(d) $\mu_2 = \sigma^2 = 1,38$

(e)

$$\begin{aligned}V &= \frac{\sigma}{m}\cdot 100\%\\ &= \frac{1,17}{3,5}\cdot 100\%\\ &= 33,4285\%\\ &= 33,43\%.\end{aligned}$$

Zadatak 4.11. *Za Zadatak 4.2 izračunati:*

(a) raspon populacije;

(b) interkvartilni razmak;

(c) disperziju i standardnu devijaciju;

(d) moment reda 1 *i centralni momenat reda* 2*;*

(e) koeficijent varijacije.

Rešenje. Koristimo podatke iz Zadatka 4.2.

I_i	f_i	x_i	$x_i^2 f_i$
$[0,10)$	8	5	200
$[10,20)$	7	15	1575
$[20,30)$	2	25	1250
$[30,40)$	5	35	6125
$[40,50)$	4	45	8100
$[50,60)$	3	55	9075
$[60,70)$	1	65	4225
$\sum$	30		30550

(a) $\mathcal{R} = x_{max} - x_{min} = 60 - 0 = 60$

(b) $IQR = Q_3 - Q_1 = 41,25 - 9,375 = 31,875$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} x_i^2 f_i &= \frac{30550}{30} \\ &= 1018,333... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} x_i^2 f_i - m^2 \\ &= 1018,33 - 26^2 \\ &= 1018,33 - 676 \\ &= 405,33 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{405,33} = 20,13280... = 20,13$$

(d)

$$m_1 = m = 26$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = 405,33$$

(e)

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sigma}{m} \cdot 100\% \\ &= \frac{20,13}{26} \cdot 100\% \\ &= 77,4230...\% \\ &= 77,42\%. \end{aligned}$$

Zadatak 4.12. *Izračunati pokazatelje oblika raspodele za podatke u sledećoj tabeli:*

I_i	[5,9)	[9,13)	[13,17)	[17,21)	[21,25)	[25,29)
f_i	3	7	9	5	4	2

Rešenje. Potrebna izračunavanja su data u sledećoj tabeli:

I_i	f_i	x_i	$x_i f_i$	$x_i - m$	$(x_i - m)^2 f_i$	$(x_i - m)^3 f_i$	$(x_i - m)^4 f_i$
$[5, 9)$	3	7	21	-8,8	232,32	-2044,42	17990,86
$[9, 13)$	7	11	77	-4,8	161,28	-774,14	3715,89
$[13, 17)$	9	15	135	-0,8	5,76	-4,61	3,69
$[17, 21)$	5	19	95	3,2	51,2	163,84	524,29
$[21, 25)$	4	23	92	7,2	207,36	1492,99	10749,54
$[25, 29)$	2	27	54	11,2	250,88	2809,86	31470,39
$\sum$	30		474		908,8	1643,52	64454,66

$N = 30$
$m = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{6} x_i f_i$
$m = \frac{474}{30} = 15,8$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} (x_i - m)^2 f_i \\ &= \frac{908,8}{30} \\ &= 30,29333... \\ &= 30,293 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\sigma^2} \\ &= \sqrt{30,29333...} \\ &= 5,503937... \\ &= 5,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} (x_i - m)^3 f_i \\ &= \frac{1643,52}{30} \\ &= 54,784 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} (x_i - m)^4 f_i \\ &= \frac{64454,656}{30} \\ &= 2148,4885 \end{aligned}$$

$$K_A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$K_A = \frac{54,784}{(5,5)^3} = \frac{54,784}{166,975} = 0,33$$

$$K_A > 0 \Longrightarrow \text{raspodela asimetrična na desno.}$$

$$K_E = \frac{\mu_4{}^2}{\sigma^2}$$

$$K_E = \frac{2148,4885}{(30,293)^2}$$

$$K_E = \frac{2148,4885}{917,666}$$

$$K_E = 2,34$$

$$K_E < 3 \Longrightarrow \text{platikurtična distribucija.}$$

Zadatak 4.13. *Izračunati pokazatelje oblika raspodele za podatke u sledećoj tabeli:*

I_i	*[3,5;3,6)*	*[3,6;3,7)*	*[3,7;3,8)*	*[3,8;3,9)*	*[3,9;4)*	*[4;4,1)*
f_i	*1*	*2*	*4*	*6*	*20*	*25*

Rešenje. Potrebna izračunavanja su data u sledećoj tabeli:

I_i	f_i	x_i	$x_i f_i$	$x_i - m$	$(x_i - m)^2 f_i$	$(x_i - m)^3 f_i$	$(x_i - m)^4 f_i$
$[3,5;3,6)$	1	3,55	3,55	-0,4	0,16	-0,064	0,0256
$[3,6;3,7)$	2	3,65	7,3	-0,3	0,18	-0,054	0,0162
$[3,7;3,8)$	4	3,75	15	-0,2	0,16	-0,032	0,0064
$[3,8;3,9)$	6	3,85	23,1	-0,1	0,06	-0,006	0,0006
$[3,9;4)$	20	3,95	79	0	0	0	0
$[4;4,1)$	25	4,05	101,25	0,1	0,25	0,025	0,0025
$\sum$	58		229,2		0,81	-0,131	0,0513

$N = 58$
$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} x_i f_i$
$m = \frac{229,2}{58} = 3,95$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} (x_i - m)^2 f_i \\ &= \frac{0,81}{58} \\ &= 0,013965... \\ &= 0,014 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\sigma^2}\\ &= \sqrt{0,013965...}\\ &= 0,1181...\\ &= 0,118\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6}(x_i-m)^3 f_i\\ &= \frac{-0,131}{58}\\ &= -0,002\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_4 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6}(x_i-m)^4 f_i\\ &= \frac{0,513}{58}\\ &= 0,0009\end{aligned}$$

$$K_A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$K_A = \frac{-0,002}{(0,118)^3}$$

$$K_A = -1,2$$

$K_A < 0 \Longrightarrow$ raspodela simetrična na levo.

$$K_E = \frac{{\mu_4}^2}{\sigma^2}$$

$$K_E = \frac{0,0009}{(0,014)^2}$$

$$K_E = 24,59$$

$K_E > 3 \Longrightarrow$ leptokurtična distribucija.

Zadatak 4.14. *Dati su podaci*

0,49	*0,41*	*3,89*	*-0,12*	*0,66*	*2,26*	*-4,26*	*3,09*	*2,49*
0,02	*7,71*	*0,54*	*5,16*	*-1,98*	*-6,92*	*-1,86*	*-2,39*	*4,24*
3,15	*4,43*	*6,60*	*-1,20*	*3,19*	*0,95*	*5,94*	*0,85*	*11,78*
5,11	*-2,15*	*-5,02*	*5,41*	*1,58*	*1,10*	*-5,65*	*2,72*	*5,48*
0,58	*4,06*	*-0,01*	*6,01*	*5,69*	*1,41*	*6,63*	*1,46*	*-1,40*
10,36	*7,67*	*-0,61*	*2,90*	*3,74*				

Formirati tabelu koja predstavlja raspodelu frekvencija ovog obeležja. Izračunati:

(a) *aritmetičku sredinu, medijanu, mod;*

(b) *kvartile;*

(c) *disperziju i standardnu devijaciju;*

(d) *pokazatelje oblika raspodele.*

Rešenje.

$$k = 1 + \log 50 \cdot 3,322 = 6,644 \approx 7$$

$$x_{max} = 11,78$$

$$x_{min} = -6,92$$

$$d = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{11,78 + 6,92}{6,644} = 2,81 \approx 3$$

Maksimalni broj intervala je $5 \log N = 5 \log 50 = 8,494$, $\quad 7 \leq k \leq 9$.
Dakle, podatke grupišemo u $k = 7$ intervala dužine $d = 3$.

I_i	f_i	p_i	F_i	x_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$	$x_i - m$	$(x_i - m)^2 f_i$	$(x_i - m)^3 f_i$	$(x_i - m)^4 f_i$
$[-7,-4)$	4	0,08	4	-5,5	-22	30,25	121	-7,62	232,26	1769,80	13485,99
$[-4,-1)$	6	0,12	10	-2,5	-15	6,25	37,5	-4,62	128,07	-591,67	2733,50
$[-1,2)$	15	0,3	25	0,5	7,5	0,25	3,75	-1,62	39,37	-63,77	103,31
$[2,5)$	12	0,24	37	3,5	42	12,25	147	1,38	22,85	31,54	43,52
$[5,8)$	11	0,22	48	6,5	71,5	42,25	464,75	4,38	211,03	924,30	4048,45
$[8,11)$	1	0,02	49	0,1	9,5	9,5	90,25	90,25	7,38	401,95	2966,37
$[11,14)$	1	0,02	50	12,5	12,5	156,25	156,25	10,38	107,74	118,39	11608,89
$\sum$	50	1			106		1020,5		795,78	50,96	34989,33

(a)

$m = \dfrac{1}{50} \displaystyle\sum_{i=1}^{7} x_i f_i$

$m = \dfrac{106}{50}$

$m = 2,12$
Modalni interval: $[-1, 2)$

$$L_{m_0} = -1, \quad d_1 = 15 - 6 = 9, \quad d_2 = 15 - 12 = 3, \quad d_{m_0} = 3$$

$$M_0 = -1 + \frac{9}{9+3} \cdot 3 = -1 + \frac{9}{4} = 1,25$$

Medijalni interval: $[2, 5)$

$$L_{m_e} = 2, \quad F_{m_e - 1} = 25, \quad f_{m_e - 1} = 12, \quad d_{m_e} = 3$$

$$M_e = 2 + \frac{25-25}{12} \cdot 3 = 2$$

(b)
$Q_1 = M_{0,25} \qquad 50 \cdot 0,25 = 12,5$
Prvi kvartil se nalazi u intervalu $[-1, 2)$

$$L_{0,25} = -1, \quad F_{0,25-1} = 10, \quad f_{0,25} = 15, \quad d_{0,25} = 3$$
$$Q_1 = -1 + \frac{12,5-10}{15} \cdot 3 = -1 + 0,5 = -0,5$$

$Q_3 = M_{0,75} \qquad 50 \cdot 0,75 = 37,5$
Treći kvartil se nalazi u intervalu $[5, 8)$

$$L_{0,75} = 5, \quad F_{0,75-1} = 37, \quad f_{0,75} = 11, \quad d_{0,75} = 3$$

$$Q_3 = 5 + \frac{37,5-37}{15} \cdot 3 = 5 + 0,136 = 5,14$$

(c)

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{7} x_i^2 f_i - m^2 \\
&= \frac{1020,5}{50} - 2,12 \\
&= 20,41 - 4,4944 \\
&= 15,9156
\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{15,9156} = 3,99$$

(d)

$$k_A = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
\mu_3 &= \frac{1}{N}\sum_i (x_i - m)^3 f_i \\
&= \frac{50,96}{50} \\
&= 1,0192
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2^{3/2} &= (\sigma^2)^{3/2} \\
&= \sigma^2\sqrt{\sigma^2} \\
&= 15,9156\sqrt{15,9156} \\
&= 63,65544162
\end{aligned}$$

$$k_A = 0,016011 > 0 \Longrightarrow \text{ asimetrična u desno}$$

$$M_0 \leq M_e \leq m$$
$$1,25 \leq 2 \leq 2,12$$

$$k_A = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 2,762610..$$
$$k_E = 2,762610... < 3 \Longrightarrow \text{ platikurtična}$$

4.3 Zadaci za vežbu

1. Pri merenju temperature tokom 30 dana u 11h dobijeni su podaci

   22, 24, 26, 29, 31, 25, 26, 29, 27, 31,
   22, 29, 24, 26, 27, 27, 27, 25, 25, 27
   22, 31, 29, 25, 27, 26, 29, 25, 26, 31.

   (a) Prikazati podatke tabelarno. Izračunati kumulativne i relativne frekvencije;

   (b) Nacrtati poligonalnu liniju, stubičasti dijagram i ogivu.

2. Izmerene su težine 100 dece šetog razreda jedne škole. Dobijeni su podaci u kilogramima.

   49, 49, 45, 50, 47, 53, 50, 47, 49, 48, 48, 49, 45, 50, 47,
   49, 56, 50, 49, 49, 50, 49, 53, 49, 46, 49, 48, 48, 49, 57,
   50, 47, 48, 50, 51, 55, 47, 46, 47, 50, 50, 45, 54, 49, 47,
   49, 52, 50, 52, 50, 49, 49, 49, 49, 52, 51, 49, 49, 48, 54,
   49, 50, 50, 52, 51, 51, 51, 50, 51, 49, 52, 51, 48, 48, 58,
   46, 53, 49, 50, 49, 53, 50, 50, 53, 49, 45, 47, 47, 50, 45,
   52, 48, 52, 52, 49, 48, 47, 54, 54, 46.

   (a) Prikazati podatke tabelarno. Izračunati kumulativne i relativne frekvencije;

   (b) Nacrtati histogram frekvencija.

