



UNIVERZITET U NIŠU
MAŠINSKI FAKULTET U NIŠU



Aleksandar G. Stanković

**RAZVOJ MODELA ZA OPTIMALNO
PLANIRANJE I RASPOREĐIVANJE
RESURSA U MALIM I SREDNJIM
PREDUZEĆIMA U USLOVIMA
NEIZVESNOSTI**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2025.



UNIVERZITET U NIŠU
MAŠINSKI FAKULTET U NIŠU



Aleksandar G. Stanković

**RAZVOJ MODELA ZA OPTIMALNO
PLANIRANJE I RASPOREĐIVANJE
RESURSA U MALIM I SREDNJIM
PREDUZEĆIMA U USLOVIMA
NEIZVESNOSTI**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Tekst ove doktorske disertacije stavlja se na uvid javnosti,
u skladu sa članom 30., stav 8. Zakona o visokom obrazovanju
(„Sl. Glasnik RS”, br. 76/2005, 100/207 – autentično tumačenje, 97/2008, 44/2010,
93/2012, 89/2013 i 99/2014)

NAPOMENA O AUTORSKIM PRAVIMA:

Ovaj tekst smatra se rukopisom i samo se saopštava javnosti (član 7. Zakona o autorskim
i srodnim pravima, „SL. Glasnik RS”, br. 104/2009, 99/2011 i 119/2012).

**Nijedan deo ove doktorske disertacije ne sme se koristiti ni u kakve svrhe, osim za
upoznavanje sa njenim sadržajem pre odbrane disertacije.**

Niš, 2025.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING IN
NIŠ



Aleksandar G. Stanković

**DEVELOPMENT OF MODELS FOR
OPTIMAL RESOURCE PLANNING AND
SCHEDULING IN SMALL AND MEDIUM-
SIZED ENTERPRISES UNDER CONDITIONS
OF UNCERTAINTY**

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2025.

Podaci o doktorskoj disertaciji

Mentor:	dr Goran Petrović, redovni profesor Univerzitet u Nišu, Mašinski fakultet u Nišu
Naslov:	Razvoj modela za optimalno planiranje i raspoređivanje resursa u malim i srednjim preduzećima u uslovima neizvesnosti
Rezime:	Proizvodne kompanije, pre svega MSP, suočavaju se sa različitim izazovima u industriji danas, uključujući promene u raznovrsnosti proizvoda i obimu proizvodnje. Da bi se uspešno suprotstavile ovim izazovima, kompanije moraju da primene fleksibilnije i brže pristupe. Kako tržište stalno napreduje, kompanije moraju da budu visoko konkurentne da bi opstale. Predmet naučnog istraživanja u doktorskoj disertaciji jeste razvoj modela za optimalno planiranje i raspoređivanje resusa u MSP preduzećima u uslovima neizvesnosti. Jedan od ključnih pravaca istraživanja biće identifikacija problema i izazova sa kojima se MSP u Republici Srbiji suočavaju u procesu upravljanja resursima. Drugi pravac istraživanja odnosi se na proučavanje i selekciju metoda neophodnih za koncipiranje i razvoj optimizacionog modela. Posebna pažnja biće posvećena optimizacionim metodama i njihovoj integraciji sa alatima teorije verovatnoće, fazi logike i modela mašinskog učenja. Treći i četvrti pravac istraživanja biće razvoj samog računarskog modela i hibridnog pristupa koji ima za cilj implamentaciju više naučnih pristupa u jedan sistem planiranja, koji će omogućiti definisanje optimalnog programa proizvodnje u vidu termin plana i rasporeda korišćenja resursa. Peti pravac istraživanja je razvoj softverske aplikacije koja omogućava da se složeni algoritmi i matematički modeli pretoče u intuitivne, korisnički pristupačne interfejske koji omogućavaju menadžerima i planerima proizvodnje da lako unose podatke, pokreću optimizacione procese i analiziraju rezultate bez potrebe za dubokim tehničkim znanjem.
Naučna oblast:	Transportno – tehnološke nauke
Naučna disciplina:	Transportna tehnika i logistika
Ključne reči:	Planiranje i raspoređivanje resursa, razvoj modela i optimizacija proizvodnog procesa, podrška malim i srednjim preduzećima u Republici Srbiji, veštačka inteligencija, fazi logika, teorija verovatnoće i uslovi neizvesnosti.
UDK:	
CERIF klasifikacija:	T120, P160, T260
Tip licence Kreativne zajednice:	CC BY-NC-ND

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	dr Goran Petrović, full professor, University of Niš, Faculty of Mechanical Engineering in Niš
Title:	Development of models for optimal resource planning and scheduling in small and medium-sized enterprises under conditions of uncertainty
Abstract:	Manufacturing companies, particularly small and SMEs, are currently facing a range of challenges in the industry, including shifts in product variety and production volume. In order to effectively respond to these challenges, companies must adopt more flexible and faster approaches. As the market continues to evolve, maintaining a high level of competitiveness is essential for survival. The subject of the scientific research in this doctoral dissertation is the development of a model for optimal planning and scheduling of resources in SMEs under conditions of uncertainty. One of the key research directions involves identifying the problems and challenges that SMEs in the Republic of Serbia face in the process of resource management. Another research direction focuses on examining and selecting the methods necessary for the design and development of the optimization model. Special attention will be given to optimization techniques and their integration with tools from probability theory, fuzzy logic, and machine learning models. The third and fourth research directions concern the development of the computational model itself and a hybrid approach that aims to integrate multiple scientific methodologies into a unified planning system. This system will enable the definition of an optimal production program in the form of a schedule and resource allocation plan. The fifth research direction is the development of a software application that translates complex algorithms and mathematical models into intuitive, user-friendly interfaces. This application will allow production managers and planners to easily input data, initiate optimization processes, and analyze results without requiring deep technical expertise.
Scientific Field:	Technical and technological sciences
Scientific Discipline:	Transport technics and logistics
Key Words:	Planning and scheduling of resources, development of models and optimization of the production process, support for small and medium-sized enterprises in the Republic of Serbia, artificial intelligence and, conditions of uncertainty.
UDC:	
CERIF Classification:	T120, P160, T260
Creative Commons License Type:	CC BY-NC-ND

Zahvalnost autora

Želim da iskažem zahvalnost svom mentoru, prof. dr Goranu Petroviću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta u Nišu, na pruženoj podršci, profesionalnom usmeravanju i ohrabrenju tokom čitavog perioda rada na ovom istraživanju. Njegova spremnost da podeli svoje znanje, kao i pažljivi i precizni saveti, bili su od velike važnosti za razvoj teme i završetak ovog rada. Zahvalnost upućujem i prof. dr Žarku Čojbašiću i prof. dr Danijelu Markoviću, koji su mi pružali kontinuiranu podršku, korisne savete i bili uvek spremni da pomognu. Takođe, želim da se zahvalim svim članovima komisije, koji su svojim znanjem, dragocenim komentarima i sugestijama doprineli kvalitetu ovog istraživanja.

Posebnu zahvalnost upućujem svojoj supruzi Milici, čija su podrška, razumevanje i prisustvo bili oslonac u svakom koraku ovog puta. Takođe, duboko sam zahvalan svojoj porodici majci Danijeli, ocu Goranu i sestri Dragani na njihovoj bezuslovnoj podršci, ohrabrenju i ljubavi koja mi je davala snagu da istrajem na ovom putu.

SADRŽAJ

Poglavlje 1	1
1.1 PREDMET NAUČNOG ISTRAŽIVANJA	5
1.2 CILJ NAUČNOG ISTRAŽIVANJA	11
1.3 FAZE NAUČNOG ISTRAŽIVANJA	12
1.4 PRIMENJENE NAUČNE METODE TOKOM ISTRAŽIVANJA	13
1.5 STRUKTURA I SADRŽAJ DOKTORSKE DISERTACIJE	14
Poglavlje 2	17
2.1 PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA U OBLASTI PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA RESURSA	18
2.1.1 Pregled dosadašnjih istraživanja - primena egzaktnih metoda.....	18
2.1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja - primena metaheurističkih metoda.....	20
2.1.3 Pregled dosadašnjih istraživanja - primena metoda veštačke inteligencije.....	25
2.1.4 Pregled dosadašnjih istraživanja - primena metoda simulacija.....	29
2.1.5 Pregled dosadašnjih istraživanja - primena operativnih metoda	30
2.2 KVANTATIVNA ANALIZA NAUČNIH RADOVA NA OSNOVU PRETRAGE LITERATURE, KLJUČNIH REČI I GODINE PUBLIKOVANJA	32
2.3 KRITIČKI OSVRT I PRAVCI ISTRAŽIVANJA	34
Poglavlje 3	39
3.1 KLASIFIKACIJA PROBLEMA I DEFINISANJE NOTACIJE	41
3.1.1 Mašinsko okruženje i tipovi modela u skladu sa notacijom polja α	42
3.1.2 Karakteristike okruženja i moguća ograničenja poslova prema notaciji polja β	44
3.1.3 Vrste ciljnih funkcija i moguće oznake notacije u polju γ	48
Poglavlje 4	51
4.1 OPŠTI KONCEPT I TERMINOLOGIJA OPTIMIZACIJE	53
4.1.1 Klasifikacija optimizacionih problema	55
4.2 IMPLEMENTACIJA STOHAISTIČKE OPTIMIZACIJE U MODELIMA PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA RESURSA	56
4.2.1 Model stohastičkog planiranja i raspoređivanja resursa primenom normalnog zakona raspodele verovatnoće	57
4.2.2 Model stohastičkog planiranja i raspoređivanja resursa primenom eksponencijalnog zakona raspodele verovatnoće.....	61
4.2.3 Model stohastičkog planiranja i raspoređivanja resursa primenom uniformnog zakona raspodele verovatnoće.....	65
4.3 SUMIRANJE FUNKCIJA PRIMENOM METODE KONVOLUCIJE	68

4.3.1 Model stohastičkog planiranja i raspoređivanja resursa zasnovan na diskretnoj konvoluciji.....	71
4.4 IMPLEMENTACIJA FAZI LOGIKE U MODELIMA PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA RESURSA	73
4.4.1 Algrebarske operacije nad fazi brojevima.....	74
4.4.2 Kriterijumi poređenja fazi brojeva	75
4.5 METAHEURISTIČKE METODE OPTIMIZACIJE ZA REŠAVANJE PROBLEMA PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA RESURSA	76
4.5.1 Genetski algoritam	76
4.5.2 Metoda simuliranog kaljenja	78
4.5.3 Optimizacija metodom rojeva čestica	80
4.5.4 Optimizacija metodom kolonije mrava	82
4.5.5 Optimizacija metodom veštačke kolonije pčela.....	82
4.6 MODELIRANJE PRIMENOM NEURO-FAZI ANFIS SISTEMA	83
4.7 FAZI METODE VIŠEKRITERIJUMSKOG ODLUČIVANJA.....	86
4.7.1 Metoda FAHP.....	87
4.7.2 Metoda FFUCOM	88
4.7.3 Metoda FWASPAS	89
4.8 MAŠINSKO UČENJE ZA PREDIKCIJU ULAZNIH PARAMETARA OPTIMIZACIJE	89
Poglavlje 5	95
5.1 PODELA MODELA PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA RESURSA.....	97
5.2 PRAVILA PRIORITETA IZVRŠAVANJA POSLOVA.....	101
5.2.1 Pravila prioriteta poslova u rešavanju modela sa jednom mašinom	101
5.2.3 Pravila prioriteta poslova primenom fazi MCDM metoda.....	108
5.3 MATEMATIČKI PRISTUP IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE CILJA	112
5.4 MODEL PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA POSLOVA NA POJEDINAČNOJ MAŠINI S_m	113
5.4.1 Matematička formulacija determinističkog modela raspoređivanja poslova na pojedinačnoj mašini $S_m rd_j, dd_j \Sigma Ct_j$	114
5.4.2 Matematička formulacija stohastičkog modela raspoređivanja poslova na pojedinačnoj mašini $S_m stohpt_j \Sigma Ct_j$	115
5.4.2.1 Primer optimizacije stohastičkog modela raspoređivanja poslova na pojedinačnoj mašini primenom PSO algoritma.....	116
5.5 MODEL PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA POSLOVA NA MAŠINAMA U PARALELNOJ VEZI P_m	117

5.5.1 Matematička formulacija determinističkog modela raspoređivanja poslova na mašinama u paralelnoj vezi $PI_m pprmp Ct_{max}$	117
5.5.2 Matematička formulacija stohastičkog modela raspoređivanja poslova na mašinama u paralelnoj vezi $PI_m stohpt_{jk}, stohprpm_{jk} stohCt_{max}$	122
5.6 MODEL PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA POSLOVA – FLOW SHOP PROBLEM - FS_m	127
5.6.1 Matematička formulacija stohastičkog Flow Shop modela raspoređivanja poslova $FS_m dd_j, wc_j stohCt_{max}, TM_{max}$	128
5.7 MODEL PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA POSLOVA – JOB SHOP PROBLEM - JSP_m	130
5.7.1 Matematička formulacija stohastičkog Job Shop Problem modela raspoređivanja poslova $JSP_m stohpt_{ijk} stohCt_{max}$	131
5.8 MODEL FLEKSIBILNOG PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA POSLOVA - $FJSP_c$	137
5.8.1 Matematička formulacija determinističkog modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova $FJSP_c pt_{ijk} Ct_{max}$	138
5.8.2 Model fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova sa dodatnim transportnim vremenom $TransTimes_{kk'}$ između mašina.....	146
5.8.3 Matematička formulacija stohastičkog modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova $FJSP_c stohpt_{ijk} stohCt_{max}$	152
5.9.4 Matematička formulacija fazi modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova $FFJSP_c fpt_{ijk} Cft_{max}$	162
Poglavlje 6	167
6.1 STUDIJA SLUČAJA: OPTIMIZACIJA PROCESA PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA PROIZVODNIH RESURSA NA PRIMERU PREDUZEĆA „DN COMPANY“ SRBIJA	169
6.1.1 Primena hibridnog pristupa zasnovanog na mašinskom učenju i odabiru optimalnih parametara metode za rešavanje $FJSP_c$	173
6.1.2 Optimizacija raspodele resursa primenom determinističkog $FJSP_c$ modela sa pravilima prioritetne odluke zasnovanih na fazi MCDM pristupu.....	181
6.1.3 Optimizacija raspodele resursa primenom stohastičkog $SFJSP_c$ modela sa pravilima prioritetne odluke zasnovanim na fazi MCDM pristupu.....	185
6.1.4 Optimizacija raspodele resursa primenom fazi $FFJSP_c$ modela sa pravilima prioritetne odluke zasnovanim na fazi MCDM pristupu.....	189
6.1.5 Diskusija dobijenih rezultata	192
6.2. RAZVOJ SOFTVERSKJE APLIKACIJE ZA PLANIRANJE I RASPOREĐIVANJE RESURSA NA OSNOVU RAZVIJENIH MODELA.....	195
Poglavlje 7	199
7.1 PREGLED OSTVARENIH REZULTATA	200

7.2 PRAVCI BUDUĆIH ISTRAŽIVANJA	205
LITERATURA	207
PRILOZI	227
IZJAVA O AUTORSTVU	240
IZJAVA O ISTOVETNOSTI ELEKTRONSKOG I ŠTAMPANOG OBLIKA DOKTORSKE DISERTACIJE.....	241
IZJAVA O KORIŠĆENJU	242

Spisak slika i tabela

Poglavlje 1

Slika 1.1 Struktura i okvirni sadržaj doktorske disertacije

Poglavlje 2

Slika 2.1 Podela primenjenih metoda u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa

Slika 2.2 Grafički prikaz dobijenih rezultata za period od 2017 – 2023. godine

Tabela 2.1 Relevantni časopisi na osnovu ključnih reči za period od 2017 - 2023. godine

Poglavlje 3

Slika 3.1 Grafički prikaz transformacije ulaznih resursa u proizvodne planove

Slika 3.2 Definisanje problema planiranja i raspoređivanja resursa

Slika 3.3 Grafički prikaz konfiguracije proizvodnog sistema

Slika 3.4 Mašinsko okruženje u prvom polju α

Slika 3.5 Karakteristike okruženja i moguća ograničenja u drugom polju β

Slika 3.6 Funkcije cilje i moguće oznake u trećem polju γ

Slika 3.7 Funkcije cilja povezane sa vremenskim rokom izvršavanja poslova na mašinama

Poglavlje 4

Slika 4.1 Osnovi koraci optimizacije

Slika 4.2 Kategorizacija otpimizacionog problema

Slika 4.3 Klasifikacija optimizacionih metoda

Slika 4.4 Grafički prikaz i pojašnjenje slučajnih promenljiva i funkcija cilja

Slika 4.5 Grafički prikaz rasporeda operacija na mašinama

Slika 4.6 Grafički prikaz i pojašnjenje slučajnih veličina i funkcija cilja

Slika 4.7 Grafički prikaz rasporeda operacija na mašinama

Slika 4.8 Grafički prikaz i pojašnjenje slučajnih promenljiva i funkcija cilja

Slika 4.9 Grafički prikaz rasporeda operacija na mašinama

Slika 4.10 Grafički prikaz dobijenih rezultata primenom kontinualne konvolucije

Slika 4.11 Grafički prikaz dobijenih rezultata primenom diskretne konvolucije

Slika 4.12 Graficki prikaz vrednosti funkcije cilja primernom operatora diskretne konvolucija na primeru planiranja i raspoređivanja poslova

Slika 4.13 Grafički prikaz trougaonog fazi broja

Slika 4.14 Grafički prikaz dijagrama toka GA

Slika 4.15 Opšta procedura GA

Slika 4.16 Grafički prikaz dijagrama toka SA algoritma

Slika 4.17 Opšta procedura SA algoritma

Slika 4.18 Opšta procedura i kretanje čestica u pravcu optimalnog rešenja

Slika 4.19 Opšta procedura PSO algoritma

Slika 4.20 Opšta procedura ACO algoritma

Slika 4.21 Opšta procedura ABC algoritma

Slika 4.22 Osnovna struktura ANFIS sistema

Slika 4.23 Osnovni princip i struktura algoritma linearne regresije

Slika 4.24 Osnovni princip i struktura algoritma stabla odluke

Slika 4.25 Grafički prikaz osnovne strukture veštačke neuronske mreže

Tabela 4.1 Fazi skala za alternativnu procenu

Poglavlje 5

Slika 5.1 Osnovni elementi modela

Slika 5.2 Klasifikacija modela na osnovu pravca istraživanja

Slika 5.3 Grafički prikaz osnovnih koraka pri razvoju modela

Slika 5.4 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom SPT pravila

Slika 5.5 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom WSPT pravila

Slika 5.6 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom EDD pravila

Slika 5.7 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom STR pravila

Slika 5.8 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom CRR pravila

Slika 5.9 Grafički prikaz optimalnog sekvetnog rasporeda poslova

Slika 5.10 Osnovi koncept i šemtski prikaz implementacije MCDM metodologije

Slika 5.11 Grafički prikaz rangiranja prioriteta poslova izvršavanju

Slika 5.12 Grafički prikaz rasporeda poslova i izračunavanja funkcije cilja

Slika 5.13 Grafički prikaz modela na pojedinačnoj mašini S_m

Slika 5.14 Grafički prikaz vrednosti funkcije cilja $stohCt_{max}$ u odnosu na broj iteracija

Slika 5.15 Grafički prikaz modela u paralelnoj vezi mašina P_m

Slika 5.16 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom SA: problem $n = 10$ i $m = 8$

Slika 5.17 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom GA: problem $n = 10$ i $m = 8$

Slika 5.18 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom SA: problem $n = 20$ i $m = 8$

Slika 5.19 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom GA: problem $n = 20$ i $m = 8$

Slika 5.20 Grafički prikaz rasporeda poslova u paralelnoj vezi mašina sa stohastičkim vremenom obrade

Slika 5.21 Vrednost funkcije cilja u odnosu na broj iteracija

Slika 5.22 Grafički prikaz optimalnog rasporeda primenom GA algoritma

Slika 5.23 Grafički prikaz obrade poslova po modelu FS_m

Slika 5.24 Grafički prikaz JSP_m modela planiranja i raspoređivanja poslova

Slika 5.25 Grafički prikaz rezultata korišćenjem modela stabla odluke

Slika 5.26 a) Uticaj broja iteracija $Iter$ na vrednost funkcije cilja $stohCt_{max}$, b) Uticaj maksimalnog broja unutrašnjih iteracija $MaxIter$ na vrednost funkcije cilja $stohCt_{max}$

Slika 5.27 a) Uticaj količine temperature T_0 na vrednost funkcije cilja $stohCt_{max}$, b) Uticaj faktora promene temperature $alpha$ na vrednost funkcije cilja $stohCt_{max}$

Slika 5.28 Uporedna analiza rezultata SA algoritma i predikovanih vrednosti funkcije cilja $stohCt_{max}$ primenom modela mašinskog učenja (97% tačnost)

Slika 5.29 Grafički prikaz modela fleksibilnog raspoređivanja poslova

Slika 5.30 Rangiranje ulaznih parametara ACO algoritma prema uticaju na funkciju cilja Ct_{max}

Slika 5.31 Rangiranje parametara GA algoritma prema uticaju na funkciju cilja Ct_{max}

Slika 5.32 Grafički prikaz delimične fleksibilnosti i rasporeda proizvodnog procesa

Slika 5.33 Grafički prikaz potpune fleksibilnosti i rasporeda proizvodnog procesa

Slika 5.34 ANFIS arhitektura za izbor optimalne optimizacione metode

Slika 5.35 Grafički prikaz optimalnog proizvodnog procesa sa dodatnim transportnim vremenom između mašina $TransTimes_{kk'}$

Slika 5.36 Grafički prikaz vremena obrade pojedinačnih poslova pre i nakon optimizacije

Slika 5.37 Grafički prikaz rasporeda poslova i ukupno vreme funkcije cilja $stohCt_{max}$

Slika 5.38 Grafički prikaz rasporeda poslova i ukupno vreme funkcije cilja $stohCt_{max}$

Slika 5.39 Grafički prikaz rasporeda poslova i ukupno vreme funkcije cilja $stohCt_{max}$

Slika 5.40 Grafički prikaz rasporeda poslova i ukupna fazi vrednost funkcije cilja Cft_{max}

Tabela 5.1 Pravilo najkraćeg vremena obrade poslova - SPT

Tabela 5.2 Prioritetna najkraća obrada posla - WSPT

Tabela 5.3 Obrada posla prema najranijem datumu - EDD

Tabela 5.4 Ukupno vreme kašnjenja poslova - STR

Tabela 5.5 Metoda kritičnog odnosa - CRR

Tabela 5.6 Ulazni parametri $FS_2 | nowt | Ct_{max}$

Tabela 5.7 Izračunavanje ukupnog vremena obrade poslova Ct_{max}

Tabela 5.8 Težinski koeficijenti razmatranih kriterijuma

Tabela 5.9 Ocene karakteristika poslova - matrica odlučivanja

Tabela 5.10 Rangiranje poslova prema prioritetu izvršavanja FWASPAS

Tabela 5.11 Numeričke vrednosti veličina C_j, Sd_j, LM_j, TM_j

Tabela 5.12 Stohastička vremena obrade poslova na mašinama

Tabela 5.13 Vremena obrade poslova na mašinama

Tabela 5.14 Vremena podešavanja mašina pri obradi poslova

Tabela 5.15 Vremena obrade poslova na mašinama prema zakonu normalne raspodele

Tabela 5.16 Stohastička vremena obrade poslova na mašinama tp_{jk}

Tabela 5.17 Ulazni parametri optimizacije primenom GA algoritma

Tabela 5.18 Ulazni parametri optimizacije primenom SA algoritma

Tabela 5.19 Stohastička vremena obrade i stohastički vremenski rok obrade poslova

Tabela 5.20 Optimalan sekventi raspored poslova primenom ACO metode

Tabela 5.21 Dobijeni rezultati optimizacije u prvoj fazi primenom SA algoritma

Tabela 5.22 Performanse modela mašinskog učenja za SA algoritam

Tabela 5.23 Preporučeni optimalni ulazni parametri optimizacije SA algoritma

Tabela 5.24 Analiza varijanse i uticaj ulaznih parametara optimizacije ACO algoritma

Tabela 5.25 Analiza varijanse i uticaj ulaznih parametara optimizacije GA algoritma

Tabela 5.26 Rezultati optimizacije za posmatrani skup podataka

Tabela 5.27 Delimična fleksibilnost: vremena obrade poslova na mašinama

Tabela 5.28 Potpuna fleksibilnost: vremena obrade poslova na mašinama

Tabela 5.29 Rezultati proračuna korišćenjem ABC, PSO i GA algoritma

Tabela 5.30 Vremena obrade poslova na mašinama

Tabela 5.31 Vremena transporta između različitih mašina

Tabela 5.32 Vremena obrade poslova na mašinama prema zakonu normalne raspodele

Tabela 5.33 Stohastička vremena obrade poslova na mašinama $stohpt_{ijk}$

Tabela 5.34 Ulaznih parametri GA za optimizaciju $FJSP_c$ modela

Tabela 5.35 Rezultati optimizacije $FJSP_c$ modela primenom GA algoritma

Tabela 5.36 Vremena obrade poslova na mašinama prema zakonu eksponencijalne raspodele

Tabela 5.37 Stohastička vremena obrade poslova na mašinama $stohpt_{ijk}$

Tabela 5.38 Rezultati optimizacije $FJSP_c$ modela primenom GA algoritma

Tabela 5.39 Vremena obrade poslova na mašinama prema zakonu uniformne raspodele

Tabela 5.40 Stohastička vremena obrade poslova na mašinama $stohpt_{ijk}$

Tabela 5.41 Rezultati optimizacije $FJSP_c$ modela primenom GA algoritma

Tabela 5.42 Fazi vremena obrade poslova na mašinama fpt_{ijk}

Poglavlje 6

Slika 6.1 Dijagram toka procesa proizvodnje nameštaja sa jasno definisanim fazama i aktivnostima

Slika 6.2 Grafički prikaz rasporeda pogona posmatranog preduzeća

Slika 6.3 Posmatrani proizvodni proces preduzeća nameštaja u Republici Srbiji

Slika 6.4 Grafički prikaz predloženog hibridnog pristupa

Slika 6.5 Grafički prikaz dobijenih rezultata korišćenjem modela linearne regresije

Slika 6.6 Grafički prikaz dobijenih rezultata korišćenjem modela stablo odluke

Slika 6.7 Grafički prikaz dobijenih rezultata korišćenjem modela Bajesove optimizacije

Slika 6.8 Grafički prikaz dobijenih rezultata korišćenjem modela veštačke neuronske mreže

Slika 6.9 a) Uticaj broja iteracija $Iter$ na vrednost funkcije cilja Ct_{max} , b) Uticaj parametra ukrstanja $Cross$ na vrednost funkcije cilja Ct_{max}

Slika 6.10 a) Uticaj stope mutacije Mu na vrednost funkcije cilja Ct_{max} , b) Uticaj veličine populacije Pop na vrednost funkcije cilja Ct_{max}

Slika 6.11 Grafički prikaz vrednosti funkcije cilja (Ct_{max}) prethodnog stanja proizvodnje i nakon preporuke WNN algoritma primenom GA

Slika 6.12 Osnovi koncept i šemtski prikaz implementacije predstavljene metodologije

Slika 6.13 Grafički prikaz optimalnog raspored poslova determinističkog $FJSP_c$ modela

Slika 6.14 Vizualni test i QQ dijagram test potvrde: koeficijent korelacije: 0.99

Slika 6.15 Grafički prikaz optimalnog rasporeda poslova stohastičkog $SFJSP_c$ modela

Slika 6.16 Grafički prikaz optimalnog rasporeda poslova fazi $FFJSP_c$ modela

Slika 6.17 Grafički prikaz uporedne analize primenjenih modela

Slika 6.18 Grafički prikaz prethodnog stanja i stanja nakon optimizacije

Slika 6.19 Korisnički interfejs softverske aplikacije

Slika 6.20 Grafički prikaz implementacije softverske aplikacije u preduzeću ("DN Company")

Tabela 6.1 SIPOC model: Analiza proizvodnog procesa

Tabela 6.2 Dobijeni rezultati GA optimizacije u prvoj fazi opisanog modela

Tabela 6.3 Performanse modela mašinskog učenja za GA algoritam

Tabela 6.4 Uticaj ulaznih parametara GA na funkciju cilja Ct_{max}

Tabela 6.5 Preporučeni ulazni parametri optimizacije primenom WNN modela za GA

Tabela 6.6 Rangiranje poslova prema prioritetu izvršavanja FWASPAS

Tabela 6.7 Prioritetni poslovi i vremena obrade determinističkog $FJSP_c$ modela

Tabela 6.8 Eksperimentalna merenja vremena obrade operacija na mašini

Tabela 6.9 Vremena obrade poslova na mašinama prema zakonu normalne raspodele

Tabela 6.10 Stohastička vremena obrade poslova na mašinama $stohpt_{ijk}$

Tabela 6.11 Fazi vremena obrade poslova na mašinama $fpt_{ijk} = (r_1, r_2, r_3)$

Poglavlje 7

-

Poglavlje 1

UVODNA RAZMATRANJA, PREDMET I ISTRAŽIVAČKI CILJEVI

Uvodna razmatranja doktorske disertacije imaju za cilj da ukažu na značaj optimalnog planiranja i raspoređivanja resursa u malim i srednjim preduzećima (MSP), posebno u uslovima današnjeg kompleksnog i promenljivog okruženja. Razvoj računarskog modela, koji bi omogućio optimalno planiranje resursa, ima ključnu ulogu u obezbeđivanju održivog poslovanja i ostvarivanju konkurentne prednosti na tržištu. Međutim, razvoj takvog modela u MSP, naročito u uslovima uticaja različitih faktora slučajnog karaktera, predstavlja složen zadatak i veliki izazov. Polazna osnova za razvoj modela za optimalno planiranje i raspoređivanje resursa u MSP u uslovima neizvesnosti trebalo bi da bude razmatranje relevantnih teorija, postojećih modela i metodologija u razmatranoj oblasti. U današnjem konkurentnom okruženju, optimalno planiranje resursa je ključni aspekt svakog poslovanja i od suštinskog je značaja za opstanak MSP na tržištu. Tokom proteklih nekoliko godina, MSP su postala predmet opsežnog istraživanja sa fokusom na probleme upravljanja resursima. MSP po svojoj prirodi, imaju ograničenu veličinu i obim u poređenju sa velikim korporacijama. Specifični kriterijumi za klasifikaciju preduzeća kao MSP mogu se razlikovati od države do države, ali obično uključuju faktore kao što su broj zaposlenih, godišnji prihodi i ukupna imovina. MSP se generalno mogu podeliti na mikro, mala i srednja

preduzeća na osnovu njihove veličine i ekonomskog uticaja (Figar, N., 2007). Ono što je jako bitno istaći da ova preduzeća igraju ključnu ulogu u podsticanju ekonomske stabilnosti i uzajamnog rasta od čega na kraju imaju koristi i potrošači i šira ekonomija. Primarni cilj ovog istraživanja je unapređenje položaja MSP, jačanje ekonomije malih proizvođača i usluge prilagođene potrebama kupaca i krajnjih korisnika. U ovom kontekstu, proces planiranja je dobio značajnu pažnju jer je kritična komponenta za uspeh MSP. Optimalan proces planiranja može pomoći MSP da optimizuju svoje resurse i donose pravovremene odluke pod neizvesnim uslovima, omogućavajući im na taj način da "prežive" i napreduju na tržištu (Menne, 2022).