3. Dati su podaci

x_i	1	3	5	7	9	11
f_i	3	2	3	2	1	3

   Odrediti aritmetičku sredinu, medijanu, modus, kvartile, interkvartilni razmak, momenat drugog reda, disperziju, standardno odstupanje, koeficijent varijacije.

4. Za podatke date u tabeli

I_i	f_i
$0-20$	95
$20-40$	126
$40-60$	96
$60-80$	71
$80-100$	47
$100-120$	16
$120-140$	45

   Odrediti aritmetičku sredinu, medijanu, modus, kvartile, interkvartilni razmak, momenat drugog reda, disperziju, standardno odstupanje, koeficijent varijacije.

5. Dat je raspored seoskih domaćinstava prema veličini poseda.

veličina zemljišnog poseda (u ha)	Broj domaćinstava (u 000)
$0-1$	285
$1-2$	471
$2-3$	391
$3-5$	486
$5-8$	357
$8-10$	123
$10-15$	75

Odrediti aritmetičku sredinu, medijanu, modus, kvartile, interkvartilni razmak, momenat drugog reda, disperziju, standardno odstupanje, koeficijent varijacije.

Glava 5

Uzorak. Ocene parametra

5.1 Teorijske osnove

- **Uzorak. Statistika**

1^o Uzorak

Uzorak: svaki konačan podskup populacije.
Obim uzorka n: broj elemenata uzorka.

Metoda uzorka: iz populacije se na odredjeni način uzima uzorak, i na njegovim elementima ispituju vrednosti obeležja X.

Osnovni cilj: dobijene zaključke o obeležju X na datom uzorku preneti, generalisati na celu populaciju.

Osnovni zahtev: *reprezentativnost uzorka* (zaključci koji se prenose na populaciju su verodostojni).

Prost slučajni uzorak: svaki element populacije ima istu verovatnoću da bude izabran u uzorak, i svaki uzorak ima istu verovatnoću da bude izabran.

> ***Prost slučajni uzorak obima*** n ***za obeležje*** X je n-torka nezavisnih slučajnih promenljivih $(X_1, X_2, ..., X_n)$ od kojih svaka ima istu raspodelu kao i obeležje X.

Ako sa N obeležimo broj elemenata osnovnog skupa, a sa n broj elemenata u uzorku, onda se može izvući

- $\binom{N}{n}$ uzoraka bez vraćanja iz populacije;
- N^n uzoraka sa vraćanjem iz populacije.

2^o Statistika

Prilikom statističkog zaključivanja na osnovu uzorka, koriste se razne funkcije $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ slučajnog uzorka.

> ***Statistika***: slučajna promenljiva $Y = f(X_1, X_2, ..., X_n)$ koja je funkcija samo promenljivih $X_1, X_2, ..., X_n$.

Statistike koje se najčešće koriste

- Aritmetička sredina uzorka: $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Momenti uzorka:

  · obični: $M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r, \quad r \in \mathbb{N}$,

  · centralni: $\mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^r, \quad r \in \mathbb{N}$.

- Disperzija uzorka

  · ako je poznata srednja vrednost m obeležja: $\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$;

  · ako je nepoznata srednja vrednost m obeležja:
  $\overline{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$;

- Popravljena disperzija uzorka
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n^2)^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}_n^2)$.

- Popravljena standardna devijacija uzorka: $S = \sqrt{S^2}$.
- Standardna greška sredine uzorka: $S_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$.
- Koeficijent varijacije uzorka: $V = \frac{S}{\overline{X}_n} \cdot 100\%$.
- Fišerov koeficijent asimetrije uzorka $K_A = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^3 f_i}{(\overline{S}_n)^3}$.
- Pirsonov koeficijent spljoštenosti (akscesa) uzorka $K_E = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^4 f_i}{(\overline{S}_n^2)^3}$.

3^o <u>*Realizovani uzorak. Realizovana statistika*</u>

Realizovani uzorak $(x_1, x_2, ..., x_n)$: niz konkretnih podataka dobijenih posle izvlačenja uzorka i registrovanja vrednosti obeležja na elementima uzorka.

Realizovane vrednosti statistika $\overline{x}_n$, m_r, μ_r, s^2, s, ... : brojevi koji se dobijaju kada se vrednosti realizovanog uzorka uvrste u statistike.

- **Ocene parametra**

Osnovni problem matematičke statistike: na osnovu uzorka $(X_1, X_2, ..., X_n)$ zaključiti kakva je raspodela obeležja X.

Raspodela obeležja često zavisi od parametra. Ako je parametar nepoznat, on se ocenjuje na osnovu realizovanog uzorka.

Ocene parametra mogu biti:

- tačkaste,
- intervalne.

`Napomena.` Sve metode deskriptivne statistike izložene u poglavlju 4 važei za podatke prikupljene u uzorku, tj. prikazivanje podataka i izračunavanje osnovnih numeričkih karakteristika vrši se na isti način za uzorak kao i za celu populaciju.

4^o *Tačkaste ocene parametra*

Ocena nepoznatog parametra θ je broj.
Postupak nalaženja:
- bira se odredjena statistika,
- vrednosti realizovanog uzorka se zamenjuju u njoj,

tako dobijeni broj je *ocena nepoznatog parametra na osnovu datog uzorka.*

Nepoznati parametar obeležja	**Statistika kojom se ocenjuje**
m - aritmetička sredina populacije	$\overline{X_n}$ - aritmetička sredina uzorka
σ^2 - disperzija	S^2 - popravljena uzoračka disperzija
σ - standardna devijacija	S - popravljena standardna devijacija

5^o *Intervalne ocene parametra*

Ocena nepoznatog parametra θ je interval.
Postupak nalaženja;
- biraju se dve statistike
  $U_1 = u_1(X_1, X_2, ..., X_n)$ i $U_2 = u_2(X_1, X_2, ..., X_n)$

takve da je
$P\{U_1 \leq \theta \leq U_2\} = \gamma,$
gde γ ne zavisi od θ i naziva se ***nivo poverenja.*** (U_1, U_2) je

· *interval poverenja za parametar θ na nivou poverenja*, ili, γ,
· $100\gamma\%$ interval poverenja za θ.

Jednostrani interval poverenja: jedna od statistika U_1, U_2 je konstanta.
Najčešće vrednosti nivoa poverenja γ: $0,9$; $0,95$; $0,99$.

5^o1. *Intervalne ocene parametara normalne $N(m, \sigma^2)$ raspodele*
Ocena parametra m

dati uslov	interval	opis
σ^2 poznato	$(\overline{X}_n - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X}_n + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	c kvantil reda $\frac{1+\gamma}{2}$ $N(0,1)$ raspodele
σ^2 nepoznato	$(\overline{X}_n - c\frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X}_n + c\frac{S}{\sqrt{n}})$	c je kvantil reda $\frac{1+\gamma}{2}$ t_{n-1} raspodela

Ocena parametra σ^2

zahtev	interval	opis
jednostrani interval	$(0; \frac{(n-1)S^2}{c})$	c je kvantil reda $1-\gamma$ raspodele χ^2_{n-1}
dvostrani interval	$(\frac{(n-1)S^2}{c_2}; \frac{(n-1)S^2}{c_1})$	c_1 - kvantil reda $\frac{1-\gamma}{2}$, c_2 - kvantil reda $\frac{1+\gamma}{2}$ χ^2_{n-1} raspodele

5^o2. *Intervalne ocene parametara p binomne $B(n,p)$ raspodele* $(0 \leq p \leq 1)$

$(\hat{p} - c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$

L broj elemenata u uzorku koji ima datu osobinu;
$\hat{p} = \frac{L}{n}$ ocena nepoznate verovatnoće da element populacije ima datu osobinu;
c kvantil reda $\frac{1+\gamma}{2}$ normalne $N(0,1)$ raspodele (Tabela 3).

Uslov korišćenja: $n > 30$, $np > 5$, $n(1-p) > 5$.

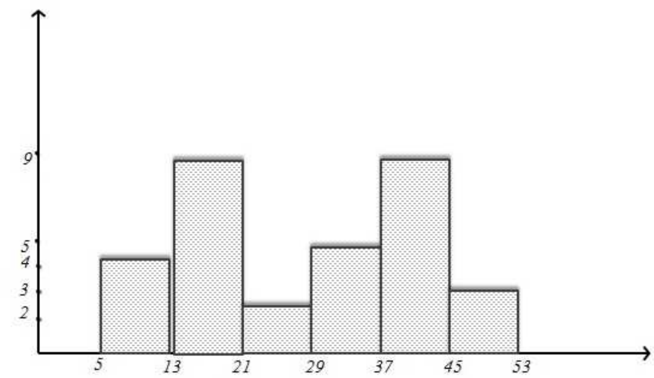
5.2 Rešeni zadaci

Zadatak 5.1. *Dat je uzorak*

I_i	$[5,13)$	$[13,21)$	$[21,29)$	$[29,37)$	$[37,45)$	$[45,53)$
f_i	4	9	2	5	9	3

(a) Prikazati podatke grafički histogramom.
(b) Odrediti realizovane vrednosti statistika.

Rešenje.
(a)



Slika 5.1

(b)

- Obim uzorka: $n = 32$. Potrebna izračunavanja su data u sledećoj tabeli:

I_i	f_i	F_i	p_i	x_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	$x_i - \overline{x}_n$	$(x_i - \overline{x}_n)^3 f_i$	$(x_i - \overline{x_n})^4 f_i$
$[5,13)$	4	4	$0,125$	9	36	324	$-19,75$	$-30814,94$	$808597,02$
$[13,21)$	9	13	$0,281$	17	153	2601	$-11,75$	$-14600,11$	$171551,29$
$[21,29)$	2	15	$0,063$	25	50	1250	$-3,75$	$-105,4688$	$395,51$
$[29,37)$	5	20	$0,156$	33	165	5445	$4,25$	$383,8281$	$1631,27$
$[37,45)$	9	29	$0,281$	41	369	15129	$12,25$	$16544,39$	$202668,785$
$[45,53)$	3	32	$0,093$	49	147	7203	$20,25$	$24911,29$	$504453,762$
$\sum$	32				920	31952		-3681	$1489295,63$

- Aritmetička sredina uzorka:
  - statistika: $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
  - realizovana vrednost statistike: $\overline{x}_{32} = \frac{1}{32}\sum_{i=1}^{6} x_i f_i = \dfrac{920}{32} = 28,75$.
- Disperzija uzorka
  - statistika: $\overline{S}_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} X_i^2 - \overline{X}_n^2$
  - realizovana vrednost statistike:

$$
\begin{aligned}
\overline{s}_{32}^2 &= \frac{1}{32}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i - \overline{x}_{32}^2 \\
\overline{s}_{32}^2 &= \frac{31952}{32} - 28,75^2 \\
&= 998,5 - 826,5625 \\
&= 171,9375
\end{aligned}
$$

- Standardna devijacija uzorka
  - statistika: $\overline{S}_n = \sqrt{\overline{S}_n^2}$
  - realizovana vrednost statistike:

$$
\begin{aligned}
\overline{s}_{32} &= \sqrt{171,9375} = 13,112494... \\
\overline{s}_{32} &= 13,112
\end{aligned}
$$

- Popravljena disperzija uzorka
  - statistika: $S^2 = \dfrac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}_n^2)$
  - realizovana vrednost statistike:

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{31}(\sum_{i=1}^{6} x_i^2 f_i - 32\overline{x}_{32}^2) \\
s^2 &= \frac{1}{31}(31952 - 32 \cdot 28,75^2) \\
&= \frac{31952 - 26450}{31} = \frac{5502}{31} \\
&= 177,483871
\end{aligned}
$$

- Popravljena standardna devijacija uzorka
  - statistika: $S = \sqrt{S^2}$
  - realizovana vrednost statistike: $s = 13,3223$

- Standardna greška sredine uzorka
  - statistika: $S_{\overline{X}} = \dfrac{S}{\sqrt{n}}$
  - realizovana vrednost statistike: $s_{\overline{X}} = \dfrac{13,3223}{\sqrt{32}} = \dfrac{13,3223}{5,657} = 2,355$
- Koeficijent varijacije uzorka
  - statistika: $V = \dfrac{S}{\overline{X}_n} \cdot 100\%$
  - realizovana vrednost statistike:

$$\begin{aligned} v &= \frac{13,3223}{28,75} \cdot 100\% = 0,4634 \cdot 100\% \\ v &= 46,34\% \end{aligned}$$

- Medijana uzorka
  - statistika: $M_e = L_{me} + \dfrac{\frac{N}{2} - F_{me-1}}{f_{me}} \cdot d_{me}$
  - realizovana vrednost statistike:
    * medijalni interval: $[29, 37)$
    * $F_{me-1} = 15$; $f_{me} = 5$; $d_{me} = 8$

$$m_e = 29 + \frac{16-15}{5} \cdot 8 = 29 + \frac{8}{5} = 30,6$$

- Mod uzorka
  - statistika: $M_0 = L_{m_0} + \dfrac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot d_{m_0}$
  - realizovana vrednost statistike:
    * modalni intervali: $[13, 21), [37, 45)$
    * modalni interval: $[13, 21)$

$$\begin{aligned} d_1 &= 9 - 4 = 5 \\ d_2 &= 9 - 2 = 7 \\ m_0^2 &= 13 + \frac{5}{5+7} \cdot 8 = 16,33 \end{aligned}$$

- Fišerov koeficijent asimetrije uzorka
  - statistika: $K_A = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^3}{\overline{S}_n^3}$

– realizovana vrednost statistike:

$$k_A = \frac{\frac{1}{32}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x}_{32})^3 f_i}{\overline{S}_{32}^3} = \frac{-\frac{3681}{32}}{(13,112)^3} = -\frac{115,03}{2254,27} = -0,051$$

$$k_A < 0$$

- Pirsonov koeficijent spljoštenosti uzorka:

  – statistika: $K_E = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^4}{(\overline{S}_n^2)^2}$

  – realizovana vrednost statistike:

$$k_E = \frac{\frac{1}{32}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x}_{32})^4 f_i}{(\overline{s}_{32}^2)^2} = \frac{\frac{1489295,626}{32}}{(171,94)^2} = \frac{46540,49}{29563,36} = 1,57$$

$$k_E < 3.$$

Zadatak 5.2. *Pretpostavimo da imamo dovoljno razloga da smatramo da u jednoj velikoj grupaciji ljudi visina ima normalnu raspodelu sa standardnom devijacijom $\sigma = 16$ cm. Srednja vrednost visine kod 100 slučajno izabranih ljudi je $\overline{x}_{100} = 175$ cm. Odrediti 99% interval poverenja za nepoznatu aritmetičku sredinu m populacije – nepoznatu prosečnu visinu u celoj grupaciji ljudi.*

Rešenje.