MSP su ključni oslonci i pokretači razvoja svake privrede, ali su istovremeno i najizloženija grupacija koja je podložna rizicima u poslovanju. Njihova ograničena, finansijska sredstva, ljudski resursi i tehnološka infrastruktura čine ih posebno osetljivim na neizvesnosti koje vladaju na tržištu. Zbog toga je razvijanje računarskih modela za optimalno planiranje i raspoređivanje resursa, u uslovima neizvesnosti događaja koji vladaju u MSP, posebno značajno. Prema podacima (Republičkog zavoda za statistiku, 2023) u Srbiji trenutno posluje 391.681 poslovni subjekt (mikro, mala, srednja preduzeća i preduzetnici) ili približno 103.375 MSP, od kojih 21,4% pripada proizvodnom sektoru. MSP su od suštinskog značaja za privredu, obezbeđujući preko 65% zaposlenosti čime dobrinose 55% bruto domaćeg proizvoda. MSP se suočavaju sa izazovima kao što su neefikasno upravljanje resursima, primena metoda zasnovanih na iskustvu radnika u upravljanju proizvodnjom i visoki operativni troškovi, što ograničava njihovu konkurentnost na lokalnom i globalnom tržištu. Kako bi se pružila podrška MSP za održivi rast, predlaže se razvoj računarskog modela zasnovanog na veštačkoj inteligenciji za planiranje i raspoređivanje resursa u MSP što predstavlja ključnu oblast istraživanja u doktorskoj disertaciji.

Planiranje i raspoređivanje resursa u proizvodnim preduzećima obuhvata skup procesa i aktivnosti koji se koriste za postizanje optimalnih ciljeva proizvodnje, uključujući optimizaciju korišćenjih resursa (kao što su ljudski resursi, mašine, materijali i vreme). Ključne aktivnosti ovih procesa su:

- Planiranje proizvodnje: obuhvata proces u kome je potrebno definisati šta i koliko treba proizvesti, što je direktno povezano sa analizom potražnje i količinom potrebnih resursa,
- Raspoređivanje resusa: predstavlja jedan od ključnih procesa optimizacije čija je osnovna uloga dodeljivanje i raspored dostupnih resursa za različite proizvodne aktivnosti (raspoređivanje radnih zadataka, radne snage, mašine,...),

- Optimizacija procesa proizvodnje: ima za cilj da obezbedi optimalan plan i redosled radnih zadataka kako bi se postignu maksimalna produktivnost proizvodnje, smanjili troškovi i sve ukupno povećala efikasnost procesa,
- Upravljanje zalihama: predstavlja aktivnost koja ima za cilj da obezbedi potrebnu količinu zaliha (sirovina) kako bi proces proizvodnje mogao nesmetano da se obavlja, na taj način preventivno se deluje i sprečavaju se iznenadni zastoji u proizvodnji kao i neželjeni (neplanirani) troškovi,
- Kontrola kvaliteta: prvenstveno ima zadatak da prati stanje i održavanje standarda kvaliteta proizvoda tokom proizvodnog procesa kako bi se osiguralo zadovoljstvo kupaca.

Planiranje i raspoređivanje resursa su ključni pojmovi za efikasno funkcionisanje proizvodnog preduzeća, jer pomažu u minimiziranju troškova, maksimiziranju produktivnosti i osiguranju da se proizvodni ciljevi ispunjavaju na vreme. U naučnoj literaturi ovaj pojam poznat je pod engleskim nazivom *Planning and Scheduling Resource*. Za potpuno razumevanje samog termina planiranje i raspoređivanje resursa neophodno je razmatranje radova jednog od najznačajnijih autora iz ove oblasti profesora Majkla Pineda¹. Prema ovom autoru proces planiranja i raspoređivanja resursa obuhvata proces određivanja, kako efikasno rasporediti i koristiti resurse kako bi se postigli određeni ciljevi projekta ili proizvodnje (Pinedo, 1995). To uključuje postavljanje ciljeva, definisanje zadataka, procenu potreba za resursima i utvrđivanje vremenskih rokova. Raspoređivanje resursa je dodeljivanje određenih početnih i završnih vremena, zadacima ili aktivnostima unutar proizvodnog procesa (Pinedo, 2005). Optimizacija raspodele resursa obuhvata sve resurse, kao što su mašine, radnici ili oprema, kako bi se obezbedilo da zadaci budu završeni na najefikasniji i najbrži način. Kako Pinedo u svojoj knjizi (Pinedo, 2008) navodi, resursi se mogu odnositi na bilo koje ograničene resurse ili elemente potrebne za završetak zadataka ili aktivnosti. Treba napomenuti da planiranje i raspoređivanje prezentuje jedan nerazdvojivi pojam i ključni je aspekt koji se fokusira na prilagođavanje i upotrebu resursa radi maksimizacije efikasnosti uz poštovanje ograničenja i ciljeva projekta (Pinedo, 2002).

Cilj je pronaći najbolji mogući raspored koji minimizira usko grlo resursa i obezbeđuje nesmetano izvršenje projekta. Planiranje i raspoređivanje resursa su najznačajnije aktivnosti u upravljanju proizvodnjom, veliki broj istaknutih autora kao što (Pinedo, 1995), (Baker, 1974), (Morton i Pentico 1993), (Alharkan, 2005) napominju važnost ovog problema u proizvodnji,

¹ Michael Pinedo - New York University Leonard N. Stern School of Business

navodeći da se ona prožima od ekonomskih aktivnosti, pa sve do tehničkih aktivnosti čineći jednu neodvojivu celinu.

Postoji veliki broj različitih definicija procesa planiranja i raspoređivanja resursa. U daljem tekstu date su neke od najznačajnijih:

„Bruker definiše problem planiranja kao proces uspostavljanja strateškog okvira za projekat ili proizvodni proces, uključujući definisanje ciljeva, ograničenja i politiku na visokom nivou. Bruker definiše problem raspoređivanja kao proces određivanja tačnog vremena i redosleda izvođenja zadataka ili poslova, obično u kontekstu proizvodnje ili projekata.” (Bruker, 2007);

„Pinedo sagledava problem planiranja kao uspostavljanje opšteg strateškog pristupa raspoređivanju resursa i redosledu zadataka kako bi se efikasno postigli ciljevi projekta ili proizvodnje. Pinedo definiše raspoređivanje kao "dodelu resursa tokom vremena radi obavljanja kolekcije zadataka podložnih ograničenjima i ciljevima.” (Pinedo, 2001);

„PIRR su oblici donošenja odluke koji igraju ključnu ulogu u proizvodnji. U trenutnom konkurentnom okruženju, efikasno određivanje redosleda postalo je neophodno za opstanak na tržištu. Kompanije moraju da ispune rokove i isporuke koji su posvećeni kupcima, jer neuspeh u tome može dovesti do značajnog gubitka. Preduzeća takođe moraju da planiraju aktivnosti na takav način da na efikasan način koriste raspoložive resurse.” (Alharkan, 2005);

„Raspored je proces organizovanja i odabira vremena korišćenja resursa za obavljanje svih aktivnosti neophodnih za proizvodnju rasporeda, željene rezultate u željeno vreme, uz zadovoljavanje velikog broja vremenskih odnosa i ograničenja između aktivnosti i resursa.” (Morton i Pentiko, 1993);

„Planiranje je proces uspostavljanja niza akcija kako bi se postigli identifikovani ciljevi uz dostupne resurse. Planiranje uključuje određivanje šta treba da se uradi i kako to može da se postigne sa resursima koji su na raspolaganju. Raspoređivanje je proces određivanja vremena za aktivnosti u planu. Ovde se radi o utvrđivanju kada određeni zadaci ili aktivnosti treba da se obave kako bi se osiguralo efikasno izvršenje celokupnog plana.” (Jonassen, 2000);

Lewis, u knjizi *"Planiranje, raspoređivanje i kontrola projekata,"* definiše planiranje kao *"sistematski proces definisanja obima rada i ciljeva koji treba postići, razjašnjavanje strategija koje treba primeniti i dobijanje neophodnih odobrenja i ovlašćenja. On definiše raspoređivanje kao "proces uspostavljanja vremenske linije za aktivnosti projekta, uključujući određivanje početka i završetka svakog zadatka i obezbeđivanje adekvatnog raspoređivanja resursa.”* (Lewis, 2001);

„Kerzner definiše planiranje kao funkciju izbora projekata za implementaciju, postavljanje ciljeva i zadataka projekta i određivanje načina kako doći do tih ciljeva, dok raspoređivanje definiše kao proces uspostavljanja vremenskog niza radova. To uključuje kreiranje vremenskog rasporeda projekta koji obuhvata zavisnosti između zadataka i rasporeda resursa.“ (Kerzner, 2017).

Analiza različitih definicija pojmova „planiranje“ i „raspoređivanje“ u kontekstu proizvodnih okruženja pokazuje da svaki autor sagledava pojmove prema specifičnom aspektu ovih procesa, iako se pojmovi prepliću. (Bruker, 2007) definiše planiranje kao visoko strateški proces koji uključuje definisanje ciljeva i politike na višem nivou, dok je raspoređivanje detaljno određivanje redosleda i vremena zadataka. (Pinedo, 1995) i (Alharkan, 2005) naglašavaju važnost brzog donošenja odluka u savremenom poslovanju, gde efikasno raspoređivanje može značiti razliku između uspeha i neuspeha u ispunjavanju rokova. (Morton i Pentiko, 1993) dodaju složenost kroz fokus na organizovanje vremena i resursa kako bi se uskladio veliki broj vremenskih ograničenja. (Jonassen, 2000) i (Lewis, 2001) dalje detaljno opisuju planiranje kao proces definisanja aktivnosti koje vode ka ciljevima, dok raspoređivanje usmeravaju ka određivanju specifičnih vremenskih okvira. (Kerzner, 2017) naglašava vezu između ciljeva projekta i utvrđivanja zavisnosti među zadacima, što pomaže u izgradnji vremenskog okvira koji omogućava efikasno izvršavanje projekta. Sve definicije se slažu da planiranje predstavlja strategijsko definisanje ciljeva i akcija, dok je raspoređivanje više operativan proces upravljanja resursima i vremenom kako bi se aktivnosti odvijale prema planu.

U nastavku rada, predstavljen je nacrt naučnih zamisli i istraživanja u okviru doktorske disertacije. Prema metodologiji naučnih istraživanja koju navode Mihailović (Mihailović, 2012) i Rakićević (Rakićević, 2018), nacrt naučnih zamisli istraživanja uključuje: definisanje predmeta naučnog istraživanja, cilj naučnih istraživanja, polazne hipoteze tokom istraživanja, korišćene metode tokom istraživanja, naučna opravdanost istraživanja, očekivani doprinos istraživanja kao i predloženu strukturu i tok prilikom izrade doktorske disertacije.

1.1 PREDMET NAUČNOG ISTRAŽIVANJA

Današnje proizvodne kompanije suočavaju se s brojnim izazovima u dinamičnom i veoma složenom poslovnom okruženju. Neki od ključnih izazova uključuju: globalizaciju tržišta, proizvodnju tehnološki sve naprednijih proizvoda, promene u potražnji i nove trendove tržišta, nedostatak kvalifikovane radne snage, održivost poslovanja i smanjenje uticaja na

životnu sredinu i mnoge druge. Efikasno planiranje u okviru upravljanja proizvodnim sistemom, ima ključnu ulogu u postizanju uspešnosti poslovanja i ostvarivanju konkurentске prednosti bilo koje kompanije. Ovaj zadatak podrazumeva postavljanje osnovnih ciljeva planiranja, definisanje strategija upravljanja i metodologije rada kako bi sistem efikasno obavljao svoju funkciju. Poslovno planiranje sastoji se od tri faze: kratkoročno, srednjoročno i dugoročno planiranje (Stanković i sar., 2022), (Rakićević, 2018). Ove faze su obično usko povezane jedna sa drugom i imaju za cilj da omoguće efikasno i efektivno upravljanje resursima.

- Kratkoročno planiranje obuhvata period od nekoliko nedelja do nekoliko meseci i fokusira se na dnevne ili nedeljne aktivnosti kompanije koje obuhvataju upravljanje projektima, kontrolu tržišta i održavanje stabilnosti poslovanja.
- Srednjoročno planiranje obično obuhvata period od nekoliko meseci do godinu dana i osnovni zadatak ove faze je optimizacija resursa kao i planiranje investicija u nove tehnologije i ulaganje u ljudski kapital.
- Dugoročno planiranje se odnosi na period od više godina - najčešće tri do pet i obuhvata razvoj strategija kompanije, preorijentaciju poslovnog portfolija, upravljanje rizikom poslovanja, kao i eventualno proširenje delatnosti kompanije. Sve tri nabrojane faze su od velikog značaja za kompaniju, jer podrazumevaju izgradnju trajne osnove za njeno poslovanje (Porter, 1980), (Simić i sar., 2021).

U savremenom poslovnom svetu, efikasno planiranje resursa neophodno je za opstanak i uspeh bilo koje kompanije. Ovo je naročito važno kada je reč o MSP koja čine 95 - 99% svih preduzeća i zapošljavaju preko 50% - 60% radnika širom sveta i u Srbiji (Republički zavod za statistiku, 2023), (Jalili sar., 2024). Velike korporacije koriste gotove softverske pakete za upravljanje resursima, čime se ostvaruje bolja organizacija svih poslovnih aktivnosti, kao i bolja kontrola kvaliteta proizvoda, kroz praćenje celog procesa proizvodnje, od nabavke sirovina do isporuke gotovih proizvoda. Uvođenjem alata poznatih pod nazivom (*eng. Enterprise Resource Planning - ERP*) sistemi, utiče se na poboljšanje ukupne produktivnosti i efikasnosti proizvodnog sistema kroz preraspodelu resursa i tokova u skladu sa okolnostima, povećanje tačnosti planiranja, poboljšanje koordinacije i komunikacije među sektorima, smanjenje troškova i vremena provedenog u planiranju... Neki od danas najpoznatijih ERP sistema su *SAP ERP*, *Oracle ERP Cloud*, *Microsoft Dynamics 365*, *Epicor ERP*. Međutim, implementacija i korišćenje ERP sistema u MSP nailazi na različite prepreke pre svega zbog:

- visokih troškova implementacije i održavanja - ERP sistemi obično zahtevaju značajna ulaganja u hardver, softver i obuku kadrova, dok MSP često imaju ograničene finansijske i ljudske resurse,
- složenosti ERP sistema i neophodnosti prilagođavanja specifičnim potrebama preduzeća – MSP često nemaju resurse, pre svega stručne kadrove u delu srednjeg menadžmenta, koji su sposobni da univerzalna hardverska i softverska rešenja prilagode poslovanju preduzeća da implementiraju, konfigurišu, upravljaju i održavaju složeni ERP sistem,
- intuitivnih i nedovoljno formalizovanih strategija upravljanja resursima u MSP – za razliku od velikih preduzeća u kojima postoje relativno precizni i utvrđeni planovi i programi, u MSP vlasnik – rukovodilac je dovoljno blizu neposrednih poslova i blizak je zaposlenim službenicima i radnicima, tako da može u hodu prilagođavati određenu strategiju poslovanja.

Jasno je da MSP imaju svoje osobenosti u planiranju i raspoređivanju resursa, koja se razlikuju od velikih preduzeća. Zbog toga MSP moraju biti veoma pažljiva u ovom domenu, kako bi se osiguralo da se ti resursi koriste optimalno i efikasno. Kao alternativa i rešenje prilikom pružanja usluga planiranja i raspoređivanja resursa, naročito u uslovima neizvesnosti, nude se različite tehnike i metode u okviru alata veštačke inteligencije i alata teorije verovatnoće. Ovi alati mogu biti relativno jednostavno prilagođeni potrebama preduzeća kako bi omogućili bolju organizaciju poslovnih aktivnosti, kao i manje troškove i veću fleksibilnost poslovanja.

Predmet naučnog istraživanja u doktorskoj disertaciji jeste računarski model za optimalno planiranje i raspoređivanje resursa u MSP u uslovima neizvesnosti, kao i primena naprednih metoda i alata u procesu upravljanja resursima. U procesu upravljanja resursima jedan od ključnih problema je identifikacija izazova sa kojima se MSP suočavaju. Na osnovu istraživanja naučno stručne literature uočeno je da današnja MSP u velikoj meri ne koriste naučne metode pri razvoju optimizacionih modela, već planiranje i raspoređivanje resursa u proizvodnji vrše na osnovu iskustva zaposlenih iz dela srednjeg menadžmenta, odnosno svih onih koji su zaduženi za upravljanje resursima u okviru preduzeća (Dito i sar., 2023), (Oztemel i Özel, 2021), (Kim, 2013), (Escobar-Sarmiento i sar., 2012), (Noorali i Gilaninia, 2017), (Bogdanova i sar., 2022). Analizom navedenih radova uočavaju se neka od ključnih pitanja i izazovi sa kojima se MSP suočavaju: nedostatak kapitala, marketinški problemi, nedostatak resursa, nedostatak kvalifikovane radne snage, nedostupnost moderne i pristupačne

tehnologije, nedostatak osnovne infrastrukture kao i ograničenja u pristupu sredstvima. Pored toga, MSP često nedostaju stručnjaci koji bi bili sposobni da uspešno primene napredne metode u planiranju resursa u proizvodnji, pre svega u delu veštačke inteligencije i organizacije podataka (Qing i sar., 2022), (Becker i Schmid, 2020), (Canhoto i Clear, 2020), (Del Giudice i sar., 2021). Kako bi se omogućilo prikupljanje relevantnih podataka u skladu sa predmetom istraživanja, osmišljena je anketa koja se fokusira na ključne aspekte proizvodnog procesa. Sprovedeno je anketno istraživanje u određenom broju MSP i preduzećima srednje veličine koja su pokazala inicijativu za povećanje konkuretnosti svojih proizvoda na tržištu. Učesnici ankete su bili vlasnici i stručnjaci iz dela srednjeg menadžmenta koji su zaduženi za upravljanje resursima u okviru preduzeća. Anketa je osmišljena sa ciljem prikupljanja ključnih podataka o trenutnim praksama i potrebama proizvodnih preduzeća i trebalo bi da ukaže na nivo svesti i stepen poznavanja i primene savremenih naučnih metoda u proizvodnim procesima kao i sa kojim izazovima se ova preduzeća suočavaju u Republici Srbiji.

Kako bi se definisala potencijalna pitanja u anketi izvršena je analiza dostupne naučne literature koja obuhvataju ključne aspekte upravljanja resursima. Izdvojeno je nekoliko potencijalnih pitanja čijim razmatranjem bi trebalo da se stekne uvid o stanju u proizvodnim preduzećima u Srbiji kada je reč o oblasti upravljanja resursima. Jedna grupa mogućih pitanja odnosi se na izazove sa kojima se suočavaju MSP u procesu upravljanja resursima i kako ovi izazovi utiču na njihovu inovativnu sposobnost (Aghazadeh i sar., 2023), (Kindström i sar., 2022). Druga grupa pitanja stavlja akcenat na karakterizaciju proizvodnih resursa i upotrebu savremenih alata veštačke inteligencije za poboljšanje operativne izvrsnosti (Schkarin i Dobhan, 2022). Pored toga, važno pitanje je spremnost kompanija da ulažu u nabavku ili razvoj softvera za upravljanje resursima, s obzirom na to da se jasno uočava nedostatak formalne implementacije rezultata naučnih istraživanja u ovoj oblasti (Sparrow, 1999). Naredno potencijalno istraživačko pitanje može biti merenje stepena razvoja MSP korišćenjem različitih indikatora i metodologija procene (Wang, 2023), (Simić i sar., 2025). Takođe, jedno od pitanja može biti procena kompetencija vlasnika MSP i njihovog uticaja na primenu modela upravljanja i poslovne performanse (Sparrow, 1999), (Vrontis i sar., 2022). Ovaj okvir istraživanja predlaže merenje različitih vrsta kompetencija kao što su tehnološke, strateške, finansijske, intelektualne i inovacijske kompetencije za procenu MSP (Chu, 2008). Uspeh u smislu inovacija i razvoja novih proizvoda može se meriti faktorima kao što su prihvatanje kupaca, prihvatanje tržišta, finansijski učinak i merenje na tehničkom nivou itd. (Azem i sar., 2021), (Rufai i Yakubu, 2023).

Ovakav sistemski način istraživanja mogućih potencijalnih pitanja ima za cilj da prikaže trenutno i realno stanje u sektoru proizvodnih preduzeća u Republici Srbiji. Jedan od ciljeva ankete je i prikazivanje potreba i mogućnosti implementacije savremenih alata veštačke inteligencije kako bi se povećala produktivnost i konkurentnost preduzeća na tržištu. Nakon detaljnog sagledavanja različitih aspekata anketnog istraživanja navedenog problema, definisana su pitanja koja su podeljena u pet ključnih faza: faza 1 - osnovne informacije o preduzeću, faza 2 - sadašnja praksa planiranja i upravljanja resursima u preduzeću, faza 3 - poznavanje i primena veštačke inteligencije, faza 4 - prepreke i izazovi, faza 5 - perspektiva i planovi.

Rezultati istraživačke ankete detaljno su predstavljani u prilogu doktorske disertacije. U anketi koja je sprovedena u regionu jugoistočne Srbije učestvovalo je 34 preduzeća od kojih je: 8 - mikro, 10 - malih, 7 - srednjih i 9 – preduzeća veće veličine. Na osnovu prve faze istraživanja može se zaključiti da se sva ispitivana MSP bave proizvodnom delatnošću. Odgovori na pitanje o dužini poslovanja ispitanih preduzeća pokazuju da 29% preduzeća posluje od 0 do 5 godina, što upućuje na postojanje mlađih firmi koje unose nove pristupe i tehnologije. Najveći procenat, 32%, posluje između 6 i 10 godina, 12% ima iskustvo između 11 i 20 godina, dok čak 26% preduzeća posluje više od 20 godina, što ukazuje na stabilnost i prisustvo firmi sa dugogodišnjim iskustvom.

U drugoj fazi istraživanja dobijeni su rezultati o trenutnoj praksi upravljanja resursima u MSP u Republici Srbiji. Rezultati istraživanja pokazuju da još uvek u velikoj meri MSP, za upravljanje resursima, koriste osnovne softverske alate, poput MS Excel-a. Čak 62% preduzeća oslanja se na ove jednostavnije alate. Napredne metode za planiranje resursa kao što su ERP sistemi, prisutni su u manjim procentima (svega 5%) i to u većim kompanijama. Tradicionalne metode upravljanja, zasnovane na iskustva zaposlenih, prisutne su kod 33% preduzeća, što dodatno potvrđuje hipotezu da postoji značajan prostor za unapređenje procesa proizvodnje implementacijom naprednih metoda u optimizacione modele.

Treća faza istraživanja dala je rezultate koji ukazuju na to da, iako postoji interes za uvođenje novih tehnologija, nedostatak stručnosti (što je navelo 56% preduzeća), kao i nedovoljna svest o prednostima (koju je prijavilo 12 preduzeća) utiču na proces digitalne transformacije u proizvodnom sektoru. Pored toga, čak 88% preduzeća smatra da bi dodatna edukacija o primeni optimizacionih modela bila korisna za njihove inženjere, dok 56% navodi da im je potrebna potpuna podrška u vidu obuke i tehničke pomoći. Očekivanje da bi primena naprednih tehnologija značajno poboljšala produktivnost i da bi primena alata veštačke inteligencije mogla povećati poslovne performanse za više od 20% iskazalo je čak 41%

ispitanih preduzeća. Konkretna poboljšanja koja se očekuju nakon implementacije naprednih metoda u upravljanju resursima su: optimizacija troškova, povećanje produktivnosti, smanjenje potrebnog vremena, unapređenje kvaliteta i prevenciju zastoja u proizvodnji.

Rezultati četvrte faze istraživanja izdvajaju ključne prepreke i izazove sa kojima se susreću proizvodna preduzeća u Srbiji pri implementaciji naprednih metoda upravljanja resursima. Glavne prepreke i izazovi za širu primenu naprednih tehnologija su: nedostatak znanja i stručnosti - 37%, visoki troškovi implementacije - 12%, nedovoljna svest o prednostima veštačke inteligencije - 24%, neadekvatna infrastruktura - 4%, nema tržišnih potreba za uvođenje naprednih metoda - 12%, dok ostalih 11% učesnika navode druge prepreke i izazove koji nisu direktno vezani za upravljanje resursima.

Peta faza istraživanja ističe buduće planove i perspektivu proizvodnih preduzeća u Republici Srbiji, a rezultati pokazuju da 56% ispitanika planira da implementira alate veštačke inteligencije u narednom periodu, 38% ispitanika nije sigurno zbog nedovoljnog poznavanja i svesti o prednostima ovih alata, dok 6% ne planira implementaciju ovih alata u proizvodni proces. Sa druge strane, čak 100% ispitanika je izrazilo spremnost za implementaciju alata veštačke inteligencije ukoliko bi imali sigurnost da će doći do povećanja produktivnosti proizvodnog procesa.

Analizom navedenih rezultata dobijenih anketnim istraživanjem dolazi se do zaključka da današnja preduzeća ne koriste alate veštačke inteligencije u značajnoj meri, pre svega zbog nepoznavanja i nedovoljne edukacije u ovoj oblasti. Istraživanje je pokazalo značajan potencijalni prostor za unapređenje poslovanja preduzeća kroz primenu alata veštačke inteligencije, ali su ukazala i na potrebu za većom podrškom kako bi se prevazišli postojeći izazovi i omogućilo šire usvajanje ovih tehnologija. Strategije i inicijative, kao što je Evropska politika za podsticanje digitalne transformacije i nacionalne strategije u Republici Srbiji, imaju za cilj da prevaziđu ove prepreke i povećaju stepen usvajanja i primene alata veštačke inteligencije. Ono što daje dodatni optimizam je opredeljenje Republike Srbije da radi na tome kroz različite edukacije i besplatne platforme koje su dostupne startup kompanijama, istraživačima i inženjerima, kako bi približila ove alate privredi. Anketna istraživanja pokazuju da je primena alata veštačke inteligencije u preduzećima u Republici Srbiji na relativno niskom nivou, što je značajno niže u poređenju sa prosekom u Evropi, gde više od 20% preduzeća koristi veštačku inteligenciju (Watney i Auer, 2021), (Jalil i sar., 2024), (Arroyabe i sar., 2024).

Iako su tradicionalni alati i metode još uvek dominantni, interes za alatima i tehnologijama veštačke inteligencije i njihovu primenu u oblasti optimizacije resursa je

prisutan, što uz adekvatnu podršku i edukaciju, može omogućiti preduzećima da postignu višu efikasnost i konkurentnost na tržištu.

Na osnovu identifikovanog istraživačkog prostora, fokus doktorske disertacije usmeren je na proučavanje i selekciju metoda neophodnih za koncipiranje i razvoj optimizacionog modela za upravljanje resursima u uslovima neizvesnosti. Posebna pažnja biće posvećena globalnim optimizacionim metodama i njihovoj integraciji sa alatima teorije verovatnoće, fazi logike i modela mašinskog učenja. Svakako ključni smer istraživanja biće razvoj samog računarskog modela u programskom paketu Matlab, koji će omogućiti definisanje optimalnog programa proizvodnje u vidu termin plana i rasporeda korišćenja resursa, čijom primenom bi se direktno uticalo na povećanje produktivnosti jednog proizvodnog preduzeća i generalno njegovu efikasnost. Istraživanja će biti ograničena na sektor industrijske proizvodnje, a plan je da verifikacija razvijenog modela bude realizovana u preduzeću koje se bavi proizvodnjom nameštaja na jugu Srbije.

1.2 CILJ NAUČNOG ISTRAŽIVANJA

Proizvodne kompanije, pre svega MSP, suočavaju se sa različitim izazovima u industriji danas uključujući promene u raznovrsnosti proizvoda i obimu proizvodnje. Da bi se uspešno suprotstavile ovim izazovima, kompanije moraju da primene fleksibilnije i brže pristupe. Kako tržište stalno evoluira, kompanije moraju da budu visoko konkurentne da bi opstale. Od suštinskog značaja za postizanje visoke konkurentnosti je i postizanje optimalne efikasnosti u svom poslovanju (Rakićević, 2018). Navedeni cilj se može postići optimalnim planiranjem, ali pre svega u domenu utvrđivanja najefikasnijih načina raspoređivanja resursa (Stanković i sar., 2022).