- Obim uzorka: $n = 100$.
- Realizovana uzoračka aritmetička sredina: $\overline{x}_{100} = 175$.
- Standardna devijacija populacije: $\sigma = 16$.
- Nivo poverenja: $\gamma = 0,99$.
- c je kvantil reda
$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1,99}{2} = 0,995$$
  $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele (Tabela 3)
$$c = 2,5758$$
- $c \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{2,5758 \cdot 16}{10} = 4,12128$
- Interval poverenja za nepoznatu aritmetičku sredinu m populacije na nivou poverenja 99% je
$$(175 - 4,12;\ 175 + 4,12) = (170,88;\ 179,12).$$
  Možemo smatrati da se prosečna visina u celoj grupaciji ljudi nalazi između $170,88$ cm i $179,12$ cm.

Zadatak 5.3. *Odrediti* 90%*-ni interval poverenja za aritmetičku sredinu obeležja X čija je raspodela $N(m, 2^2)$ na osnovu uzorka obima $n = 20$.*

$$1,2; 1,3; 2,0; 1,4; 2,3; 1,1; 2,5; 1,8; 1,5; 1,8;$$

$$2,2; 2,3; 2,2; 1,1; 1,3; 1,5; 1,7; 1,9; 2,5; 1,4.$$

Rešenje.

- Obim uzorka: $n = 20$
- Realizovana aritmetička sredina uzorka je:

$$\begin{aligned}\overline{x}_{20} &= \frac{1}{20}(1,2 + 1,3 + 2,0 + ... + 1,4) \\ &= \frac{35}{20} \\ &= 1,75\end{aligned}$$

- Standardna devijacija populacije: $\sigma = 2$
- Nivo poverenja: $\gamma = 0,9$
- c je kvantil reda
$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1,9}{2} = 0,95$$
$\mathcal{N}(0,1)$ raspodele (Tabela 3);
$$c = 1,6449.$$
- $c\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{1,6449 \cdot 2}{\sqrt{20}} = \dfrac{3,2898}{4,4721} = 0,73562$
- Traženi interval poverenja za m je

$$(1,75 - 0,736;\ 1,75 + 0,736) = (1,014;\ 2,486)$$

Možemo smatrati da se aritmetička sredina obeležja X nalazi između $1,014$ i $2,486$.

Zadatak 5.4. *Iz populacije čije obeležje X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m, 4)$ raspodelu, izvučen je uzorak*

x_0	0	1	2	3	4
f_i	15	20	13	9	5

Odrediti interval poverenja za nepoznatu aritmetičku sredinu m populacije na nivou poverenja: (a) $\gamma = 0,9$; (b) $\gamma = 0,95$; (c) $\gamma = 0,99$.

Rešenje. Deo potrebnih izračunavanja sadrži sledeća tabela

x_i	f_i	$x_i f_i$
0	15	0
1	20	20
2	13	26
3	9	27
4	5	20
$\sum$	62	93

- Obim uzorka: $n = 62$
- Realizovana aritmetička sredina uzorka je:

$$\begin{aligned}\overline{x}_{62} &= \frac{93}{62} \\ \overline{x}_{62} &= 1,5\end{aligned}$$

- Standardna devijacija populacije: $\sigma = \sqrt{4} = 2$

(b)

- Nivo poverenja: $\gamma = 0,95$
- Za dati nivo poverenja:

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1,95}{2} = 0,975$$
$$c = 1,96 \qquad \text{(Tabela 3)}$$

-

$$\begin{aligned}c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= \frac{1,96 \cdot 2}{\sqrt{62}} = 0,49784... \\ c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 0,498\end{aligned}$$

- Traženi interval poverenja za parametar m.

$$(1,5 - 0,498;\ 1,5 + 0,498) = (1,002;\ 1,998).$$

(a) Interval poverenja na nivou poverenja 0,9 je $(1,082,\ 1,917)$, (c) Interval poverenja na nivou poverenja 0,99 je $(0,846,\ 2,154)$.

> `Napomena.` Treba primetiti da, ako se poveća nivo poverenja, povećava se i dužina intervala poverenja. Ako želimo veću sigurnost, poverenje, moramo uzeti širi interval poverenja. Ocena za m će biti manje precizna, ali ćemo biti sigurniji da je tačna.
>
> Ako se poveća obim uzorka, smanjuje se dužina intervala poverenja, jer se sa povećanjem obima uzorka povećava preciznost ocene. S druge strane, ako što je veća standardna devijacija populacije, veća je i dužina intevala poverenja, jer je veća neodređenost.

Zadatak 5.5. *Obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}(m,4)$ raspodelu. Na osnovu uzorka*

I_i	$[-0,5;0,5)$	$[0,5;1,5)$	$[1,5;2,5)$	$[2,5;3,5)$	$3,5;4,5$
f_i	1	4	6	12	2

Odrediti: (a) 90%; (b) 95%; (c) 99%, interval poverenja za aritmetičku sredinu m populacije.

Rešenje. Deo potrebnih izračunavanja dati su u sledećoj tabeli.

I_i	f_i	x_i	$x_i f_i$
$[-0,5;0,5)$	1	0	0
$[0,5;1,5)$	4	1	4
$[1,5;2,5)$	6	2	12
$[2,5;3,5)$	12	3	36
$[3,5;4,5)$	2	4	8
$\sum$	25		60

- Obim uzorka: $n = 25$
- Realizovana aritmetička sredina uzorka je:

$$\overline{x}_{25} = \frac{60}{25} = 2,4$$

- Standardna devijacija populacije: $\sigma = \sqrt{4} = 2$.

(c)

- Nivo poverenja: $\gamma = 0,99$
- Za dati nivo poverenja:

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1,99}{2} = 0,995$$

$$c = 2,5758 \qquad \text{(Tabela 3)}$$

- $c \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{2,5758 \cdot 2}{5} = 1,03032$
- Interval poverenja za nepoznatu aritmetičku sredinu populacije m na nivou poverenja 99% je

$$(2,4 - 1,03;\ 2,4 + 1,03) = (1,369;\ 3,43).$$

(a) Interval poverenja na nivou poverenja 0,9 je $(1,742;\ 3,058)$,
(b) Interval poverenja na nivou poverenja 0,95 je $(1,616;\ 3,184)$.

Zadatak 5.6. *Uzet je uzorak od* 25 *stanovnika jednog grada kako bi se ocenila prosečna potrošnja određenog artikla godišnje. Pokazano je da je ta prosečna potrošnja u ovom uzorku* 186 *dinara sa popravljenom disperzijom uzorka* 144 *dinara. Odrediti* 95% *interval poverenja za aritmetičku sredinu populacije, tj. prosečnu potrošnju u gradu.*

Rešenje.

- Obim uzorka: $n = 25$
- Realizovana uzoračka sredina: $\overline{x}_{25} = 186$
- Realizovana popravljena standardna devijacija uzorka

$$s = \sqrt{144} = 12$$

- Nivo poverenja: $\gamma = 0,95$

- c je kvantil reda
$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1,95}{2} = 0,975$$
t_{24} raspodele (Tabela 1)
$$c = 2,064$$

- $c \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2,064 \cdot 12}{5} = 4,896$

- Traženi interval poverenja za m je:
$$(186 - 4,896;\ 186 + 4,896) = (181,104;\ 190,896).$$

Možemo smatrati da se prosečna godišnja potrošnja posmatranog artikla kreće između 181, 104 i 190, 896 dinara.

Zadatak 5.7. *Obeležje ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu na osnovu uzorka*

I_i	$[0,2)$	$[2,4)$	$[4,6)$	$[6,8)$
f_i	4	7	12	7

Odrediti 95% *(*90%, 99%*) interval poverenja za srednju vrednost populacije.*

Rešenje. Potrebna izračunavanja su prikazana u sledećoj tabeli.

I_i	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
$[0,2)$	1	4	4	4
$[2,4)$	3	7	21	63
$[4,6)$	5	12	60	300
$[6,8)$	7	7	49	343
$\sum$		30	134	710

- Obim uzorka: $n = 30$.

- Realizovana uzoračka sredina:
$$\overline{x}_{30} = \frac{134}{30} = 4,4666...$$

- Realizovana popravljena disperzija uzorka:
$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{29}(710 - 30 \cdot 4,47^2) \\ &= \frac{110,573}{29} = 3,812862... \end{aligned}$$

- Realizovana popravljena standardna devijacija uzorka:
$$\begin{aligned} s &= \sqrt{s^2} = 1,9526... \\ s &= 1,95 \end{aligned}$$

- nivo poverenja: $\gamma = 0,95$
- c je kvantil reda
$$\frac{1+\gamma}{2} = 0,975$$
t_{29} raspodele (Tabela 1)
$$c = 2,045.$$
- $c \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2,045 \cdot 1,95}{\sqrt{30}} = \frac{3,98775}{5,477} = 0,72809...$
- Traženi interval poverenja za m je
$$(4,47 - 0,73;\ 4,47 + 0,73) = (3,74;\ 5,2).$$

Zadatak 5.8. *Posmatramo obeležje X - procenat čistog metala u rudi koji ima normalnu raspodelu. Iz uzorka obima $n = 30$ dobijena je popravljena disperzija uzorka $s_{30}^2 = 7,27$. Za nivo poverenja $\gamma = 0,9$ odrediti dvostrani i jednostrani interval poverenja za nepoznatu disperziju populacije σ^2.*

Rešenje.
- Obim uzorka: $n = 30$.
- Realizovana popravljena disperzija uzorka: $s^2 = 7,27$
- nivo poverenja: $\gamma = 0,9$
- $(n-1)s^2 = 29 \cdot 7,27 = 210,83$

Jednostrani interval poverenja
- c je kvantil χ_{29}^2 - raspodele reda $1 - \gamma = 0,1$
$$c = 19,7677$$
- $\dfrac{(n-1)s^2}{c} = \dfrac{210,83}{19,7677} = 10,66537...$

Traženi interval je: $(0; 10,665)$.

Možemo smatrati da se diperzija procenta čistog metala u rudi kreće između 0% i 10,665%.

Dvostrani interval poverenja
- c_1 je kvantil reda
$$\frac{1-\gamma}{2} = 0,05$$
χ_{29}^2 rapodele (Tabela 4)
$$c = 17,7084$$
- c_2 je kvantil reda
$$\frac{1+\gamma}{2} = 0,95$$
χ_{29^2} rapodele (Tabela 4)
$$c_2 = 42,557$$

• $\dfrac{(n-1)s^2}{c_1} = \dfrac{210,83}{17,7084} = 11,90564...$
• $\dfrac{(n-1)s^2}{c_2} = \dfrac{210,83}{42,557} = 4,95406...$
• Traženi interval je: $(4,954;\ 11,906)$.
Možemo smatrati da se diperzija procenta čistog metala u rudi kreće između $4,954\%$ i $11,906\%$.

Zadatak 5.9. *Obeležje ima normalnu $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ raspodelu. Na osnovu uzorka*

I_i	$[-0,5;0,5)$	$[0,5;1,5)$	$[1,5;2,5)$	$[2,5;3,5)$	$[3,5;4,5)$
f_i	1	4	6	12	2

Odrediti:

(a) 95% *(*$90\%, 99\%$*) interval poverenja za srednju vrednost m populacije;*

(b) 95% *(*$90\%, 99\%$*) jednostrani i dvostrani interval poverenja za nepoznatu disperziju σ^2.*

Rešenje. Potrebna izračunavanja su prikazana u sledećoj tabeli.