Osnovni cilj naučnog istraživanja u predloženoj temi doktorske disertacije je razvoj modela za optimalno planiranje i raspoređivanje resursa u MSP u uslovima neizvesnosti. Istraživačka hipoteza koja stoji iza ovog osnovnog cilja jeste da su postojeći pristupi i algoritmi za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja neadekvatni za rešavanje složenih, realnih problema, naročito u uslovima nedostatka adekvatnih ulaznih podataka i neprecizno određenih parametara proizvodnih procesa, kao posledice činjenice da je proizvodno okruženje u stvarnom svetu podložno mnogim izvorima neizvesnosti. Zbog toga, razvoj i implementacija adekvatnog modela planiranja, kombinacijom različitih alata veštačke inteligencije i alata teorije verovatnoće, može ponuditi jedan novi pristup u rešavanju problema optimalnog planiranja i raspoređivanja resursa u MSP. Osnovni cilj naučnog istraživanja može se dalje precizirati u sledeće specifične zadatke:

- detaljno definisanje osnovnih pravaca istraživanja na osnovu sveobuhvatnog pregleda literature i analize rezultata sprovedene ankete o stepenu primene savremenih alata veštačke inteligencije i teorije verovatnoće u modelima planiranja logističkih sistema,
- definisanje i predstavljanje opšte uloge planiranja logističkih sistema u proizvodnom okruženju MSP,
- funkcionalno i strukturno istraživanje matematičkih modela u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa,
- definisanje i predstavljanje naučnih metoda, pre svega u oblasti veštačke inteligencije i teorije verovatnoće, neophodnih za generisanje matematičkih modela i njihovo rešavanje,
- istraživanje svih relevantnih parametara koji direktno ili indirektno utiču na planiranje resursa u proizvodnom okruženju,
- definisanje početnih uslova, pravila prioriteta poslova i definisanje kriterijuma za višekriterijumsku analizu i rangiranje poslova,
- formulisanje različitih matematičkih modela na osnovu tipa proizvodnje, strategije i ciljeva proizvodnje,
- komparativna analiza metaheurističkih algoritama za optimizaciju planiranja i raspoređivanja resursa primenom inteligentnog neuro – fazi sistema zaključivanja,
- razvoj novog stohastičkog modela za optimizaciju procesa planiranja u kome su slučajne veličine stanja i njihove promene opisane određenim teorijskim zakonima raspodele ili fazi brojevima,
- istraživanje uticaja ulaznih parametara pri definisanju matematičkog modela na dobijene rezultate,
- prikupljanje empirijskih podataka na osnovu merenja uticajnih veličina realnih proizvodnih procesa i formiranje karte procesa kao osnove za verifikaciju razvijenih modela.

Indirektni naučni cilj istraživanja se odnosi na proširenje i produbljivanje opšteg znanja u oblasti planiranja logističkih sistema u MSP, dok bi sa šireg - društvenog aspekta, istraživanja trebalo da umanje jaz između naučnih dostignuća i stepena njihove primene u realnim proizvodnim sistemima.

1.3 FAZE NAUČNOG ISTRAŽIVANJA

Potencijlane faze naučnog istraživanja u okviru doktorke disertacije predstavljene su kroz nekoliko celina:

- identifikacija najznačajnijih problema sa kojima se MSP danas susreću u procesu upravljanja resursima,
- kritička analiza i sistematizacija dostupne literature u razmatranoj oblasti, kao i definisanje mogućih pravaca istraživanja u širem kontekstu,
- definisanje novog naučnog pristupa sa konkretnim predlozima za postizanje optimilnih rezultata i unapređenje postojećih naučnih pristupa,
- razvoj modela za optimizaciju procesa planiranja i raspoređivanja resursa u uslovima neizvesnosti primenom alata veštačke inteligencije i teorije verovatnoće,
- unapređenje postojećih optimizacionih metoda za rad sa slučajnim veličinama i fazi brojevima,
- razvoj inteligentnog neuro – fazi sistema zaključivanja koji pruža podršku izboru optimalnog optimizacionog algoritma za rešavanje postavljenog modela,
- razvoj metodologije za definisanje prioriteta poslova na osnovu zahteva proizvodnje i tržišta,
- analizu senzitivnosti i ocenu robusnosti modela kroz istraživanje uticaja ulaznih parametara na dobijene rezultate,
- naučna saznanja do kojih bi se došlo realizacijom planiranih istraživanja, omogućila bi jednostavnu modifikaciju i prilagođenje razvijenog modela za primenu u drugim oblastima planiranja logističkih sistema.

Očekuje se da istraživanja u okviru predložene doktorske disertacije imaju i širi društveni značaj u smislu praktične podrške MSP u rešavanju svakodnevnih logističkih zadataka.

1.4 PRIMENJENE NAUČNE METODE TOKOM ISTRAŽIVANJA

U nastavku rada predstavljene su primenjene naučne metode koje su korišćene tokom istraživanja i pisanja doktorske disertacije:

- metode ličnog anketiranja menadžmenta izabranih MSP u cilju ocene nivoa primene savremenih alata i naučnih metoda u procesu upravljanja resursima,
- metode statističke analize za obradu prikupljenih podataka,
- metode analize dostupne akademske literature u skladu sa specifičnim ciljevima istraživanja,
- metode indukcije i dedukcije čija primena ima za cilj izdvajanje i definisanje zaključaka na osnovu preglednih istraživačkih studija slučaja,

- metode matematičkog modeliranja neophodne za razvoj modela za optimizaciju procesa planiranja i raspoređivanja resursa u uslovima neizvesnosti,
- metode višekriterijumskog odlučivanja u cilju određivanja prioriteta poslova na osnovu zahteva proizvodnje i tržišta,
- metode teorije verovatnoće i slučajnih procesa za opisivanje slučajnih promenljivih i funkcija u proizvodnom okruženju (vremena operacija, logistička vremena, otkazi mašina...),
- metode fazi logike za opisivanje lingvističkih veličina i veličina koje imaju nedovoljno precizano definisan nivo izvesnosti,
- metode mašinskog učenja za predikovanje optimalnih parametara optimizacije i optimalne funkcije cilja,
- metaheurističke metode i algoritmi za optimizaciju stohastičkih procesa planiranja,
- metode neuro-fazi sistema zaključivanja za odabir optimalnog algoritma za optimizaciju procesa planiranja i raspoređivanja resursa,
- metode za verifikaciju razvijenog matematičkog modela (analitička verifikacija, verifikacija na osnovu eksperimentalnih podataka, provera konzistentnosti i stabilnosti...),
- metode i alati deskriptivne statistike neophodni za obradu eksperimentalnih podataka (slučajnih veličina) dobijenih snimanjem procesa u izabranom proizvodnom okruženju.

1.5 STRUKTURA I SADRŽAJ DOKTORSKE DISERTACIJE

Doktorska disertacija sastoji se od sedam ključnih poglavlja koja su međusobno povezana u jednu celinu. Svako poglavlje predstavlja izuzetno bitnu stavku i neizostavni deo istraživanja. Struktura i okvirni sadržaj doktorske disertacije prikazan je na slici 1.1, dok su u nastavku rada predstavljena i opisana sva poglavlja doktorske disertacije.

Prvo poglavlje obuhvata uvodna razmatranja i nacrt naučnih zamisli, što predstavlja nezaobilazni deo istraživanja prilikom izrade doktorske disertacije. Ovo poglavlje naglašava dalji tok istraživanja koji će se detaljno razmatrati u drugim poglavljima doktorske disertacije, pružajući strukturni uvid i okvirni sadržaj u užem smislu.

Drugo poglavlje doktorske disertacije obuhvata detaljan pregled istraživanja u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa u uslovima neizvesnosti kao i podelu naučnih metoda za rešavanje problema planiranja. Nakon pregleda literature, kvantitativne analize naučnih radova, kritičke analize dosadašnjih istraživanja u oblasti planiranja resursa,

razmatraju se pravci istraživanja čija je osnovna uloga definisanje smernica rada u smislu ciljeva i doprinosa.

Treće poglavlje doktorske disertacije razmatra probleme upravljanja resursima u MSP u Republici Srbiji, definiše notaciju i teorijski analizira različite modele problema planiranja kroz tri osnovna polja: α | β | γ . Treće poglavlje doktorske disertacije predstavlja ujedno i teorijsku osnovu za razvoj računarskog modela.

Četvrto poglavlje doktorske disertacije proučava i selektuje naučne metode koje su neophodne za koncipiranje i razvoj optimizacionog modela za upravljanje resursima u uslovima neizvesnosti. Primena naprednih metoda i implementacija alata veštačke inteligencije u modelima planiranja predstavlja jedan od ključnih doprinosa u doktorskoj disertaciji.

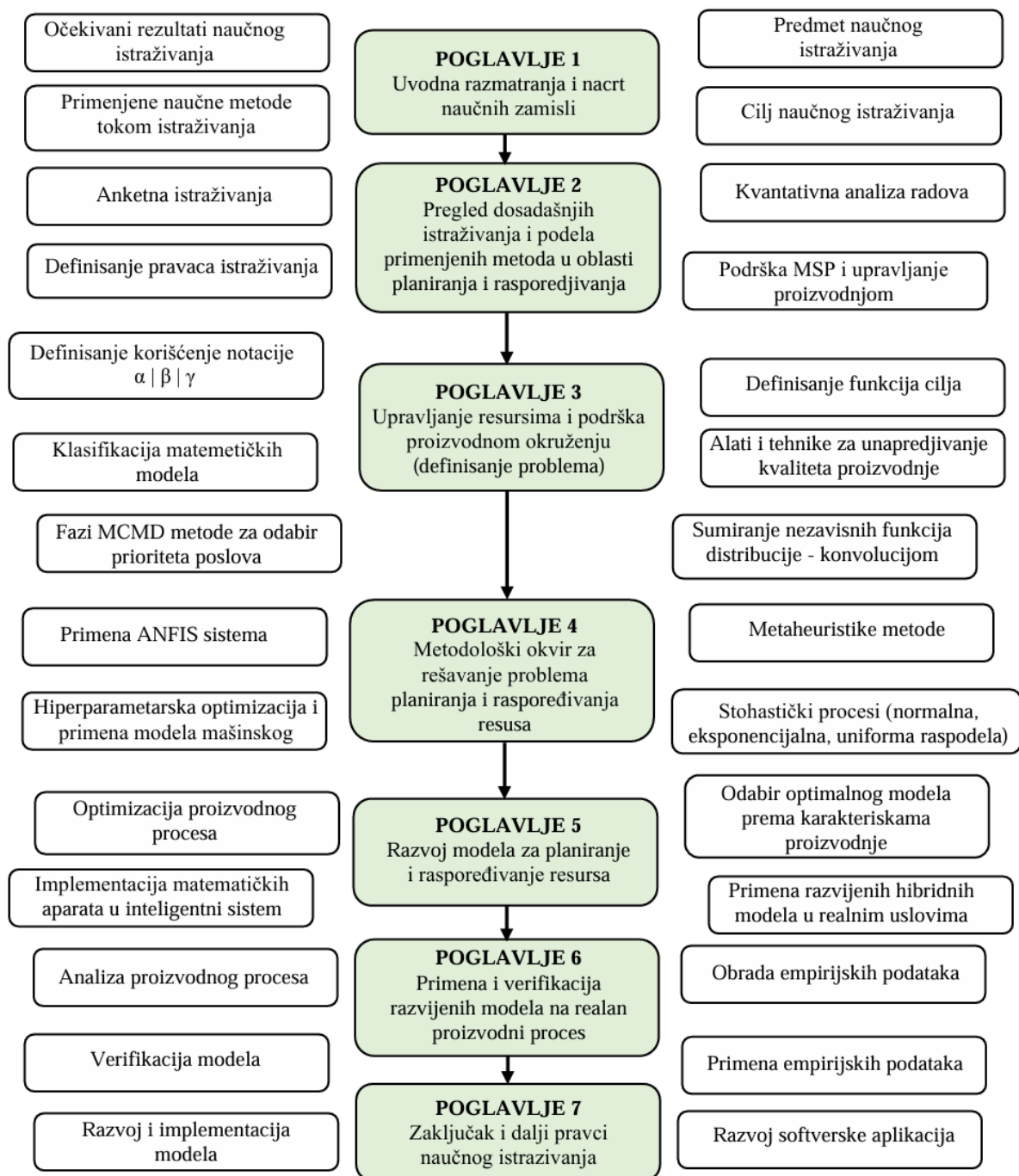
Peto poglavlje predstavlja konkretan naučni doprinos doktorske disertacije jer se direktno bavi razvojem modela planiranja i raspoređivanja resursa u MSP u uslovima neizvesnosti. Proces razvoja modela sproveden je kroz nekoliko faza. U početnoj fazi, identifikovani su ključni problemi upravljanja resursima, uključujući promenljivost potražnje, ograničenja u dostupnosti resursa i uticaje eksternih faktora nesigurnosti. Na osnovu sprovedene analize, utvrđeni su ključni parametri modela i razvijena odgovarajuća matematička struktura. U okviru razvoja, integrisane su optimizacione metode, zajedno sa alatima veštačke inteligencije i fazi logike. Model je iterativno testiran i unapređivan na osnovu dobijenih rezultata, kako bi se obezbedila pouzdanost i efikasnost razvijenog modela.

Šesto poglavlje doktorske disertacije predstavlja eksperimentalni deo istraživanja u kome je realizovana primena razvijanih modela planiranja u realnom proizvodnom okruženju. Prilagođavanje modela konkretnom problemu i analiza ponašanja modela u različitim proizvodnim uslovima, razmatrani su u ovom poglavlju. Doprinos ovog poglavlja ogleda se u verifikaciji rezultata u realnim proizvodnim uslovima i analizi opravdanosti istraživanja.

Sedmo poglavlje doktorske disertacije predstavlja završnu analizu sprovedenih istraživanja, potvrdu postavljenih hipoteza istraživanja kao i analizu sveobuhvatnog naučnog doprinosa doktorske disertacije. Takođe, ovo poglavlje obuhvata buduće pravce istraživanja koji su direktno vezani za razvoj softverske aplikacije koja predstavlja širi društveni značaj u smislu praktične podrške MSP u rešavanju svakodnevnih logističkih zadataka.

Literatura korišćena u ovom istraživanju obuhvata ukupno 198 referenci od kojih su 18 radovi proistekli iz istraživanja autora u oblast disertacije. Među njima posebno treba istaći 6 radova publikovanih u časopisima sa SCI/SCIE liste, što ukazuje na visok kvalitet i relevantnost istraživanja u ovoj oblasti. Takva zastupljenost potvrđuje kontinuitet u

naučnoistraživačkom radu autora i jasno pokazuje naučni doprinos u okviru izabrane teme. U nastavku na slici 1.1 predstavljena je struktura i okvirni sadržaj doktorske disertacije.



Slika 1.1 Struktura i okvirni sadržaj doktorske disertacije

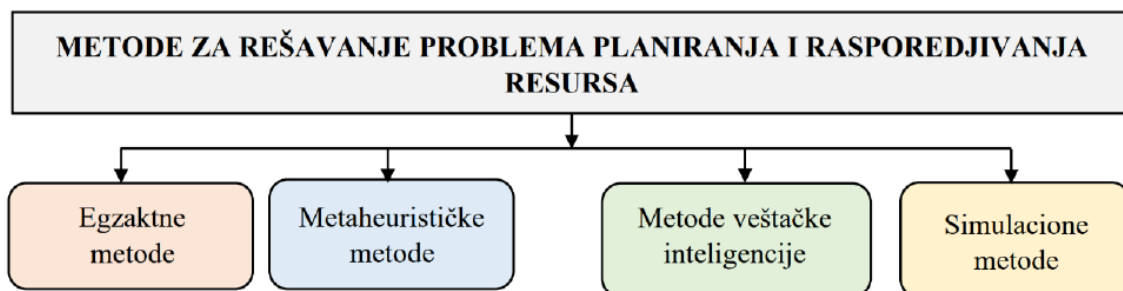
Poglavlje 2

PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA

Drugo poglavlje doktorske disertacije pruža sveobuhvatan teorijski pregled oblasti planiranja i raspoređivanja resursa, zasnovan na analizi relevantne naučno-istraživačke literature, uključujući ključne naučne radove iz ove oblasti. Pregled postojećih istraživanja neophodan je za razumevanje razvoja oblasti, počevši od modela zasnovanih na alatima operacionih istraživanja, pa sve do savremenih tehnika koje uključuju stohastičke metode i veštačku inteligenciju. Analiza relevantnih naučnih radova razmatraće napredak u teorijskim i praktičnim okvirima, sa posebnim fokusom na njihovu primenu u različitim industrijskim sektorima. Poseban akcenat stavljen je na istraživanja koja ispituju efikasnost različitih algoritama i modela u rešavanju složenih problema planiranja i raspoređivanja resursa u proizvodnim sistemima. Takođe, pregled istraživanja pruža osnovu za razumevanje trenutnog stanja, identifikaciju postojećih izazova i mogućih pravaca daljeg istraživanja, čime se stvara čvrsta osnova za razvoj novih rešenja u optimizaciji industrijskih procesa. Cilj ovog poglavlja nije samo da pruži sveobuhvatan pregled ključnih istraživačkih doprinosa, već i identifikuje kritične nedostatke u literaturi, koje će poslužiti kao osnova za razvoj inovativnih metodologija predstavljenih u narednim poglavljima disertacije. Kroz pregled literature naglašava se značaj

planiranja i raspoređivanja resursa kao ključnog faktora za unapređenje efikasnosti, fleksibilnosti i konkurentnosti u savremenim proizvodnim sistemima.

Metode koje se najčešće koriste za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa su: egzaktno metode, metaheurističke metode, metode veštačke inteligencije i simulacione metode. Na slici 2.1 prikazana je grafička klasifikacija primenjenih metoda u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa (Stanković i sar., 2020).



Slika 2.1 Podela primenjenih metoda u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa

2.1 PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA U OBLASTI PLANIRANJA I RASPOREDJIVANJA RESURSA

Tokom početnih istraživanja u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa, primarno su korišćene egzaktno metode, poput modela linearnog i dinamičkog programiranja, koje su pružale teorijsku osnovu za rešavanje jednostavnijih problema. Zbog ograničenja ovih metoda u rešavanju složenih i obimnih problema planiranja proizvodnje, razvijene su naprednije tehnike, uključujući napredne metode i alate veštačke inteligencije. Danas ovi napredni pristupi zauzimaju značajno mesto u rešavanju problema planiranja i raspoređivanja resursa. Motiv da istraživanje ode u ovom pravcu leži u potrebi za optimizacijom proizvodnih procesa i efikasnim rešavanjem ovakve vrste problema. Optimizacija proizvodnog procesa rešava se primenom različitih metoda i algoritama koji omogućavaju pronalaženje zadovoljavajućih rešenja u prihvatljivom vremenskom okviru, uzimajući u obzir složenost i dinamičnost proizvodnog okruženja.

2.1.1 Pregled dosadašnjih istraživanja - primena egzaktnih metoda

Egzaktne metode karakteriše precizno definisanje matematičkih modela i pronalaženje optimalnih rešenja, pri čemu efikasnost njihove primene zavisi od obima i kompleksnosti ispitivanih podataka. Ključne tehnike koje se primenjuju u okviru egzaktnih metoda za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa uključuju nelinearno, linearno, dinamičko, celobrojno i disjunktno programiranje (Stanković i sar., 2020). Među prvim

istraživačima koji su se bavili rešavanjem problema planiranja i raspoređivanja resursa primenom egzaktnih metoda izdvajaju se Harary i Ross (Harary i Ross.,1957). Jedan od najpoznatijih i najčešće primenjivanih egzotnih algoritama za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa jeste algoritam grananja i ograničavanja (*eng. Branch and Bound - BB*). BB algoritam se prvi put pominje od strane poznatih naučnika Landa i Lomnickog još davne 1960. godine (Land i Doing, 1960), (Lomnicki, 1965). Pripada grupi metoda pretraživanja i ogleda se u razlaganju početnog problema na manje, lakše, rešive podprobleme, čime se omogućava sistematsko pretraživanje prostora rešenja. Na taj način algoritam ima zadatak da pronade optimalno ili dovoljno dobro rešenje uz efikasno upravljanje kompleksnošću problema.

Brucker i Thiele (Brucker i Thiele, 1996) predstavili su BB algoritam namenjen rešavanju opšteg problema planiranja radnih mesta i mašina, uzimajući u obzir vreme podešavanja koje zavisi od redosleda izvršavanja operacija. U njihovom istraživanju, problem se sastoji od skupa operacija i ograničenja, pri čemu se svaka operacija mora izvršiti na određenoj mašini. Operacije su klasifikovane u više grupa prema prioritetima izvršavanja poslova na pojedinim mašinama. Računski rezultati dobijeni za ovaj opšti problem raspoređivanja resursa potvrđuju efikasnost predložene metodologije i ukazuju na njen potencijal za primenu u rešavanju složenih problema planiranja u industriji. Klein i Scholl (Klein i Scholl, 1996) koriste BB algoritam za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa, fokusirajući se na dodeljivanje zadataka radnim mestima u montažnoj liniji radi maksimalne efikasnosti proizvodnje. U radu su predstavljena ograničenja u vidu prioriteta zadataka, dok eksperimentalni rezultati potvrđuju pouzdanost i primenljivost algoritma u rešavanju ovih problema. Carlier i Rebai (Carlier i Rebai, 1996) primenjuju BB algoritam za rešavanje problema protoka poslova, s fokusom na predstavljanje i poređenje nekoliko egzaktnih metoda. Ostergard (Ostergard, 2002) uvodi inovativan pristup u okviru BB algoritma, gde se čvorovi u grafovima razlikuju dodavanjem jedinstvenih boja, što predstavlja novu metodologiju označavanja i doprinos vizualizaciji rezultata.

Novi pravac istraživanja, u okviru egzaktnih metoda, uvode Liu i saradnici u radu (Liu i sar., 1997) gde primenjuju lagranžovu metodu relaksacije za rešavanje problema protoka poslova, koji se ubraja u oblast planiranja i raspoređivanja resursa. Problem protoka odnosi se na proizvodnju različitih, ali sličnih proizvoda, dok se permutacioni protok, kao specifičan pristup u okviru problema protoka, odnosi na slučajeve u kojima su obradne sekvence na svim fazama proizvodnje fiksirane. Autori uvode novu formulaciju celobrojnog programiranja, koja se uz upotrebu lagranžovih multiplikatora dekomponuje u potprobleme,

omogućavajući jednostavnije rešavanje. U okviru ovog pravca potrebno je pomenuti i rad Thomalla (Thomalla, 2001) koji se bavi istraživanjem metodologije za optimizaciju raspoređivanja poslova u tačno određeno vreme. Svaka operacija mora biti obrađena na mašini sa eventualnom malom razlikom u efikasnošću, samim tim i vremenom obrade. U radu se naglašava da primena automatizovanih sistema u velikoj meri zavisi od efikasnog korišćenja resursa. Thomalla primenjuje metodu lagranžove relaksacije i demonstrira njenu efikasnost u rešavanju problema planiranja i raspoređivanja resursa. Zhou i saradnici u radu (Zhou i sar., 2016) istražuju problem raspoređivanja pacijenata u operacione sale, fokusirajući se na optimizaciju dodele resursa tokom različitih hirurških faza radi minimizacije troškova i povećanja zadovoljstva pacijenata. Predstavljeni model koristi novi lagranžov algoritam, čija primena, prema studiji slučaja, pokazuje značajne uštede troškova. Jedna od ključnih prednosti ovog modela za raspoređivanja pacijenata u operacione sale je njegova fleksibilnost i mogućnost primene u drugim oblastima planiranja.

Egzaktne metode za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa pokazale su svoju efikasnost kroz primenu različitih matematičkih pristupa. Različita istraživanja potvrđuju da ove metode omogućavaju pronalaženje optimalnih ili zadovoljavajućih rešenja u slučajevima jednostavnijih problema, dok u složenim scenarijima sa velikim brojem ograničenja, njihova primena je ograničena.

2.1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja - primena metaheurističkih metoda

Metaheurističke metode danas predstavljaju jedan od najpopularnijih i najefikasnijih alata za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa. Ove metode pripadaju klasi NP-teških problema, jer se fokusiraju na rešavanje složenih realnih problema u industrijskim sistemima putem programiranja ograničenja. Među najpoznatijim metaheurističkim algoritmima izdvajaju se Genetski algoritam (eng. *Genetic Algorithm* - GA), Optimizacija kolonijom mrava (eng. *Ant Colony Optimization* - ACO), Metoda simuliranog kaljenja (eng. *Simulated Annealing* - SA), Tabu pretraga (eng. *Tabu Search* - TS), Optimizacija rojem čestica (eng. *Particle Swarm Optimization* - PSO) i Optimizacija primenom veštačke kolonije pčela (eng. *Artificial Bee Colony Optimization* - ABC) (Petrović, 2013). Ove metode se široko primenjuju zbog svoje fleksibilnosti i sposobnosti pronalaženja efikasnih rešenja za kompleksne industrijske probleme.

Genetski algoritam: Zhang i saradnici (Zhang i sar., 2011) istraživali su problem fleksibilnog planiranja poslova s ciljem minimizacije ukupnog vremena raspoređivanja. Efikasnost GA testirana je na referentnim skupovima podataka preuzetim iz literature, pri čemu rezultati pokazuju da predloženi algoritam daje efikasna rešenja za problem planiranja i

raspoređivanja resursa. U poređenju s postojećim metodama, GA ostvaruje jednaka ili bolja rešenja u smislu vremena i kvaliteta rasporeda.

Chen i saradnici (Chen i sar., 2012) primenjuju GA na problem planiranja poslova u okruženju sa paralelnim mašinama. Rad je podeljen u dva dela: prvi deo opisuje strukturu i model istraživanja, dok drugi predstavlja implementaciju GA na konkretnom primeru. Predloženi pristup koristi grupni GA, koji uključuje dva glavna modula: modul za izbor mašina i modul za planiranje i raspoređivanje. Modul za izbor mašina određuje operacije i mašine na kojima će se te operacije izvršiti, dok modul za planiranje i raspoređivanje resursa pravi listu rasporeda svih operacija dodeljenih pojedinačnim mašinama. Rezultati istraživanja pokazuju da kombinacija ovih modula i GA nadmašuje postojeće metode u praksi, omogućavajući kvalitetniji i brži raspored operacija na dostupnim mašinama. Uvođenjem predloženih modula smanjuje se vreme praznog hoda, kašnjenja i ukupno vreme optimizacije, što potvrđuje prednosti predložene metodologije.

Asadzadeh (Asadzadeh, 2015) istražuje rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa primenom hibridnog GA sa integrisanim agentima. Hibridizacija algoritama predstavlja efikasan pristup za unapređenje njihovih performansi i povećanje efikasnosti u rešavanju složenih problema. U radu je razvijen lokalni analitički algoritam, čija je glavna funkcija unapređenje lokalne pretrage i kvaliteta rešenja, zasnovan na primeni agenata u procesu planiranja. Rezultati istraživanja pokazuju da predloženi hibridni algoritam značajno nadmašuje klasični GA u pogledu efikasnosti i kvaliteta rešenja.

Albadr i saradnici (Albadr i sar., 2020) istraživali su primenu GA zasnovanog na teoriji prirodne selekcije (*eng. Genetic Algorithm Based on Natural Selection Theory - GABONST*) za rešavanje složenih optimizacionih problema. GABONST je pokazao superiorne performanse u poređenju sa standardnim GA i metodom (*eng. Enhanced Adaptive Teaching-Learning-Based Optimization - EATLBO*), postižući tačnost od čak 99.38% zahvaljujući naprednim strategijama selekcije, mutacije i ukrštanja. GABONST algoritam održava proporcionalnost između istraživanja i iskorišćavanja prostora rešenja, omogućavajući efikasnu i pouzdanu optimizaciju u različitim scenarijima.

Rooyani i Defersha (Rooyani i Defersha, 2019) istraživali su problem fleksibilnog planiranja poslova, koji se smatra proširenjem klasičnog problema raspoređivanja. Predloženi dvostepeni GA obuhvata dve faze pretraživanja rešenja. U prvoj fazi algoritma definiše se sekvencijalni raspored operacija kroz dodeljivanje mašina, pri čemu se za svaku operaciju bira mašina s najkraćim vremenom obrade, počevši od početnog genetskog skupa (hromozoma). Druga faza algoritma koristi klasičan pristup GA, omogućavajući pretraživanje celokupnog

domena mogućih rešenja. Efikasnost predloženog dvostepenog GA ogleda se u kombinaciji ove dve faze pretraživanja, koje zajedno značajno nadmašuju klasične pristupe GA, posebno u rešavanju problema većih dimenzija. Dominantnost predloženog algoritma potvrđuje se u kontekstu složenijih problema planiranja i raspoređivanja resursa.

Zhang i saradnici (Zhang i sar., 2020) razvijaju poboljšani GA za rešavanje problema fleksibilnog planiranja poslova sa vremenskim ograničenjima, uključujući vreme transporta između mašina i pripremu mašina za nove zadatke. Algoritam se unapređuje kroz faze generisanja početne populacije, dinamičku mutaciju i proširenje pretraživačkog prostora, uz primenu veštačke inteligencije za usvajanje kvalitetnih rešenja. Predloženi GA pokazuje superiorne rezultate u poređenju sa postojećim metodama, potvrđujući svoju efikasnost i relevantnost.

Türkyılmaz i saradnici (Türkyılmaz i sar., 2022) uvode novu metodologiju za rešavanje problema fleksibilnog raspoređivanja poslova, zasnovanu na modifikaciji pristupa lokalnoj pretrazi optimuma. Predloženi hibridni algoritam kombinuje paralelno izvršavanje GA i lokalne pretrage, čime se postiže poboljšanje vremena pronalaženja lokalnog minimuma i bolja konvergencija algoritma. Početni parametri algoritma određuju se nasumično, koristeći pravila dispečerstva. Rezultati istraživanja potvrđuju efikasnost predložene metodologije u rešavanju problema planiranja poslova.

Optimizacija kolonijom mrava: Huang i Liao (Huang i Liao, 2008) predstavili su hibridni algoritam koji kombinuje dva poznata metaheuristička pristupa: ACO i TS. Svaki posao unapred je dodeljen određenoj mašini sa definisanim trajanjem operacija, a cilj algoritma je pronalaženje optimalnog rasporeda poslova i minimizacija ukupnog vremena obrade, definisanog kriterijumskom funkcijom. ACO uvodi inovativnu metodu dekompozicije kroz identifikaciju uskih grla, dok TS doprinosi poboljšanju kvaliteta rešenja tokom procesa pretraživanja. Rezultati istraživanja pokazuju da hibridni algoritam pruža iste ili bolje rezultate u poređenju s prethodno testiranim algoritmima, što potvrđuje njegovu efikasnost i primenljivost.