I_i	f_i	x_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
$[-0,5;0,5)$	1	0	0	0
$[0,5;1,5)$	4	1	4	4
$[1,5;2,5)$	6	2	12	24
$[2,5;3,5)$	12	3	36	108
$[3,5;4,5)$	2	4	8	32
	25		60	168

- Obim uzorka: $n = 25$.
- Realizovana uzoračka sredina: $\overline{x}_{25} = 2,4$
- Realizovana popravljena disperzija uzorka:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{24}(168 - 25 \cdot 2,4^2) \\ s^2 &= 1 \end{aligned}$$

(a)

- Nivo poverenja: $\gamma = 0,95$
- c je kvantil reda
$$\frac{1+\gamma}{2} = 0,975$$
t_{24} raspodele (Tabela 1):
$$c = 2,064$$
- $c \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{2,064 \cdot 1}{5} = 0,4128$

- Traženi interval poverenja za m je:

$$(2,4-0,4128,\ 2,4+0,4128)=(1,9872,\ 2,8128)$$

(b) Jednostrani interval

- Nivo poverenja: $\gamma=0,9$
- c je kvantil reda

$$1-\gamma=0,1$$

χ^2_{24} raspodele (Tabela 4):

$$c=15,6587$$

- $\dfrac{(n-1)s^2}{c}=\dfrac{24\cdot 1}{15,6587}=1,53269...$
- Traženi jednostrani interval poverenja za σ^2 je:

$$(0,\ 1,533)$$

Dvostrani interval

- c_1 je kvantil reda

$$\frac{0,1-\gamma}{2}=0,05$$

χ^2_{24} rapodele (Tabela 4)

$$c=13,8484$$

- c_2 je kvantil reda

$$\frac{1+\gamma}{2}=0,95$$

χ_{24^2} rapodele (Tabela 4)

$$c_2=36,415$$

- $\dfrac{(n-1)s^2}{c_1}=\dfrac{24}{13,8484}=1,7330...$
- $\dfrac{(n-1)s^2}{c_2}=\dfrac{24}{36,415}=0,6590...$
- Traženi dvostrani interval za nepoznatu σ^2 je

$$(0,959,\ 1,733).$$

Zadatak 5.10. *Obeležje ima normalnu $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ raspodelu. Izvučen je uzorak:*

I_i	$[1,3)$	$[3,5)$	$[5,7)$	$[7,9)$	$[9.11)$
f_i	14	20	30	24	12

Odrediti:

(a) 95% *interval poverenja za* m *;*

(b) 95% *jednostrani i dvostrani interval poverenja za nepoznatu disperziju* σ^2.

Rešenje. Potrebna izračunavanja su prikazana u sledećoj tabeli.

I_i	f_i	x_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
$[1,3)$	14	2	28	56
$[3,5)$	20	4	80	320
$[5,7)$	30	6	180	1080
$[7,9)$	24	8	192	1536
$[9.11)$	12	10	120	1200
$\sum$	100		600	4192

- Obim uzorka: $n = 100$.
- Realizovana uzoračka sredina: $\overline{x}_{100} = \frac{600}{100} = 6$.
- Realizovana popravljena disperzija uzorka:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{99}(4192 - 100 \cdot 6^2) \\ s &= 2,445362... \end{aligned}$$

  Dakle, $s^2 = 5,9798, \qquad s = 2,445.$

- Nivo poverenja: $\gamma = 0,95$

(a) c je kvantil reda

$$\frac{1+\gamma}{2} = 0,975$$

t_{24} raspodele (Tabela 1):

$$c = 2,98.$$

$$c \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1,98 \cdot 2,445}{10} = 0,48411$$

Traženi interval poverenja za m je:

$$(6 - 0,484;\ 6 + 0,484) = (5,516;\ 6,484).$$

(b) Jednostrani interval

- c je kvantil reda

$$1 - \gamma = 0,05$$

  χ^2_{99} raspodele (Tabela 4):

$$c = 77,9295$$

- $\dfrac{(n-1)s^2}{c} = \dfrac{99 \cdot 5,9798}{77,9295} = 7,59661...$

- Traženi jednostrani interval poverenja za σ^2 je:
$$(0,\ 7,5966)$$
Dvostrani interval
- c_1 je kvantil reda
$$\frac{1-\gamma}{2}=0,25$$
χ^2_{99} rapodele (Tabela 4)
$$c_1=74,2219.$$
- c_2 je kvantil reda
$$\frac{1+\gamma}{2}=0,975$$
χ_{99^2} rapodele (Tabela 4)
$$c_2=129,561$$
- $\dfrac{(n-1)s^2}{c_1}=\dfrac{99\cdot 5,9798}{74,2219}=7,9760852...$
- $\dfrac{(n-1)s^2}{c_2}=\dfrac{99\cdot 5,9798}{129,561}=4,569277...$
- Traženi dvostrani interval za σ^2 je
$$(4,569,\ 7,976).$$

Zadatak 5.11. *Sto komponenti je testirano i nađeno je da* 33% *od njih funkcioniše više od* 500 *časova. naći* 95% *interval poverenja da komponenta funkcioniše više od* 500 *časova.*

Rešenje.

- Obim uzorka: $n=100$
- Nivo poverenja: $\gamma=0,95$
- Broj elemenata u uzorku koji ima datu osobinu: $l=93$
- Ocena verovatnoće da komponenta funkcioniše više od 500 časova:
$$\hat{p}=\frac{l}{n}=\frac{93}{100}=0,93$$
- c je kvantil reda
$$\frac{1+\gamma}{2}=0,975$$
normalne raspodele $\mathcal{N}(0,1)$, (Tabela 3)
$$c=1,96$$

$$
\begin{aligned}
c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} &= 1,96\sqrt{\frac{0,93(1-0,93)}{100}} \\
&= 1,96\sqrt{\frac{0,93\cdot}{100}0,07} \\
&= 1,96\sqrt{0,000651} = 0,05
\end{aligned}
$$

- Traženi interval poverenja je:

$$(0,93-0,05;\ 0,93+0,05) = (0,88;\ 0,98)$$

Zadatak 5.12. *Među prvih* 3000 *beba rođenih* 2016. *godine u nekom gradu bilo je* 1578 *dečaka. Odrediti* 99% *interval poverenja za verovatnoću* p *rođenja dečaka.*

Rešenje.

- Obim uzorka: $n = 3000$
- Nivo poverenja: $\gamma = 0,99$
- Broj rođenih dečaka u uzorku: $l = 1578$
- Ocena verovatnoće rođenja dečaka:

$$\hat{p} = \frac{l}{n} = \frac{1578}{3000} = 0,526$$

- c je kvantil reda

$$\frac{1+\gamma}{2} = 0,995$$

normalne raspodele $\mathcal{N}(0,1)$, (Tabela 3)

$$c = 2,5758$$

$$
\begin{aligned}
c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} &= 2,5758\sqrt{\frac{0,526\cdot 0,474}{3000}} \\
&= 2,5758\sqrt{\frac{0,249324}{3000}} \\
&= 2,5758\cdot 0,0091 \\
&= 0,023
\end{aligned}
$$

- Traženi interval poverenja je:

$$(0,526-0,023;\ 0,526+0,023) = (0,503;\ 0,549)$$

5.3 Zadaci za vežbu

1. Obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}(m, 9)$ raspodelu. Na osnovu uzorka

I_i	$[0, 10)$	$[10, 20)$	$[20, 30)$	$[30, 40)$	$[40, 50)$	$[50, 60)$
f_i	10	23	53	35	17	12

   odrediti 95% interval poverenja za nepoznatu aritmetičku sredinu populacije.

2. Koristeći podatke iz prvog zadatka ovog poglavlja, a uz pretpostavku da posmatrano obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu, odrediti:

   (a) Interval poverenja na nivou $\gamma = 0,99$ za nepoznatu aritmetičku sredinu m populacije;

   (b) Jednostrani i dvostrani interval poverenja na nivou $\gamma = 0,99$ za nepoznatu disperziju σ^2 populacije.

3. Iz proizvodnje jednog proizvoda uzet je uzorak od 100 jedinica među kojima je bilo 7 neispravnih proizvoda. Naći 95% interval poverenja za verovatnoću p neispravnih proizvoda u proizvodnji ovog proizvoda.

4. Od 200 slučajno izabranih i anketiranih radnika jednog preduzeća utvrđeno je da je njih 60 zadovoljno poslom koji obavljaju. Odrediti 95% interval poverenja za verovatnoću p da je radnik tog preduzeća zadovoljan svojim poslom.

5. Fabrika je prošle godine proizvela 12250 proizvoda. Uzet je uzorak od 100 proizvoda i među njima je pronađeno 6 proizvoda koji nisu u skladu sa postavljenim standardima.

   (a) Oceniti procenat proizvoda proizvedenih prošle godine u toj fabrici koji nisu u skladu sa postavljenim standardima

   (b) Oceniti u kojim granicama se ovaj procenat kreće na nivou poverenja $\gamma = 0,95$.

   (c) Sa istim nivoom poverenja oceniti u kojim granicama se kreće ukupan broj proizvoda proizvedenih prošle godine u toj fabrici koji nisu u skladu sa postavljenim standardima.

6. Aparat za merenje krvnog pritiska i mmHg je testiran na slučajno odabranim studentima Mašinskog fakulteta. Dobijeni su podaci. 118, 100, 119, 122, 113, 115, 113, 131, 119, 118, 116, 128, 123, 125, 136, 115, 124, 120, 121, 124. Odrediti 99% interval poverenja za aritmetičku sredinu m krvnog pritiska studenata. Odrediti 95% jednostrani i dvostrani interval poverenja za disperziju populacije σ^2.

7. Pivara je nabavila novu mašinu za punjenje limenki pivom limenke treba da sadeže u proseku 340 g piva. Mašina puni limenke standandardnom devijacijom 5,6 g. Radi kontrole kvaliteta, da bi proverio da li je prosečna vrednost težine piva u limenci 340 g, menadžer uzima uzorak od 100 limenki i dobija da je aritmetička sredina težine piva u uzorku 343 g. Odrediti 95% interval poverenja za nepoznatu aritmetičku sredinu težine piva u populaciji. Na osnovu njega zaključiti da li je proizvodnja ispravna, odnosno da li je aritmetička sredina težine piva u populaciji 340 g? (Uputstvo: Ako interval poverenja sadrži 340g, proizvodnja je ispravna.)

8. Kompanija za proizvodnju sijalica počela je da proizvodi nove sijalica koje duže traju, imaju duži životni vek. U kompaniju smatraju da životni vek novih sijalica ima istu disperziju ako i ranije, $\sigma^2 = 16$, ali ne znaju novi prosečan životni vek sijalice m. Da bi ocenili m, uzeli su slučajan uzorak od $n = 100$ sijalica i za svaku izmerili dužinu trajanja. Dobijena je arimetička sredina uzorka $\overline{x}_{100} = 150$ sati. Oceniti m pomoću 95% intervala poverenja.

9. Obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu. Izvučen je uzorak

I_i	(1,3)	(3,5)	(5,7)	(7,9)	(9,11)
m_i	14	20	30	24	12

a) Odrediti 95% interval poverenja za matematičko očekivanje m.

b) Odrediti 95% jednostrani i dvostrani interval poverenja za nepoznatu disperziju σ^2.

10. Većina avio kompanija dozvoljava punicima da unose dve putne torbe u avion. Međtim, što se više prtljaga unosi, duže traje utovat i istovar prtljaga u avion. Jedna regionalna avio kompanija razmatra mogućnost da svojim putnicima dozvoli unošenje samo jednog komada prtljaga u avion. Odlučili su da prikupe podatke na osnovu kojih će doneti odluku. Izabran je slučajni uzorak od 1000 putnika i utvrđeno da je 345 od njih u avion unelo više od jednog komad aprtljaga.

   (a) Na osnovu ovih podataka odrediti 95% interval poverenja za procenat putnika na koji bi uticala nova politika "jednog prtljaga".

   (b) Ako avion ove kompanije ima kapacitet od 568 putnika, na osnovu prethodnog rezultata odrediti u kojim granicama se kreće broj putnika koji bi u avion uneli više od jednog prtljaga.

Glava 6

Testiranje statističkih hipoteza - Neki parametarski testovi

6.1 Teorijske osnove

- **Testiranje statističkih hipoteza**

Testiranje hipoteze: oblast statističke analize koja

- omogućuje sistematsko donošenje odluka o problemima koji u sebi sadrže neodređenost,
- omogućuje da se podaci dobijeni iz uzorka mogu kombinovati sa statističkom teorijom i na taj način izvode zaključci o celoj populaciji,
- otklanja uticaj subjektivnosti pojedinca i tako dovodi do racionalnijeg i tačnijeg zaključivanja.

1^o *Statistički test*

Statistička hipoteza: svaka pretpostavka o raspodeli obeležja X.

Statistički test: postupak prihvatanja ili odbacivanja statističkih hipoteza na osnovu realizovanog uzorka.