Ebrahimi i saradnici (Ebrahimi i sar., 2020) istraživali su problem minimizacije ukupnih troškova energije i kašnjenja u kontekstu fleksibilnog planiranja poslova. U radu se naglašava međuzavisnost između planiranja poslova i rasporeda mašina, koji zajedno doprinose poboljšanju energetske efikasnosti i produktivnosti sistema. Autori predlažu integrisani model optimizacije koji uzima u obzir zavisnost energije od sekvencijalnog rasporeda poslova na mašinama. Rezultati pokazuju da predloženi integrisani model smanjuje ukupne troškove energije za 0,16% i vreme kašnjenja za 5,34% u proseku, dok u

poređenju sa drugim algoritmima postiže poboljšanje od 5,17%. Eksperimentalni rezultati, dobijeni primenom algoritama ACO i SA, ukazuju na superiornost integrisanog modela, čije prosečne vrednosti ciljne funkcije premašuju rezultate neintegrisanog modela za 5%. Ovi nalazi potvrđuju efikasnost i prednost integrisanog pristupa u rešavanju problema fleksibilnog planiranja poslova.

Simulirano kaljenje: Zhang i Wu u radu (Zhang i Wu, 2010) predložili su primenu SA algoritma za minimizaciju ukupnog vremena planiranja, oslanjajući se na ciljnu funkciju optimizacije. Algoritam je zasnovan na principu uskih grla, što doprinosi poboljšanju kvaliteta konačnog rešenja. Predloženi hibridni algoritam pokazuje visoku efikasnost u rešavanju problema planiranja i raspoređivanja resursa.

Cruz-Chavez (Cruz Chavez i sar., 2017) istraživali su problem fleksibilnog planiranja radnih mesta koristeći metaheuristički pristup. U radu je predstavljen SA algoritam sa unapređenjima, uključujući ubrzani mehanizam hlađenja sa delimičnim rasporedom. Eksperimentalni rezultati pokazuju da predloženi algoritam brzo dolazi do optimalnih rešenja. Kombinacija tehnike delimičnog raspoređivanja i mehanizma hlađenja značajno poboljšava efikasnost SA algoritma, pružajući superiorne rezultate u poređenju sa drugim metodama iz literature za rešavanje ovog problema.

Tamssaouet i saradnici (Tamssaouet i sar., 2018) istraživali su problem planiranja i raspoređivanja resursa sa ograničenjem dostupnosti mašina. Periodi nedostupnosti mašina unapred su definisani i povezani sa aktivnostima preventivnog i korektivnog održavanja. U radu se koriste algoritmi TS i SA, prilagođeni za rad u uslovima ograničene dostupnosti mašina. Kroz studiju slučaja, autori poredе performanse ovih algoritama sa rezultatima prethodnih istraživanja koja su sprovedli Mati i Azem sa saradnicima (Mati, 2010), (Azem, i sar., 2008). Kako bi osigurali validnost poređenja, koristili su identične početne parametre za testiranje svih metoda. Rezultati pokazuju da TS algoritam premašuje SA i druge pristupe u rešavanju ovog problema.

Tamssaouet i saradnici (Tamssaouet i sar., 2022) dodatno istražuju problem fleksibilnog rasporeda poslova primenom SA algoritma. Složenost ovog problema definiše se kao visoka, zbog dodatnih ograničenja koja se procenjuju u realnom vremenu prema unapred definisanim kriterijumima. Predloženi kriterijum, baziran na fleksibilnosti, meri doprinos lokalne pretrage u ostvarivanju proizvodnih ciljeva na osnovu ciljne funkcije. Ovakav pristup omogućava efikasniju procenu i prilagođavanje rasporeda u dinamičnim proizvodnim okruženjima.

Tabu pretraga: Zhang i saradnici (Zhang i sar., 2007) istraživali su primenu TS algoritma za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa. Predložena struktura algoritma, u kombinaciji sa odgovarajućim strategijama pretraživanja i pažljivo definisanim

početnim parametrima, omogućava postizanje optimalnih rezultata u procesu planiranja. U drugom delu rada prikazan je obiman skup podataka koji uključuje gornje i donje granice TS algoritma. Računski rezultati potvrđuju efikasnost i uspešnost predloženog TS algoritma u rešavanju ovog problema.

Fan i saradnici (Fan, i sar., 2021) istraživali su problem fleksibilnog planiranja poslova primenom hibridnog pristupa u rešavanju proizvodnih problema. Predloženi hibridni pristup kombinuje dva poznata metaheuristička algoritma: Java algoritam (*eng. Java Algorithm – JA*) i TS. Ključna inovacija ovog rada ogleda se u detaljnom razmatranju višestrukih kritičnih puteva tokom procesa optimizacije. Eksperimentalni rezultati potvrđuju efikasnost predložene metodologije, posebno u okviru dvovektorske šeme kodiranja matrice i unapređene lokalne pretrage. Predloženi hibridni pristup pokazuje značajan potencijal za rešavanje složenih problema planiranja i raspoređivanja resursa u proizvodnim sistemima.

Optimizacija rojem čestica: Jamili (Jamili, 2019) je predstavio model za planiranje i raspoređivanje resursa s ciljem optimizacije problema u praktičnim scenarijima, gde operatori (radnici) mašina nemaju mogućnost odmora dok operacije na mašinama nisu završene. Autor ističe da se vremenski intervali za odmor obično dodeljuju tokom radnog dana operatora, što zahteva raspoređivanje operacija na način koji omogućava dovoljno vremena za odmor. S obzirom na neizvesnost vremena obrade operacija u realnim uslovima, predloženo je fiksno vreme odmora tokom radnog vremena. Za rešavanje ovog problema, Jamili koristi nekoliko algoritama: BB, SA i PSO. Poređenjem rezultata, utvrđeno je da PSO algoritam pruža značajno bolje performanse, sa poboljšanjem od 55% i 58% u odnosu na SA algoritam. Takođe, PSO i BB algoritmi pokazali su se superiornijima u poređenju sa SA algoritmom, što naglašava njihov potencijal za efikasno rešavanje ovog problema.

Wang i saradnici (Wang i sar., 2020) istraživali su problem dinamičkog planiranja i raspoređivanja resursa primenom PSO algoritma. Stohastička dolaznost resursa - poslova u proizvodnim sistemima često predstavlja izazov prilikom raspoređivanja. Autori predlažu rešenje ovog problema kroz dinamičko programiranje i raspoređivanje poslova u realnom vremenu. Suština predloženog pristupa je uspostavljanje ravnoteže u sistemu planiranja tokom dolaska novih nasumičnih poslova i njihovo integrisanje u dinamički sistem raspoređivanja. Kada nove operacije pristignu u sistem, automatski se pokreće proces reprogramiranja kako bi se one adekvatno uvrstile, dok se privremeno tretiraju kao nedostupne da bi se održala ravnoteža u sistemu. Eksperimentalni rezultati pokazuju da predložene metode, uključujući modifikaciju PSO algoritma i proces reprogramiranja,

pružaju izvanredne rezultate u rešavanju problema dinamičkog planiranja i raspoređivanja resursa.

Tang i saradnici (Tang i sar., 2019) istraživali su primenu metaheurističkih metoda za rešavanje problema fleksibilnog planiranja poslova, s ciljem minimizacije ukupnog prekovremenog rada, kašnjenja i maksimalnog vremena završetka raspoređivanja. Autori predlažu hibridni pristup koji kombinuje algoritam PSO za globalno pretraživanje mogućih rešenja i SA za lokalnu optimizaciju. Studija je sprovedena na realnim podacima iz industrije, što dodatno naglašava praktičnu vrednost istraživanja. Iako predloženi hibridni algoritam pokazuje potencijal u rešavanju problema fleksibilnog planiranja poslova, eksperimentalni rezultati ukazuju da ne dominira u potpunosti nad drugim metodama u pogledu kvaliteta rešenja, iako može pružiti konkurentne rezultate.

Optimizacija primenom veštačke kolonije pčela: Huang i Lin u radu (Huang i Lin, 2011) predložili su pristup optimizacije ABC algoritmom za rešavanje problema otvorenih prodavnica. Struktura ABC algoritma definiše svaku operaciju kao područje za hranjenje, pri čemu se tokom procesa hranjenja pčelinje kolonije vreme mirovanja pčela (delimičnog rasporeda) posmatra kao neefikasnost. Neefikasnost se javlja kod dužeg vremena mirovanja. Ako delimični put pčela ne zadovoljava zahtevanu efikasnost koju kolonija prihvata, algoritam prekida pretragu u tom području i prelazi na generisanje novih mogućih rešenja. Ovaj pristup omogućava dinamičko prilagođavanje tokom optimizacije i doprinosi kreiranju kvalitetnijih rešenja u rešavanju problema otvorenih prodavnica.

2.1.3 Pregled dosadašnjih istraživanja - primena metoda veštačke inteligencije

Veštačka inteligencija (*eng. Artificial intelligence*) predstavlja jednu od najpopularnijih istraživačkih oblasti današnjice. Predstavlja oblast računarskih nauka čija je osnova uloga oponašanje ljudske inteligencije i manifestovanje određenih informacija u mašini ili sistemu. Osnovna uloga ovakvog sistema je stvaranje moćnih alata koji mogu samostalno donositi odluke, čime u potpunosti mogu zameniti ili izbaciti ljudsko subjektivno mišljenje za određeni problem ili situaciju (Sheikhi i sar., 2023). Jednu od klasičnih definicija veštačke inteligencije dali su Stjuart Rasel i Peter Norviga, autora poznatog udžbenika *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, gde opisuju veštačku inteligenciju kao „proučavanje agenata koji primaju perceptualne inpute iz svog okruženja i preduzimaju akcije koje maksimiziraju njihovu šansu za uspeh“ (Russell i Norvig, 2023).

Područje veštačke inteligencije je veoma široko i u stalnom je razvoju što ga čini moćnim alatom. Sa napretkom modela mašinskog učenja, dubokog učenja, neuronskih mreža i drugih

tehnika, ovakav pristup predstavlja veliki potencijal u naučnom i sveobuhvatnom smislu. Tehnike koje spadaju u grupu veštačke inteligencije a koje se najčešće koriste u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa su: mašinsko učenje i duboko učenje.

Tehnika mašinskog učenja (*eng. Machine Learning*) omogućava računarima da nauče iz podataka i poboljšaju svoje performanse tokom vremena, bez specifičnog programiranja ili korišćenja složenih programerskih jezika. Predikovanje vrednosti, zvanom na prethodnoj definisanoj bazi podataka, predstavlja modele mašinskog učenja veoma zanimljivim i privlačim u oblasti istraživanja (Sarker, 2021).

Druga tehnika - duboko učenje (*eng. Deep Learning*) predstavlja podskup oblasti mašinskog učenja gde se koriste neuronske mreže sa više slojeva kako bi se obradila grupa podataka. (Sarker, 2021). Duboko učenje je postalo izuzetno popularno i moćno za rešavanje problema kao što su prepoznavanje slika, obrada podataka, planiranje i raspoređivanje resursa u proizvodnom procesu, itd.

Akashah i saradnici (Akashah i sar., 2024) predstavili su pregled literature o primeni metoda mašinskog učenja, analizirajući ključne tehnike koje su se pokazale dominantnim u istraživanjima. Prema analizi, većina pristupa koristi algoritam slučajne šume (*eng. Random Forest*), dok su tehnike dubokog učenja takođe značajno zastupljene, obuhvatajući 94% analiziranih radova. Ova studija naglašava sklonost prema ovim tehnikama u različitim primenama mašinskog učenja i njihovu efikasnost u rešavanju složenih problema.

Autori Yamashir i Nonaka u radu (Yamashir i Nonaka, 2021) istraživali su procenu vremena obrade poslova koristeći modele mašinskog učenja, oslanjajući se na stvarne podatke iz proizvodnog procesa. U cilju rešavanja ovog problema, autori su primenili algoritme koji pripadaju različitim kategorijama modela mašinskog učenja, poput regresije, veštačke inteligencije i modela zasnovanih na stablu odluke: (*Ridge regression, Gamma, Multiple regression, Artificial neural network, Gaussian process, Kernel Density Estimation - KDE, Light Gradient Boosting Machine - LightGBM*). Kao optimalan algoritam ili model mašinskog učenja pokazao se LightGBM. Optimalan raspored poslova i ukupno vreme ciljne funkcije nakon primene ovog modela smanjeno je za oko 30%.

Pravin i saradnici (Pravin i sar., 2022) istraživali su primenu hiperparametara u rešavanju problema planiranja i raspoređivanja poslova, s posebnim fokusom na minimizaciju ukupnog stohastičkog vremena obrade. U okviru istraživanja analizirane su različite tehnike optimizacije hiperparametara, među kojima su bile: Bajesova optimizacija (*eng. Bayesian optimization*), pretraga mreže (*eng. Grid search*) i slučajna pretraga (*eng. Random search*). Sličan pristup istraživali su i Hu i saradnici (Hu i sar., 2023) koji su predložili tehniku dubokog učenja za

integrisano planiranje proizvodnje. Njihov cilj bio je unapređenje validnosti i tačnosti modela kroz prilagođavanje hiperparametara i primenu naprednih strategija optimizacije.

Amin i saradnici (Amin i sar., 2024) sprovedi su analizu različitih tipova algoritama mašinskog učenja, uključujući njihove napredne oblike, poput dubokog učenja i algoritama transfernog učenja (*eng. transfer learning*). U radu su predstavljeni ključni izazovi i ograničenja inteligentnih kontrolnih sistema koji su identifikovani prethodnim pregledom literature, pri čemu su ponuđeni inovativni pristupi i rešenja. Poseban akcenat stavljen je na primenu ovih metoda u rešavanju složenih industrijskih problema, naglašavajući njihovu efikasnost i potencijal za unapređenje industrijskih procesa.

Zhang i saradnici (Zhang i sar., 2023) istraživali su kombinaciju dva pristupa za raspoređivanje resursa (GA-DQN), koji integrišu globalne pretraživačke sposobnosti genetskog algoritma i pristup dubokog učenja (*eng. Deep Q-Network - DQN*). Predložena metoda, nazvana GA-DQN, optimizuje raspoređivanje radnih tokova u realnom vremenu minimiziranjem troškova izvršenja i ukupnog vremena, dok istovremeno obezbeđuje visok nivo uspešnosti u dinamičnim uslovima rada. Rezultati eksperimentalnih istraživanja pokazuju da GA-DQN nadmašuje tradicionalne metode u pogledu performansi i to u različitim uslovima optimizacije.

Liu i saradnici (Liu i sar., 2021) istraživali su problem stohastičkog raspoređivanja na paralelnim mašinama, pri čemu su vremena dolaska i vremena obrade poslova neizvesni. Problem je modeliran kao dvostepeni stohastički program: u prvom koraku poslovi se dodeljuju mašinama pre realizacije neizvesnih parametara, dok se u drugom koraku generiše raspored na osnovu poznatih vrednosti parametara. Za rešavanje ovog problema planiranja korišćena je metoda prosečne aproksimacije uzoraka i pristup baziran na redukciji stohastičkog modela. Numerički rezultati pokazuju da pristup zasnovan na redukciji mogućih rešenja nadmašuje metodu prosečne aproksimacije u pogledu kvaliteta rešenja i vremena potrebnog za izvršenje svih poslova na setu mašina.

Su i saradnici (Sui i sar., 2022) istraživali su problem raspoređivanja poslova na identičnim paralelnim mašinama, s fokusom na minimizaciju najdužeg vremena čekanja hitnog posla u situacijama kada su vremena obrade redovnih poslova neizvesna. Osnovni cilj predloženog modela je smanjenje maksimalne razlike između vremena dva uzastopna posla (*eng. inter-completion time*) kako bi se omogućio pravovremeni odgovor na hitne poslove u najgorem mogućem slučaju. Rad predstavlja prvi pokušaj rešavanja ovog specifičnog problema u stohastičkom okruženju.