Statistički test: niz $((X_1, X_2, ..., X_n); H_0, H_1, C)$,
u kome su

· $(X_1, X_2, ..., X_n)$ uzorak,
· H_0, H_1 par hipoteza koje se uvek javljaju prilikom izvođenja statističkog testa.

- **Testiranje vrednosti parametara**

Sprovodi se kada je poznat oblik raspodele obeležja, ali je nepoznat neki od parametara te raspodele.

2^o *Važni pojmovi*

Nulta hipoteza $H_0(\theta = \theta_0)$: pretpostavka da je moguća vrednost nepoznatog parametra θ broj θ_0.

Alternativna hipoteza: negacije nulte hipoteze i može se javiti u jednom od sledeća tri oblika

$H_1(\theta \neq \theta_0)$, $H_1(\theta > \theta_0)$, $H_1(\theta < \theta_0)$.

Oblast odbacivanja nulte hipoteze ili ***kritična oblast*** za nultu hipotezu: skup C podskup skupa realnih brojeva.

1^o Podela statističkih testova

Izvršena na osnovu oblika alternativne hipoteze.

- *Dvostrani* test: $H_0(\theta = \theta_0)$, $H_1(\theta \neq \theta_1)$;
- *Jednostrani* test
  - · donji: $H_0(\theta = \theta_0)$, $H_1(\theta < \theta_0)$;
  - · gornji: $H_0(\theta = \theta_0)$, $H_1(\theta > \theta_0)$.

- **Statistički test - procedura**

Korak 1: Izbor hipoteza H_0 i H_1.

Korak 2: Izbor nivoa značajnosti α.
Bira je istraživač - najčešće: $0,1$; $0,01$ i $0,05$.

Korak 3: Izbor test statistike T (koja služi kao kriterijum za donošenje odluke) i određivanje kritične oblasti C.

Korak 4: Izračunavanje realizovane vrednosti t_{reg} statistike T testa iz dostupnih podataka.

Korak 5: Statistički zaključak

- $t_{reg} \in C \;\Rightarrow\; H_0$ se odbacuje na osnovu datog uzorka, na nivou značajnosti α;
- $t_{reg} \notin C \;\Rightarrow\; H_0$ na osnovu datog uzorka nemamo osnova da odbacimo hipotezu H_0, na nivou značajnosti α.

- **Greške prve i druge vrste**

Prilikom testiranja hipoteze H_0 protiv alternativne mogu nastati dve greške.

Greška prve vrste sa verovatnoćom α: hipoteza H_0 je tačna, ali zbog slučajnosti izbora uzorka, realizovana vrednost test statistike pada u kritičnu oblast C, pa se hipoteza H_0 odbacuje.

Greška druge vrste sa verovatnoćom β: hipoteza H_1 je tačna, ali zbog slučajnosti izbora uzorka, realizovana vrednost test statistike pada van kritične oblasti C, pa se hipoteza H_0 prihvata.

Još neki pojmovi

α: *nivo značajnosti* ili veličina testa;
$1-\alpha$: senzitivnost testa;
$1-\beta$: specifičnost testa.

	stanje (istina) na populaciji	
odluka na osnovu analize uzoračkih podataka	H_0 je tačna	H_1 je tačna
Prihvata se H_0	Ispravan zaključak $(1-\alpha)$	greška druge vrste (β)
Odbacuje se H_0	Greška prve vrste (α)	Ispravan zaključak $(1-\beta)$

`Napomena.` Nivo značajnosti α znači, da ako bismo bili u mogućnosti da biramo veći broj uzoraka, na osnovu $100\cdot(1-\alpha)\%$ uzoraka bismo dobili ispravan zaključak, a na osnovu $100\cdot\alpha\%$ ne. Kako raspolažemo samo jednim uzorkom, prihvatamo zaključak na osnovu njega kao tačan, a navodimo da je dobijeni zaključak na nivou značajnosti α.

- **Testovi kada obeležje ima normalnu $\mathcal{N}\,(m,\sigma^2)$ raspodelu**

3^o *Testiranje hipoteze o srednjoj vrednosti m obeležja*

3^o1. *Disperzija populacije σ^2 obeležja* ***jeste*** *poznata - z-test*

. Test statistika:

$$T=\frac{\overline{X}_n-m_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

$H_0(m=m_0)$		
alternativna	kritična oblast	uputstvo
$H_1(m>m_0)$	$C=[c,\infty)$	c je kvantil reda $1-\alpha$, $\mathcal{N}\,(0,1)$ raspodele
$H_1(m<m_0)$	$C=[-\infty,c]$	c je kvantil reda α, $\mathcal{N}\,(0,1)$ raspodele
$H_1(m\neq m_0)$	$C=(-\infty,-c]\cup[c,\infty)$	c je kvantil reda $1-\frac{\alpha}{2}$, $\mathcal{N}\,(0,1)$ raspodele

Tabela 3

3^o2. *Disperzija populacije σ^2 obeležja* ***nije*** *poznata - Studentov t-test*

. Test statistika:

$$T=\frac{\overline{X}_n-m_0}{S}\sqrt{n}$$

$H_0(m=m_0)$		
alternativna	kritična oblast	uputstvo
$H_1(m>m_0)$	$C=[c,\infty)$	c je kvantil reda $1-\alpha$, t_{n-1} raspodele
$H_1(m<m_0)$	$C=[-\infty,c]$	c je kvantil reda α, t_{n-1} raspodele
$H_1(m\neq m_0)$	$C=(-\infty,-c]\cup[c,\infty)$	c je kvantil reda $1-\frac{\alpha}{2}$, t_{n-1} raspodele

Tabela 1

3^o Testiranje hipoteze o disperziji σ^2 obeležja

- Hipoteze: $H_0(\sigma^2 = \sigma_0^2)$, $H_1(\sigma^2 > \sigma_0^2)$.
- Test statistika
$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$
- Kritična oblast: $C = [c, \infty)$,

  c je kvantil reda $1-\alpha$ za χ^2_{n-1} raspodelu (Tabela 4).

- **Testiranje hipoteze o nepoznatoj verovatnoći populacije**

. Hipoteze: $H_0(p = p_0)$, $H_1(p \neq p_0)$.
. Ocena nepoznate verovatnoće p da element populacije ima datu osobinu je statistika $\hat{p} = \frac{L}{n}$
gde su

$\cdot\ n$ obim uzorka $\cdot\ L$ broj elemenata u uzorku koji ima tu osobinu

. Test statistika:
$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$
. Kritična oblast: $C = (-\infty, -c] \cup [c, +\infty)$

c je kvantil reda $1 - \frac{\alpha}{2}$ normalne $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele (Tabela 3)

Uputstvo za upotrebu: kada obim uzorka n zadovoljava uslove: $np_0 > 5$ i $n(1-p_0) > 5$.

6.2 Rešeni zadaci

Zadatak 6.1. *Aritmetička sredina trajanja sijalica u uzorku od* 100 *sijalica je* $1570h$, *sa poznatom standardnom devijacijom populacije* $120h$. *Ako je* m *aritmetička sredina trajanja sijalici te fabrike (populacije), testirati hipotezu* $H_0(m = 1600)$ *protiv altednativne* $H_1(m \neq 1600)$ *koristeći nivo značajnosti: (a)* $\alpha = 0,05$*; (b)* $\alpha = 0,01$.

Rešenje. Posmatrano obeležje X ima $\mathcal{N}\ (m, 120^2)$ raspodelu

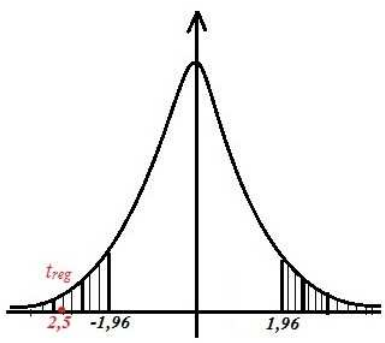
- Obim uzorka: $n = 100$
- Aritmetička sredina uzorka: $\overline{x}_{100} = 1570$
- Standardna devijacija populacije: $\sigma = 120$
- Hipoteze:
$$H_0(m = 1600),\ H_1 = (m \neq 1600)$$
- Test statistika:
$$T = \frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

- realizovana vrednost test statistike:

$$t_{reg} = \frac{1570 - 1600}{120}\sqrt{100} = -0,25 \cdot 10 = -2,5$$

(a)

- Nivo značajnosti: $\alpha = 0,05$
- c je kvantil reda
$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$$
$\mathcal{N}\ (0,1)$ raspodele (Tabela 3)
$$c = 1,96$$
- Kritična oblast: $C = (-\infty; -c] \cup [c; +\infty)$, tj.
$$C = (-\infty; -1,96] \cup [1,96; +\infty) \qquad \text{(Slika 6.1)}$$
- Statistički zaključak:
$t_{reg} = -2,5 \in C \Longrightarrow H_0$ se odbacuje.



Slika 6.1

(b)

- Nivo značajnosti: $\alpha = 0,01$
- c je kvantil reda
$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995$$
normalne $\mathcal{N}\ (0,1)$ raspodele (Tabela 3):
$$c = 2,58.$$

- Kritična oblast je $C = (-\infty; -2,58] \cup [2,58; +\infty)$
- Statistički zaključak: $t_{reg} = -2,5 \notin C$, sledi da nemamo osnova da odbacimo hipotezu H_0.

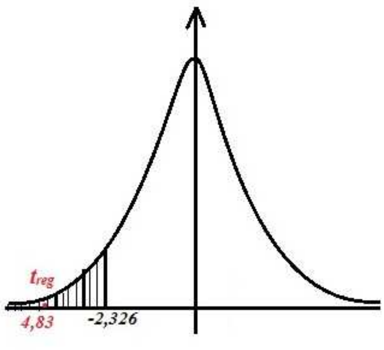
Zadatak 6.2. *Prosečni vek trajanja sijalice je* 2000 h, *sa standardnom devijacijom od:* (a) 150 h, (b) 250 h. *Izabran je slučajni uzorak od* 100 *sijalica i na osnovu toga je određena srednja vrednost* 1935 h. *Sa rizikom od* 1% *može li se pretpostaviti da uzorak koji je izabran odgovara standardu?*

Rešenje. Posmatrano obeležje X ima $\mathcal{N}\ (m, 150^2)$ ili $\mathcal{N}\ (m, 250^2)$ raspodelu pa primenjujemo z - test.

- Obim uzorka: $n = 100$
- Aritmetička sredina uzorka: $\overline{x}_{100} = 1935$
- $m_0 = 2000$
- Hipoteze:
$$H_0(m = 2000), \quad H_1(m < 2000)$$

(a)

- Nivo značajnosti: $\alpha = 0,01$
- Standardna devijacija populacije: $\sigma = 150$
- Test statistika
$$T = \frac{\overline{X}_n = m_0}{\sigma}\sqrt{n}$$
- Realizovana vrednost test statistike:
$$t_{reg} = \frac{1935 - 2000}{150}\sqrt{100} = -4,33$$
- Kritična oblast: $C = (-\infty, c]$
  - c je kvantil reda $\alpha = 0,01$ normalne $\mathcal{N}\ (0,1)$ raspodele (Tabela 3).
    Za $\alpha = 0,01 < 0,5$ važi:
$$c_{0,01} = -c_{1-0,01} = -c_{0,99} = -2,3263$$
    pa je
$$C = (-\infty, -2,3263], \qquad \text{(Slika 6.2).}$$
- Statistički zaključak:
  $t_{reg} \in C \Longrightarrow H_0$ se odbacuje na nivou značajnosti $\alpha = 0,01$.



Slika 6.2

Zadatak 6.3. *Iz populacije sa obeležjem X za koje je poznato standardno odstupanje 30, uzet je uzorak obima $n = 998$ i na osnovu njega je dobijena srednja vrednost $24,3$. Sa nivoom značajnosti od $\alpha = 0,05$ testirati hipotezu $H_0(m = 24)$, protiv alternativnih (a) $H_1(m > 24)$; (b) $H_1(m \neq 24)$.*

Rešenje. Posmatrano obeležje ima $\mathcal{N}\ (m, 30^2)$ raspodelu te primenjujemo z - test.

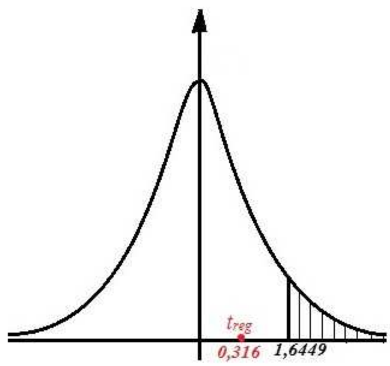
- Obim uzorka: $n = 998$
- Aritmetička sredina uzorka: $\overline{x}_n = 24,3$
- Standardna devijacija populacije: $\sigma = 30$
- Nivo značajnosti: $\alpha = 0,05$
- Test statistika:
$$T = \frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$$
- Realizovana vrednost test statistike:
$$t_{reg} = \frac{24,3 - 24}{30}\sqrt{998} = 0,316.$$

(a) Gornji jednostrani test:
$$H_0(m = 24),\ H_1(m > 24)$$

- Kritična oblast: $C = [c, +\infty)$,

- gde je c je kvantil reda
$$1-\alpha=0,95$$
normalne $\mathcal{N}\ (0,1)$ raspodele (Tabela 3), odnosno
$$c=1,6449,$$
pa je
$$C=[1,6449,+\infty), \qquad \text{(Slika 6.3)}.$$

- Statističko zaključivanje:
$t_{reg}=0,316\notin C \Longrightarrow$ nemamo osnova da odbacimo hipotezu H_0 na nivou značajnosti $\alpha=0,05$.



Slika 6.3

Zadatak 6.4. *Obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}\ (m;1,2)$ raspodelu. Na osnovu uzorka*

I_i	$[-0,5;0,5)$	$[0,5;1,5)$	$[1,5;2,5)$	$[2,5;3,5)$	$[3,5;4,5)$
f_i	1	4	6	12	2

testirati hipotezu $H_0(m=2)$ protiv alternativne $H_1(m>2)$ sa nivoom značajnosti: (a) $\alpha=0,05$; (b) $\alpha=0,01$; (c) $\alpha=0,1$

Rešenje. Kako je disperzija $\sigma^2=1,2$ ove raspodele poznata, to koristimo z - test. U rešavanju ovog zadatka koristićemo podatke dobijene u Zadatku 5.5.

- Obim uzorka: $n=25$
- Aritmetička sredina uzorka: $\overline{x}_{25}=2,4$
- Vrsta testa: gornji jednostrani
- Test statistika
$$T=\frac{\overline{X}_n-m_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

- Realizovana vrednost test statistike:

$$t_{reg} = \frac{2,4-2}{\sqrt{1,2}}\sqrt{25} = \frac{2}{1,095} = 1,826.$$

(a) Nivo značajnosti je $\alpha = 0,05$.

- Kritična oblast: $C = [c, +\infty)$
  - c je kvantil reda

    $$1 - \alpha = 0,95$$

    normalne $\mathcal{N}\ (0,1)$ raspodele (Tabela 3), $c = 1,6449$, pa je

    $$C = [1,6449; +\infty).$$

- Statističko zaključivanje

  $t_{reg} = 1,826 \in C \Longrightarrow H_0$ se odbacuje na nivou značajnosti $\alpha = 0,05$.

Zadatak 6.5. *Iz populacije sa obeležjem $X : N(m, \sigma^2)$ uzet je uzorak obima $n = 25$ i na osnovu njega je dobijena sredina uzorka $\overline{x}_{25} = 4$ i popravljena disperzija uzorka $s^2 = 1,44$. Sa nivoom značajnosti $\alpha = 0,01$ testirati hipotezu $H_0(m = 2)$ protiv alternativne $H_1(m \neq 2)$.*

Rešenje. Primenjuje se Studentov t - test

- Dati podaci:

$$n = 2,5$$
$$\overline{x}_{25} = 4$$
$$s^2 = 1,44$$
$$\alpha = 0,01$$

- Realizovana vrednost test statistike:

$$t_{reg} = \frac{4-2}{1,2}\sqrt{25} = 8,33$$

- Kritična oblast: $C = (-\infty, -c] \cup [c, +\infty)$
  - c je kvantil reda

    $$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$$

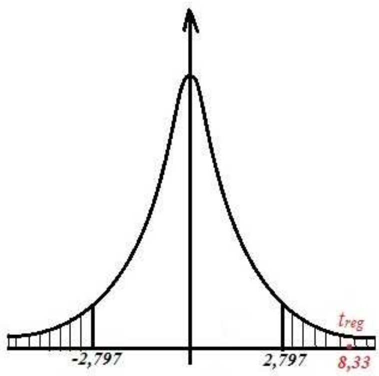
    Studentove t_{24} raspodele, (Tabela 1),

    $$c = 2,797,$$

    pa je

    $$C = (-\infty; -2,797] \cup [2,797; +\infty), \qquad \text{(Slika 6.4).}$$

- Statističko zaključivanje:
  $t_{reg} = 8,33 \in C \Longrightarrow H_0$ se odbacuje na nivou značajnosti $\alpha = 0,01$.



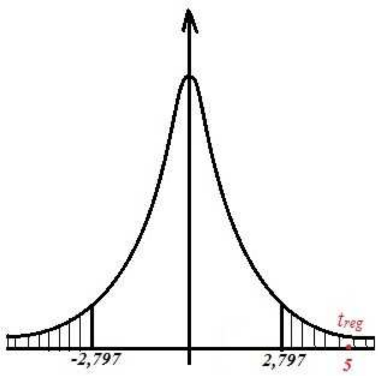
Slika 6.4

Zadatak 6.6. *Mašina proizvodi ploče debljine $0,5mm$. Da bi se proverilo da li mašina dobro radi uzet je uzorak od $n = 25$ ploča i na osnovu njega određena je aritmetička sredina uzorka $\overline{x}_{25} = 0,53\,mm$ i (popravljeno) standardno odstupanje uzorka $s = 0,03\,mm$. Testirati hipotezu da su ploče propisane debljine sa novoom značajnosti od $\alpha = 0,01$. $(H_0(m = 0,5), H_1(m \neq 0,5))$*

Rešenje. Posmatrano obeležje X ima $N(m, \sigma^2)$ raspodelu, pa primenjujemo Studentov t - test.

- Obim uzorka: $n = 25$
- Sredina uzorka: $\overline{x}_{25} = 0,53$
- Popravljeno standardno odstupanje: $s = 0,03$
- Hipoteze:
$$H_0(m = 0,5).\ H_1(m \neq 0,5)$$
- Nivo značajnosti: $\alpha = 0,01$
- Test statistika:
$$T = \frac{\overline{X}_n - m_0}{S}\sqrt{n}$$
- Realizovana test statistika:
$$t_{reg} = \frac{0,53 - 0,5}{0,03}\sqrt{25} = 5$$

- Kritična oblast: $C = (-\infty, -c] \cup [-c, +\infty)$
  - c je kvantil reda
  $$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$$
  Studentove t_{24} raspodele (Tabela 1)
  $$c = 2,797$$
  $$C = (-\infty; -2,797] \cup [2,797; +\infty), \qquad \text{(Slika 6.5)}.$$
- Statističko zaključivanje:
  $t_{reg} = 5 \in C \Longrightarrow H_0$ se odbacuje na nivou značajnosti $\alpha = 0,05$.



Slika 6.5

Zadatak 6.7. *Mašina proizvodi kuglice prečnika debljine* $0,5\,cm$. *Da bi proverili da li kuglice imaju prečnik propisane debljine uzima se uzorak od* $n = 10$ *kuglica. Ako je aritmetička sredina uzorka* $0,53$ *i (popravljeno) uzoračko standardno odstupanje* $0,03\,cm$, *testirati hipotezu da mašina proizvodi kuglice propisanog prečnika sa nivoom značajnosti* $0,05$. $(H_0(m = 0,5), H_1(m \neq 0,5))$

Rešenje. Kako disperzija populacije nije poznata, primenjujemo Studentov t - test.

- Obim uzorka: $n = 10$
- Sredina uzorka: $\overline{x}_{10} = 0,53$
- Popravljeno standardno odstupanje: $s = 0,03$
- Nivo značajnosti: $\alpha = 0,05$

- Hipoteze: $H_0(m = 0,5)$, $H_1(m \neq 0,5)$
- Test statistika: $T = \frac{\overline{X}_n - m_0}{S}\sqrt{n}$
- Realizovana test statistika:

$$t_{reg} = \frac{0,53 - 0,5}{0,03}\sqrt{10} = \frac{0,03}{0,03}\sqrt{10} = \sqrt{10} = 3,16227$$

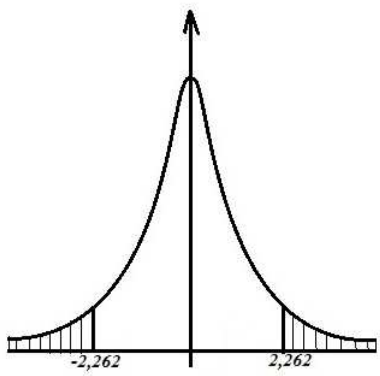
$$t_{reg} = 3,16$$

- Kritična oblast: $C = (-\infty, -c] \cup [c, +\infty)$
  - c je kvantil reda

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$$

Studentove t_9 taspodele (Tabela 1), $c = 2,262$ pa je

$$C = (-\infty; -2,262] \cup [2,262; +\infty), \qquad \text{(Slika 6.6)}.$$



Slika 6.6

- Statističko zaključivanje:
  $t_{reg} = 3,16 \in C \Longrightarrow H_0$ se odbacuje na nivou značajnosti $0,05$.

Zadatak 6.8. *Obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}\,(m, \sigma^2)$ raspodelu. Na osnovu uzorka*

I_i	$[-0,5;0,5)$	$[0,5;1,5)$	$[1,5;2,5)$	$[2,5;3,5)$	$[3,5;4,5)$
f_i	1	4	6	12	2

testirati hipotezu $H_0(m = 2)$ protiv alternativne: (a) $H_1(m > 2)$; (b) $H_1(m \neq 2)$ sa nivoom značajnosti $\alpha = 0,05$

Rešenje. Primenjujemo Studentov t - test. Koristićemo izračunate podatke iz Zadatka 5.9

$$n = 25$$

$$\overline{x}_{25} = 2,4$$

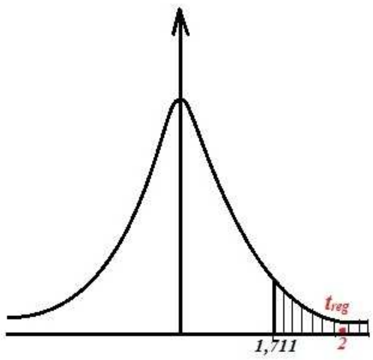
$$s^2 = 1$$

- Realizovana vrednost test statistike:

$$t_{reg} = \frac{2,4 - 2}{1}\sqrt{25} = 2$$

(a)

- Kritična oblast: $C = [c, \infty)$
  - c je kvantil reda
  $$1 - \alpha = 0,95$$
  Studentove t_{24} raspodele (Tabela 1)
  $$c = 1,711$$
  $$C = [1,711; +\infty), \qquad \text{(Slika 6.7).}$$
- Statističko zaključivanje:
  $t_{reg} = 2 \in C \Longrightarrow H_0$ se odbacuje na nivou značajnosti $0,05$.



Slika 6.7

(b)

- Kritična oblast: $C = (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$
  - c je kvantil reda $1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$ Studentove t_{24} raspodele (Tabela 1), $c = 2{,}064$, pa je
$$C = (-\infty; -2{,}064] \cup [2{,}064, \infty).$$
- Statističko zaključivanje

  $t_{reg} = 2 \notin C \Longrightarrow$ nemamo osnova da odbacimo H_0 na nivou značajnosti $0{,}05$.

Zadatak 6.9. *Iz jedne populacije je dobijen uzorak*

I_i	$[210, 250)$	$[250, 290)$	$[290, 330)$	$[330, 370)$
f_i	30	70	40	10

(a) Izračunati srednju vrednost uzorka, popravljenu disperziju i popravljenu standardnu devijaciju;
(b) Testirati hipotezu $H_0(m = 290)$ protiv alternativne $H_1(m \neq 290)$ sa nivoom značajnosti od $\alpha = 0{,}01$.
(c) Testirati hipotezu $H_0(m = 290)$ protiv alternativne $H_1(m < 290)$ sa nivoom značajnosti $\alpha = 0{,}01$.

Rešenje. (a)

- Obim uzorka: $n = 150$

I_i	f_i	x_0	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
$[210, 250)$	10	230	6900	1587000
$[250, 290)$	70	270	18900	5103000
$[290, 330)$	40	310	12400	3844000
$[330, 370)$	10	350	3500	1225000
$\sum$	150		41700	11759000

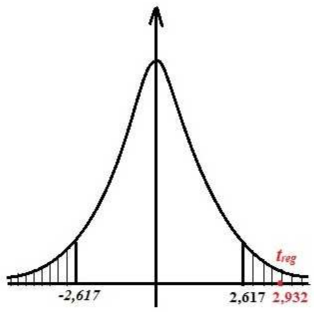
$$\overline{x}_{150} = \frac{41700}{150} = 278$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{149}(11759000 = 150 \cdot 278^2) = \frac{166400}{149} = 1116{,}7785 \\ s &= \sqrt{s^2} = 33{,}4182 \\ s &= 33{,}42 \end{aligned}$$

(b) Primena Studentovog t - testa

- Nivo značajnosti: $\alpha = 0{,}01$
- Hipoteze:
$$H_0(m = 290),\ H_1(m \neq 290)$$
- Realizovana vrednost test statistike
$$t_{reg} = \frac{278 - 290}{33{,}42} \cdot \sqrt{150} = -4{,}3972$$

- Kritična oblast: $C = (-\infty; -c] \cup [c; +\infty)$
  - c je kvantil reda
$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$$
Studentove t_{149} raspodele (Tabela 1),
$$c = 2,617$$
$$C = (-\infty; -2,617] \cup [2,617; +\infty), \qquad \text{(Slika 6.8)}.$$
- Statističko zaključivanje:
$t_{reg} = -4,3972 \in C \Longrightarrow H_0$ se odbacuje na nivou značajnosti $\alpha = 0,01$.

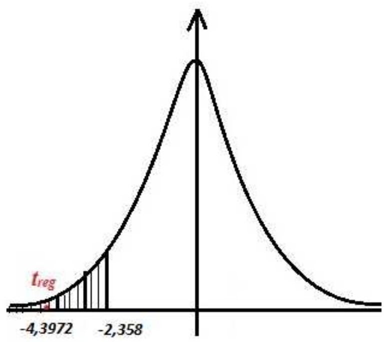


Slika 6.8

(c) Primena Studentovog t - testa

- Nivo značajnosti: $\alpha = 0,01$
- Hipoteze
$$H_0(m = 290),\ H_1(m < 290)$$
- Realizovana vrednost test statistike
$$t_{reg} = \frac{278 - 290}{33,42} \cdot \sqrt{150} = -4,3972$$
- Kritična oblast: $C = (-\infty, c]$
  - c je kvantil reda
$$\alpha = 0,01$$
Studentove t_{149} raspodele (Tabela 1). Kako je $\alpha = 0,01 < 0,5$
$$c = c_\alpha = -c_{1-\alpha} = -c_{0,99} = -2,358$$
pa je
$$C = (-\infty; -2,358], \qquad \text{(Slika 6.9)}.$$

– Statističko zaključivanje:
$t_{reg} = -4,3972 \in C \Longrightarrow H_0$ se odbacuje na nivou značajnosti $\alpha = 0,01$.



Slika 6.9

Zadatak 6.10. *Biolog je posmatrao broj leptirova X u uzorku od 121 i zabeležio sledeće rezultate*

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	7	11	16	17	26	31	11	1	1

(a) Izračunati srednju vrednost uzorka, popravljenu disperziju i popravljenu standardnu devijaciju.

(b) Testirati hipotezu $H_0(m = 5)$ protiv alternativne $H_1(m \neq 5)$ sa nivoom značajnosti od $\alpha = 0,05$.

(c) Testirati hipotezu $H_0(\sigma^2 = 3)$ protiv alternativne $H_1(\sigma^2 > 3)$ sa nivoom značajnosti od $\alpha = 0,05$.

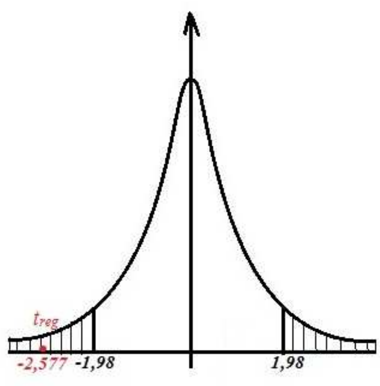
Rešenje. (a) Obim uzorka: $n = 121$

x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
1	7	7	1	7
2	11	22	4	44
3	16	48	9	144
4	17	68	16	272
5	26	130	25	650
6	31	186	36	1116
7	11	77	49	539
8	1	8	64	64
9	1	9	81	81
	121	555		2917

$$\begin{aligned}
\overline{x}_{121} &= \frac{555}{121} = 4,59 \\
s^2 &= \frac{1}{120}(2917 - 121 \cdot 4,59^2) = \frac{367,7599}{120} \\
s^2 &= 3,06 \\
s &= \sqrt{s^2} \\
s &= 1,75
\end{aligned}$$

(b) Primenjujemo Studentov t - test

- Hipoteze:
$$H_0(m = 5), \quad H_1(m \neq 5)$$
- Nivo značajnosti: $\alpha = 0,05$
- Realizovana vrednost test statistike:
$$t_{reg} = \frac{4,59 - 5}{1,75}\sqrt{121} = -\frac{4,51}{1,75} = -2,577$$
- Kritična oblast: $C = (-\infty; -c] \cup [c, +\infty)$
  - c je kvantil reda
  $$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$
  Studentove t_{120} raspodele (Tabela 1)
  $$c = 1,98$$
  $$C = (-\infty; -1,98] \cup [1,98; +\infty), \qquad \text{(Slika 6.10)}.$$
- Statističko zaključivanje:
$t_{reg} = -2,577 \in C \Longrightarrow H_0$ se odbacuje na nivou značajnosti $0,05$.



Slika 6.10

(c)

- Obim uzorka: $n = 121$
- Hipoteze:

$$H_0(\sigma^2 = 3), \quad H_1(\sigma^2 > 3)$$

- Popravljena disperzija uzorka: $s^2 = 3,06$
- Nivo značajnosti: $\alpha = 0,05$
- Test statistika

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

- Realizovana vrednost test statistike:

$$t_{reg} = \frac{121 \cdot 3,06}{3} = 122,4$$

- Kritična oblast: $C = [c, +\infty)$
  - c je kvantil reda

$$1 - \alpha = 0,95$$

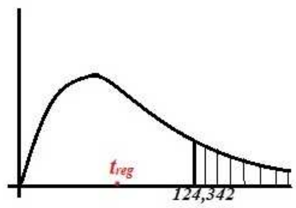
  χ^2_{120} raspodele (Tabela 4)

$$c = 124,342$$

$$C = [124,342;\ +\infty), \qquad \text{(Slika 6.11)}.$$

- Statistički zaključak

  $t_{reg} = 122,4 \notin C \Longrightarrow$ nemamo osnova da odbacimo H_0 na nivou značajnosti $\alpha = 0,05$.



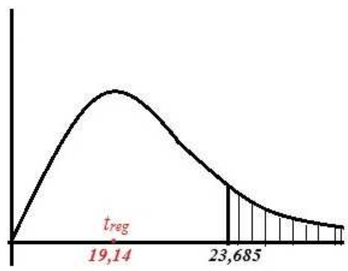
Slika 6.11

Zadatak 6.11. *Određen tehnološki postupak se smatra stabilan ako je disperzija predmeta koji se pravi jednaka* $1,8$. *Iz uzorka obima* $n = 15$ *dobijena je popravljena disperzija uzorka* $s^2 = 2,5$. *Testirati da li je postupak stabilan na nivou značajnosti* $\alpha = 0,05$.

Rešenje.

- Obim uzorka: $n = 15$
- Hipoteze:
$$H_0(\sigma^2 = 1,8), \;\; H_1(\sigma^2 > 1,8)$$
- Popravljena disperzija uzorka: $s^2 = 2,5$
- Nivo značajnosti: $\alpha = 0,05$
- Test statistika
$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$
- Realizovana vrednost test statistike:
$$t_{reg} = \frac{14 \cdot 2,5}{1,8} = \frac{35}{1,8} = 19,44$$
- Kritična oblast: $C = [c, +\infty)$
  - c je kvantil reda
$$1 - \alpha = 0,95$$
    χ^2_{14} raspodele (Tabela 4)
$$c = 23,685$$
$$C = [23,685; +\infty), \qquad \text{(Slika 6.12)}.$$
- Statistički zaključak

  $t_{reg} = 19,44 \notin C \implies$ nemamo osnova da odbacimo H_0 na nivou značajnosti $\alpha = 0,05$.



Slika 6.12

Zadatak 6.12. *Prema standardima prosečan broj nedostataka po* $1\ m^2$ *tkanine ne sme biti veći od* 3. *Na slučajan način odabrano je* $100\ m^2$ *tkanine i na svakom kvadratnom metru tkanine je izbrojan broj nedostataka. Dobijeni su rezultati:*

broj nedostataka	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
broj m^2	15	12	15	22	15	8	5	3	3	2

Ako znamo da broj nedostataka na tkanini ima normalnu raspodelu, sa nivoom značajnosti $\alpha = 0,01$*, testirati hipotezu da ova vrsta tkanine zadovoljava uslove standarda.*

Rešenje.

- Obim uzorka: $n = 100$
- Hipoteze:

$$H_0(m = 3), \quad H_1(m > 3)$$

- Nivo značajnosti: $\alpha = 0,01$
- Potrebna izračunavanja:

x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
1	15	15	1	15
2	12	24	4	48
3	15	45	9	135
4	22	88	16	352
5	15	75	25	375
6	8	48	36	288
7	5	35	49	245
8	3	24	64	192
9	3	27	81	243
10	2	20	100	200
	100	401		2093

$$\begin{aligned}
\overline{x}_{100} &= \frac{401}{100} = 4,01 \\
s^2 &= \frac{1}{99}(2093 - 100 \cdot 4,01^2) = \frac{484,99}{99} = 4,8988... \\
s^2 &= 4,9
\end{aligned}$$

- Realizovana vrednost test statistike:

$$t_{reg} = \frac{4,01 - 3}{4,9}\sqrt{100} = 4,56$$

- Kritična oblast: $C = [c, +\infty)$
  - c je kvantil reda

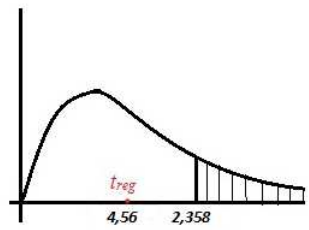
$$1 - \alpha = 0,99$$

    Studentove t_{99} raspodele (Tabela 1)

$$c = 2,358$$

$$C = [2,358; +\infty), \qquad \text{(Slika 6.13)}$$

- Statističko zaključivanje
  $t_{reg} = 4,56 \in C \Longrightarrow H_0$ se odbacuje na nivou značajnosti $0,01$.

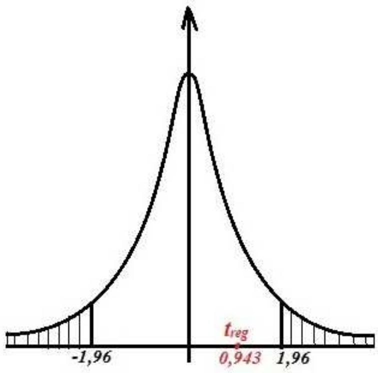


Slika 6.13

Zadatak 6.13. *U uzorku od* 200 *proizvoda proizvedenih na izvesnoj mašini* 24 *su neispravna. Testirati hipotezu da mašina proizvodi* 10% *neispravnih proizvoda za* $\alpha = 0,05$.

Rešenje.

- Hipoteze:
$$H_0(p = 0,1), \quad H_1(p \neq 0,1)$$
- Nivo značajnosti: $\alpha = 0,05$
- Obim uzorka: $n = 200$
- Ocena za p:
$$\hat{p} = \frac{24}{200} = 0,12$$
- Realizovana vrednost test statistike:
$$z_{reg} = \frac{0,12 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{200}}} = \frac{0,02}{0,0212} = 0,943$$
- Kritična oblast: $C = (-\infty, -c] \cup [c, +\infty)$
  - c je kvantil reda
  $$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$
  normale $\mathcal{N}\ (0,1)$ raspodele (Tabela 3)
  $$c = 1,96$$
  $$C = (-\infty; -1,96] \cup [1,96; +\infty),, \qquad \text{(Slika 6.14).}$$
- Statističko zaključivanje:
  $z_{reg} = 0,943 \notin C \Longrightarrow$ nemamo osnova da odbacimo H_0 na nivou značajnosti $\alpha = 0,05$.



Slika 6.14

`Napomena.` Kako je $np_0 = 200 \cdot 0,12 = 24 > 5$ i $n(1-p_0) = 200 \cdot 0,88 = 176 > 5$ to ovaj test ispunjava uslove primene.

Zadatak 6.14. *Proizvođač tvrdi da u* 90% *slučajeva novi lek pomaže bolesnicima. Novi lek je dat grupi od* 250 *bolesnika i lek je doveo do ozdravljenja njih 160. Na nivou značajnosti* $\alpha = 0,01$ *ispitati da li je proizvođač u pravu.*

Rešenje.

- Dato:
  - $p_0 = 0,9$
  - $L = 160$
  - $n = 250$
- Hipoteze:
$$H_0(p = 0,9), \quad H_1(p \neq 0,9)$$
- Ocena za p:
$$\hat{p} = \frac{160}{250} = 0,64$$
- Realizovana vrednost statistike:
$$z_{reg} = \frac{0,64 - 0,9}{\sqrt{\frac{0,64 - 0,36}{250}}} = -\frac{0,26}{0,03} = -8,67$$
- Kritična oblast:

– c je kvantil reda

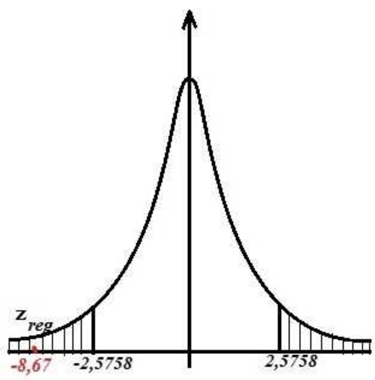
$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$$

normalne $\mathcal{N}\ (0,1)$ raspodele (Tabela 3)

$$c = 2,5758$$

$$C = (-\infty; -2,5758] \cup [2,5758; +\infty), \qquad \text{(Slika 6.15)}.$$

- Statističko zaključivanje:
  $z_{reg} = -8,67 \in C \Longrightarrow H_0$ se odbacuje na nivou značajnosti $\alpha = 0,01$.



Slika 6.15

6.3 Zadaci za vežbu

1. Šećer se pakuje u kese koje po standardu treba da su težine 1 kg. U cilju kontrole uzet je uzorak od $n = 100$ pakovanja. Znajući da je standardno odstupanje $\sigma = 30\ g$, i nivo značajnosti $\alpha = 0,05$ testirati hipotezu da u pakovanjima ima manje šećera. $(H_0(m = 1000), H_1(m < 1000))$

2. Fabrika za proizvodju guma je počela da proizvodi gume novog dizajna za koje smatra da je prosečna dužina pređenih kilometara veća od 60 hiljada kilometara. Poznato je da je standardna devijacija pređenih kilometara na populaciji $\sigma = 4,7$ hiljada kilometara. Ispitan je uzorak od $n = 100$ guma i dobijena je atitmetička sredina uzorka $\overline{x}_{100} = 60,24$ hiljada kilometara. Da li se na nivou značajnosti $\alpha = 0,05$ može smatrati da gume novog dizajna ispunajvaju uslov da im je prosečna dužina pređenih kilometara veća od 60 hiljada kilometara?

3. Agencija za međunarodnu dostavu pošiljki tvrdi da može da isporuči pošiljke svojih klijenata u proseku za 6 dana. Menadžer prodaje povremeno proverava dostavu birajući slučajni uzorak i određujuću broj dana potrebnih za isporuku. Iz uzorka od $n = 40$ pošiljki dobio je aritmetičku sredinu broja dana potrebnih za isporuku

$\overline{x}_{100} = 6,65$, dana sa disperzijom uzorka od $s^2 = 2,25$ dana. Da li se na nivou značajnosti $\alpha = 0,01$ može smatrati da je prosečan broj dana potrebnih za isporuku pošiljke veći od 6?

4. Rasadnik prodaje patuljasto voće i u deklaraciji tvrdi da je druge godine nakon sadnje prosečan prinos bresaka po drvetu jednak 30 kg. Iz uzorka od $n = 28$ stabla bresaka, druge godine nakon sadnje dobijen je prosečan prinos $\overline{x}_{28} = 25\ kg$, sa standardnom devijacijom uzorka $s = 15\ kg$. Na nivou značajnosti $\alpha = 0,05$ proveriti da li rasadnik ispunjava navode iz deklaracije.

5. Na osnovu podataka iz zadatka 4. proveriti da li je standardno odstupanje σ prinosa bresaka druge godine nakon sadnje jednako 10.

6. Za podatke u tabeli

I_i	$[1,3)$	$[3,5)$	$[5,7)$	$[7,9)$
f_i	6	8	11	5

(a) Izračunati srednju vrednost uzorka, popravljenu disperziju i popravljenu standardnu devijaciju;

(b) Testirati hipotezu $H_0(m = 6)$ protiv alternativne $H_1(m \neq 6)$ sa nivoom značajnosti od $\alpha = 0,05$.

(c) Testirati hipotezu $H_0(\sigma^2 = 1,5)$ protiv alternativne $H_1(\sigma^2 > 1,5)$ sa nivoom značajnosti od $\alpha = 0,05$.

7. Firma za izradu softverskog dizajna je razvila prototip nove obrazovne igre za decu. Važan faktor za uspeh ovakve igre na tržištu je vreme potrebno da dete odigra igru. Iz iskustva je poznato da prosečno vreme trajanja igre treba da je 10 minuta, sa standardnom devijacijom 2 minuta. Iz uzorka od $n = 10$ dece koji su odigrali igru dobijena su vremena koja su bila potrebna da svako dete odigra igru:

$$9,\ 14,\ 11\ 8,\ 13,\ 15,\ 11,\ 10\ 7,\ 12.$$

(a) Na nivou značajnosti $\alpha = 0,05$ proveriti da li nova igra ispunjava uslov za prosečno vreme trajanja igre.

(b) Na nivou značajnosti $\alpha = 0,01$ proveriti da li nova igra ispunjava uslov za standardnu devijaciju vremena trajanja igre.

8. Visoka IT škola zahteva od svojih studenata posedovanje kompjuterske pismenosti. Studenti moraju da pokažu veštinu korišćenja kompjuterskih programa za obradu podataka i obradu teksta. da bi proverili da li su studenti kompjuterski pismeni, organizuje se polaganje testa na kraju svakog semestra. Test je sačinjen tako da ga položi bar 70% studentata koji su slušali poseban kurs posvećen tim kompjuterskim programima. U slučajnom uzorku od $n = 100$ studenta koji su odslušali kurs, njih 63 je položili test kompjuterskih veština. Koji se zaključak može izvesti o težini testa, se na nivou značajnosti $\alpha = 0,01$?

9. Prodavnici su isporučene vekne belog hleba mase 800 grama. Na slučajan način izabrano je 60 vekni hleba i ustanovljeno je da 8 vekni ima masu manju od 800 grama. Ugovorom je precizirano da procenat vekni koje imaju masu manju od 800 grama ne sme biti veći od 12%. Da li, na nivou značajnosti $\alpha = 0,01$ možemo smatrati da isporučena količina hleba zadovoljava uslove ugovora?

10. Primenom starog leka kod 5 od 75 pacijenata registrovani su neželjeni efekti. Primenom novog leka na 100 pacijenata, neželjeni efekti su se pojavili kod 3 pacijenta. Da li se može tvrditi da novi lek izaziva neželjene efekte kod statistički značajno manjeg procenta pacijenata? Koja je nulta hipoteza, koja je alternativna hipoteza? Testirati hipoteze na nivou značajnosti 0,05.

DODATAK
Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$

Pojam realnog broja je jedan od najvažnijih pojmova matematike. Sistem realnih brojeva, operacije definisane na njemu i osobine koje mora imati su deo matematičkog sadržaja proučavanog kako u osnovnom i srednjoškolskom školovanju, tako i u početnim matematičkim kursevima osnovnog akademskog školovanja. Ovde sledi samo kratko podsećanje.

• **Algebarske osobine** ovog sistema daju pravila po kojima se realni brojevi sabiraju, oduzimaju, množe i dele. Važno je podsetiti se da *deljenje nulom* nije moguće. Naime izrazi poput

$$\frac{7}{0}, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{x}{0}$$

smatraju se nedefinisanim.

• **Osobine poretka** (ili uređenja) nam omogućavaju da možemo upoređivati dva realna broja. Sledeća važna pravila su njihova posledica.

• **Pravila nejednačina.** Ako su a,b i c realni brojevi, tada

1. $a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c$;
2. $a < b \;\Rightarrow\; a - c < b - c$;
3. $a < b$ i $c > 0 \;\Rightarrow\; ac < bc$;
4. $a < b$ i $c < 0 \;\Rightarrow\; bc < ac$;
   (a) specijalni slučaj: $a < b \Rightarrow\; -b < -a$;
5. $a > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} > 0$;
6. ako su a i b oba pozitivna ili oba negativna tada $a < b \;\Rightarrow\; \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

• **Osobina potpunosti** je veoma važna za sva područja matematičke analize jer se na njoj zasniva pojam **granične vrednosti**. Opisno, bez ulaženja u dublje tumačenje, potpunost ili kompletnost realnih brojeva se ogleda u činjenici da ih ima dovoljno da popune čitavu realnu pravu - da nema "rupa" na njoj.

6.4 Geometrijska interpretacija skupa $\mathbb{R}$

- Zasniva na geometrijskoj interpretaciji realnog broja kao tačke na pravoj:
- ako je data prava l i na njoj proizvoljna tačka O i duž $\overline{OM}$, i, ako tačku O "proglasimo" početnom a duž $\overline{OM}$ jedicom za merenje duži, tada se svakom realnom broju može pridružiti *jedna* tačka prave l.

Prava l se naziva brojna prava ili brojna osa. Važi

Slika 6.16: Prava l i jedinična duž OM

• **Cantorova (Kantorova) aksioma.** Svakom realnom broju odgovara jedna tačka brojne prave i obrnuto, svakoj tački na brojnoj pravoj odgovara jedan i samo jedan realan broj.

Zahvaljujući tome koristićemo ravnopravno pojmove **skup realnih brojeva** i **realna prava** i označiti je sa $\mathbb{R}$. Element r skupa $\mathbb{R}$ zvaćemo *realni broj* ali i *realna tačka*, ili samo tačka.

6.5 Podskupovi skupa $\mathbb{R}$

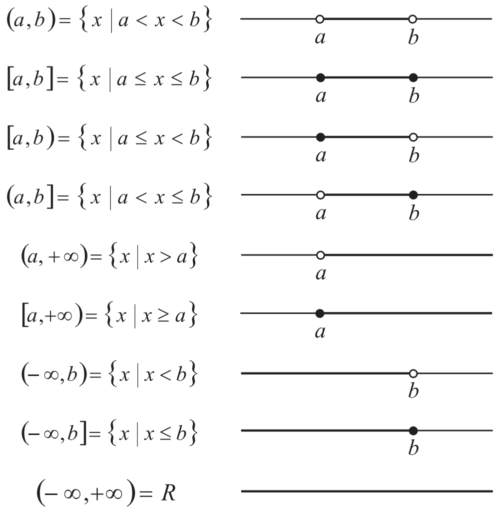
Ukratko ćemo se podsetiti najvažnijih delova, tj. podskupova, skupa $\mathbb{R}$.

- *Prazan skup* $\emptyset$ - skup koji nema elemenata.
- Skup *prirodnih* brojeva
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$
Zbog nerazjašnjenog odgovora na pitanje da li 0 jeste ili nije prirodni broj, ako potreba nalaže da se 0 priključi skupu $\mathbb{N}$, onda se to zapiše $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup 0$, a skup $\mathbb{N}^0$ se naziva *proširen* skup prirodnih brojeva.
- Skup *celih* brojeva
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\} = \{\pm n \,|\, n \in \mathbb{N}^0\}.$$
- Skup *racionalnih* brojeva
$$\mathbb{Q} = \Big\{\frac{m}{n} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\Big\}.$$

Neka su a i b realni brojevi takvi da je $a < b$. Jedan od najvažnijih delova realne prave jeste **interval**, tj. skup kome pripadaju svi realni brojevi između brojeva a i b. Tačke a i b se nazivaju krajnjim ili *graničnim tačkama*, a tačka x koja se nalazi između njih je *unutrašnja* tačka. Skup svih unutrašnjih tačaka intervala naziva se *unutrašnjost* tog intervala. Intervali mogu biti konačni i beskonačni. Geometrijski tumačeno *konačni* intervali su neke duži realne prave a *beskonačni* intervali su poluprave brojne prave ili sama realna prava.

- Konačni interval je
  - *zatvoren* ako sadrži svoje krajnje tačke često se naziva i **segment**;
  - *poluotvoten* ili poluzatvoren ako sadrži samo jednu graničnu;
  - *otvoren* ili samo **interval** ako ne sadrži nijednu svoju graničnu tačku
- Beskonačni interval je
  - *zatvoren* ako sadrži svoju (jednu jedinu) graničnu tačku;
  - *otvoren* ako ne sadrži svoju (jednu jedinu) graničnu tačku.

Cela realna prava $\mathbb{R}$ je beskonačni interval koji je istovremeno i otvoren i zatvoren. Pregled tipova intervala dat je na slici 6.17.



Slika 6.17: Različiti tipovi intervala na realnoj pravoj

PRILOG

I. Statističke formule

II. Statističke tabele

Literatura

[1] Z. Lozanov Crvenković, *Statistika u farmaciji*, drugo prerađeno izdanje, Univerzitet u Novom Sadu - Medicinski fakultet, 2011.

[2] Z. Lozanov Crvenković, D. Rajter, *Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i statistike*, Univerzitet u Novom Sadu - Prirodno - matematički fakultet, 1999.

[3] D.E. Groebner, P.W. Shannon, P.C Fry, K.D. Smith, *Business statistics*, Prentice Hall, New Jersey, 2000.

[4] S. Kundu, *An introduction to Business Statistics*, http://www.ddegjust.ac.in/studymaterial/mcom/mc-106.pdf

[5] P. Sahoo, *Probability and Mathematical Statistics*, Department of Mathematics, University of Louisville, USA, 2013.

[6] N. Skakić, J. Gajić, *Zbirka riješenih zadataka iz teorije vjerovatnoće i matematičke statistike*, Prirodno-matematički fakultet u Banjaluci, Banjaluka, 2008.

[7] S. V. Vukadinović, *Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike*, drugo izmenjeno izdanje, NIGP Privredni pregled, Beograd, 1999.

[8] https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2014/readings/

[9] https://www.britannica.com/topic/probability