Chang i saradnici (Chang i sar., 2019) istraživali su problem raspoređivanja na identičnim paralelnim mašinama u uslovima neizvesnih vremena obrade. U okviru istraživanja razvili su

min-max model za minimizaciju maksimalnog očekivanog ukupnog vremena protoka poslova, koristeći ograničene informacije o parametrima neizvesnosti, kao što su interval poverenja, srednja vrednost i varijansa. Model je definisan kao optimizacioni problem drugog reda sa kvadratnim ograničenjima, što omogućava efikasnije rešavanje. Rezultati pokazuju visoku efikasnost predloženog modela i njegovu sposobnost da unapredi robusnost sistema u različitim scenarijima neizvesnosti.

Stanković i saradnici (Stanković i sar., 2022) istraživali su primenu ANFIS sistema (*eng. Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System*) za odabir optimalnog algoritma: ABC, PSO i GA za optimizaciju proizvodnih procesa. Rezultati pokazuju da je produktivnost u proizvodnji povećana za 14.5%, što potvrđuje efikasnost ANFIS sistema i opravdava izbor GA za dalju optimizaciju. Ova kombinacija metodologija omogućava značajna poboljšanja u performansama proizvodnih sistema.

Bergstra i saradnici (Bergstra i sar., 2011) analizirali su performanse metode slučajnog pretraživanja i metode pretrage mreže za optimizaciju hiperparametara. U sprovedenim eksperimentima, oba pristupa postigla su rezultat sa greškom od 13%, dok algoritam *Gaussian processes* imao je nešto veću grešku od 16,7%. S druge strane, model zasnovan na algoritmu TPE (*eng. Tree-structured Parzen Estimator*) nadmašio je algoritam slučajnog pretraživanja za (19%) i metodu pretrage mreže za (17%), što potvrđuje njegovu superiornost u optimizaciji.

Teerasoponpong i saradnici (Teerasoponpong i sar., 2021) istraživali su kombinaciju veštačkih neuronskih mreža i GA za optimizaciju rasporeda proizvodnih resursa u MSP. GA koristi predikovane rezultate veštačkih neuronskih mreža za pretragu optimalnih rasporeda resursa. Rezultati pokazuju uspešnost ovog pristupa, naglašavajući njegov potencijal za unapređenje proizvodnih procesa u MSP okruženju.

Ali i saradnici (Ali i sar., 2023) istraživali su primenu metode potpornih vektora (*eng. Support Vector Machine - SVM*) uz korišćenje četiri različita optimizaciona algoritma: ACO, GA, algoritam optimizacije kitova (*eng. Whale Optimization Algorithm - WOA*) i PSO. Rezultati pokazuju da GA ima najbolje rezultate u poređenju sa ostalim algoritmima, čineći ga efikasnijim za optimizaciju proizvodnih resursa. Ova studija ističe prednosti GA u smanjenju vremena računanja pri integraciji sa SVM modelom.

Tremblet i saradnici (Tremblet i sar., 2022) predstavili su studiju koja se bavi istraživanjem uticaja modela mašinskog učenja na primenu u proizvodnim procesima. U radu se ističe da planovi proizvodnje često ne mogu da se održe, jer su izrađeni bez uzimanja u obzir svih detaljnih zahteva koji nastaju na nivou planiranja. Autori argumentuju da

implementacija modela mašinskog učenja u proizvodne procese omogućava preciznije predviđanje izvodljivosti plana proizvodnje. Konkretno, njihova analiza pokazuje da predviđanje zasnovano na stabilnim odlukama ostvaruje preciznost od oko 90%, što je značajno više u poređenju sa tradicionalnim pristupima koji se oslanjaju na klasična ograničenja kapaciteta i postižu preciznost od oko 70%. Ova studija naglašava prednosti integracije modela mašinskog učenja u alate za planiranje i donošenje odluka u proizvodnim procesima.

Li i Chen (Li i Chen, 2023) istraživali su problem planiranja fleksibilnog rasporeda poslova uzimajući u obzir otkaze mašina i predlažu digitalnu strategiju planiranja sa dvostrukim pogonom. Rezultati pokazuju da ova strategija poboljšava stabilnost i efikasnost planiranja, dok efekat učenja radnika značajno doprinosi proizvodnoj efikasnosti. Autori zaključuju da preduzeća treba da posvete veću pažnju obuci radnika za unapređenje profesionalnih veština i da minimizuju nepotrebne prekide u obradi.

2.1.4 Pregled dosadašnjih istraživanja - primena metoda simulacija

Simulacija se odnosi na stvaranje virtuelnog okruženja koje omogućava modeliranje i analizu realnih procesa u proizvodnim sistemima. Ovaj proces uključuje simulaciju stvarnih problema i izvođenje eksperimenata koji omogućavaju analizu stanja i ponašanja sistema. Jedna od glavnih prednosti simulacionog okruženja je mogućnost predviđanja toka proizvodnog procesa unapred, čime se omogućava njegovo bolje planiranje i optimizacija. Simulacija pruža različite podatke koji se mogu koristiti u različite svrhe, u zavisnosti od definisanih ciljeva. Softveri za simulaciju postali su ključni alati u definisanju realnih procesa u proizvodnim okruženjima. Softveri koje se danas najčešće koriste su: *Arena*, *AutoMOD*, *FlexSim*, *Asprova*, *DELMIA Ortems*. Planiranje zasnovano na simulaciji ima veliku primenu u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa, a kao krajnji izlaz dobija se vizuelni prikaz detaljnog plana proizvodnog procesa.

Reddi i Rao (Reddy i Rao, 2011) predstavili su sveobuhvatan model za simulaciju fleksibilnih proizvodnih sistema koristeći *AutoMOD*, softver specijalizovan za simulaciju proizvodnih procesa. Studija se fokusira na modeliranje fleksibilnih sistema i procenu performansi putem simulacije. Autori demonstriraju kako *AutoMOD* efikasno prikazuje dinamiku proizvodnih sistema, omogućavajući analizu ponašanja sistema u različitim scenarijima i uslovima rada.

Kumar i Bisoniya (Kumar i Bisoniya, 2015) istraživali su proces optimizacije performansi fleksibilnih proizvodnih sistema koristeći *Arena* softver za simulaciju problema planiranja i raspoređivanja resusa. U radu se detaljno opisuje metodologija za kreiranje

simulacionog modela, uključujući definisanje parametara sistema i izvođenje procesa optimizacije. Rezultati istraživanja potvrđuju efikasnost primene *Arena* softvera u unapređenju preciznosti modeliranja i performansi proizvodnih sistema, omogućavajući detaljniju analizu, pouzdaniju procenu i optimizaciju proizvodnih procesa. Ovi nalazi potvrđuju značaj simulacije kao alata za poboljšanje operativne efikasnosti u fleksibilnim proizvodnim okruženjima.

Thenarasu i saradnici (Thenarasu i sar., 2022) predložili su simulacioni pristup za definisanje kriterijuma i odabir dispečerskih pravila u rešavanju problema planiranja i raspoređivanja resursa. U prvom delu rada primenjuje se višekriterijumsko odlučivanje za određivanje prioriteta poslova, dok se u drugom delu koristi kombinacija hibridnih dispečerskih pravila. Simulacioni model diskretnih događaja razvijen je korišćenjem *Arena* softvera, pri čemu je ključni cilj simulacionog okruženja razvoj fleksibilnog modela koji se prilagođava različitim ulaznim parametrima. Eksperimentalni rezultati potvrđuju efikasnost predložene metodologije u poređenju sa klasičnim dispečerskim pravilima, ukazujući na značaj unapređenja kroz simulaciju.

Tiacci i Rossi u radu (Tiacci i Rossi, 2024) analiziraju ograničenja savremenih tehnika raspoređivanja i predstavljaju numerički eksperiment koji ukazuje na njihovu neefikasnost. Kako bi naučnoj zajednici pružili alat za simulaciju u kombinaciji sa tehnikama dubokog učenja, autori su razvili simulator diskretnih događaja zasnovan na agentima. Rezultati pokazuju da pravilo najkraćeg vremena obrade (*eng. Shortest Processing Time - SPT*) u 100% slučajeva nadmašuje pristupe dubokog učenja, sa verovatnoćom većom od 95%, često dovodeći do znatno nižih ukupnih kašnjenja. U 71 od 135 slučajeva, SPT pravilo postiže nulto kašnjenje, što nije zabeleženo kod metoda dubokog učenja u ovom kontekstu.

2.1.5 Pregled dosadašnjih istraživanja - primena operativnih metoda

Operativne metode koje se najčešće koriste za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa su: Kanban metoda (*eng. Kanban - KM*), Sistem za kontrolu toka posla u proizvodnji (*eng. Paired-cell Overlapping Loops of Cards with Authorization - POLCA*) i Kontrola radnog opterećenja (*eng. Work Load Control – WLC*).

Kanban metoda se koriste za unapređenje produktivnosti i optimizaciju protoka proizvoda kroz proizvodni sistem. Na kraju svakog ciklusa, KM identifikuje i eliminiše potencijalne pretnje koje mogu ugroziti stabilnost proizvodnog procesa. Kao sistem, KM omogućava kontrolu i upravljanje poslova i materijala (resursa) kroz niz višestrukih optimizacionih procesa, što doprinosi efikasnijem upravljanju proizvodnim kapacitetima. U

kontekstu planiranja i raspoređivanja resursa, KM poboljšava vidljivost stanja zaliha i toka resursa, smanjuje vreme čekanja i značajno povećava ukupnu efikasnost sistema (Ohno, 1978), (Liker, 2004). Ova metoda omogućava kontinualnu kontrolu proizvodnih procesa kroz bolje upravljanje resursima i brzu reakciju na promene u proizvodnom okruženju.

Aytug i saradnici (Aytug i sar., 1999) analiziraju raspoređivanje poslova koristeći osnovna pravila sekvenciranja. U svom istraživanju autori su razvili KM model kako bi identifikovali optimalnu kombinaciju pravila za sekvenciranje. Rezultati pokazuju da kombinacijom pravila "najkraće vreme obrade" i "najmanja količina" dobijaju se najbolje performanse u sistemu, doprinoseći efikasnost i pouzdanost procesa.

Adnan i saradnici u radu (Adnan i sar., 2013) istražuju implementaciju KM u lokalnoj kompaniji za proizvodnju autokomponenti u Maleziji, s posebnim fokusom na proces montaže. Autori navode da je primena KM doprinela smanjenju vremena isporuke, minimizaciji zaliha i optimizaciji skladišnog prostora. Cilj studije je demonstracija načina kako KM poboljšava efikasnost proizvodnog sistema i podržava implementaciju *Just In Time* sistema, čime se povećava ukupna produktivnost i efektivnost poslovanja.

Sistem za kontrolu toka poslova u proizvodnji predstavlja metodu upravljanja proizvodnjom, posebno osmišljenu za kontrolu proizvodnih procesa u uslovima promenljivih zahteva i ograničenih resursa. Ova metoda fokusira se na optimizaciju tokova i smanjenje zaliha između radnih centara, čime doprinosi efikasnijem korišćenju resursa i smanjenju zastoja (Suri, 2018), (Fernandes i sar., 2020). POLCA sistem se često primenjuje u kompanijama sa širokim asortimanom proizvoda, gde fleksibilnost i prilagodljivost igraju ključnu ulogu. Metodu je razvio američki naučnik Rajan Suri 1998. godine (Suri, 1998) kao odgovor na izazove upravljanja proizvodnjom u kompleksnim proizvodnim okruženjima.

Chong i saradnici (Chong i sar., 2015) istraživali su primenu POLCA metode u kompanijama sa širokim asortimanom proizvoda. U situacijama gde tradicionalni KM sistemi ne zadovoljavaju u potpunosti potrebe preduzeća, predlaže se primena POLCA metode kao alternativno rešenje. Studija se fokusira na kompaniju specijalizovanu za proizvodnju preciznih komponenti, alata i kalupa, čije je kompleksno proizvodno okruženje klasifikovano kao sistem sa višestrukim poslovima. Rezultati poređenja pokazuju da POLCA metoda nadmašuje postojeće pristupe u kompaniji, pružajući efikasnije upravljanje materijalima i optimizaciju tokova u složenim proizvodnim uslovima.

Kontrola radnog opterećenja predstavlja metodologiju koja se koristi za efikasno usklađivanje između dostupnih kapaciteta i proizvodnih zahteva. Ovaj pristup omogućava planiranje i praćenje rada u realnom vremenu, uz istovremeno upravljanje resursima kako bi se

izbegli problemi poput preopterećenosti sistema ili nedovoljnih kapaciteta. Primena WLC metode doprinosi postizanju stabilnosti i optimizaciji proizvodnih procesa, posebno u dinamičnim i kompleksnim proizvodnim okruženjima (Firat i sar., 2022), (Hendry i sar., 2008).

Henrich (Henrich, 2005), u radu koji se bavi aspektima primenljivosti upravljanja radnim opterećenjem u proizvodnim okruženjima, detaljno analizira sve relevantne aspekte i metode kontrole radnog opterećenja. Autor pruža detaljan opis ove metode, naglašavajući njenu osnovnu namenu i pogodnost za MSP, posebno u uobičajenim proizvodnim okruženjima. Kako autor ističe, realizacija širokog asortimana narudžbina često zahteva primenu mašina opšte namene, koje su organizovane u funkcionalne jedinice. Narudžbine se ne šalju odmah u proizvodni sistem, već se privremeno skladište u namenskim delovima sistema dok se ne steknu optimalni uslovi za njihovu obradu. WLC metoda se pokazala kao izuzetno primenljiva metoda u kontekstu proizvodnih sistema, s posebnim naglaskom na njenu efikasnost u rešavanju problema planiranja i raspoređivanja resursa.

Thürer i saradnici (Thürer i sar., 2012) istraživali su primenu WLC metode u montažnim radionicama. Ova metoda, prepoznata kao koncept planiranja i kontrole proizvodnje, razvijena je kako bi zadovoljila specifične potrebe MSP koja se bave proizvodnjom po narudžbini. Ključni razlog primene WLC metode leži u njenoj sposobnosti da odgovori na izazove složenih struktura proizvoda i proizvodnje podsklopova, kao i u ograničenjima tradicionalnih simulacionih modela koji ne mogu obuhvatiti sve procese. Na osnovu rezultata istraživanja, zaključeno je da WLC metoda može značajno poboljšati performanse u upravljanju i organizaciji radnih mesta za montažu. Autori naglašavaju da buduća istraživanja treba da se fokusiraju na identifikaciju i otklanjanje postojećih nedostataka sistema, kako bi se dodatno unapredile karakteristike i performanse budućih implementacija.

2.2 KVANTATIVNA ANALIZA NAUČNIH RADOVA NA OSNOVU PRETRAGE LITERATURE, KLJUČNIH REČI I GODINE PUBLIKOVANJA

Kvantitativna analiza naučnih radova sprovedena je identifikacijom najvažnijih ključnih reči unutar istraživačkog područja, u skladu sa oblašću istraživanja i temom doktorske disertacije. Iz naučno-istraživačke literature i prethodnog iskustva u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa, izdvojene su ključne reči koje su korišćene za pretraživanje i prikupljanje relevantnih podataka. Važno je napomenuti da je literatura gotovo u potpunosti dostupna na engleskom jeziku, što je takođe uticalo na izbor ključnih

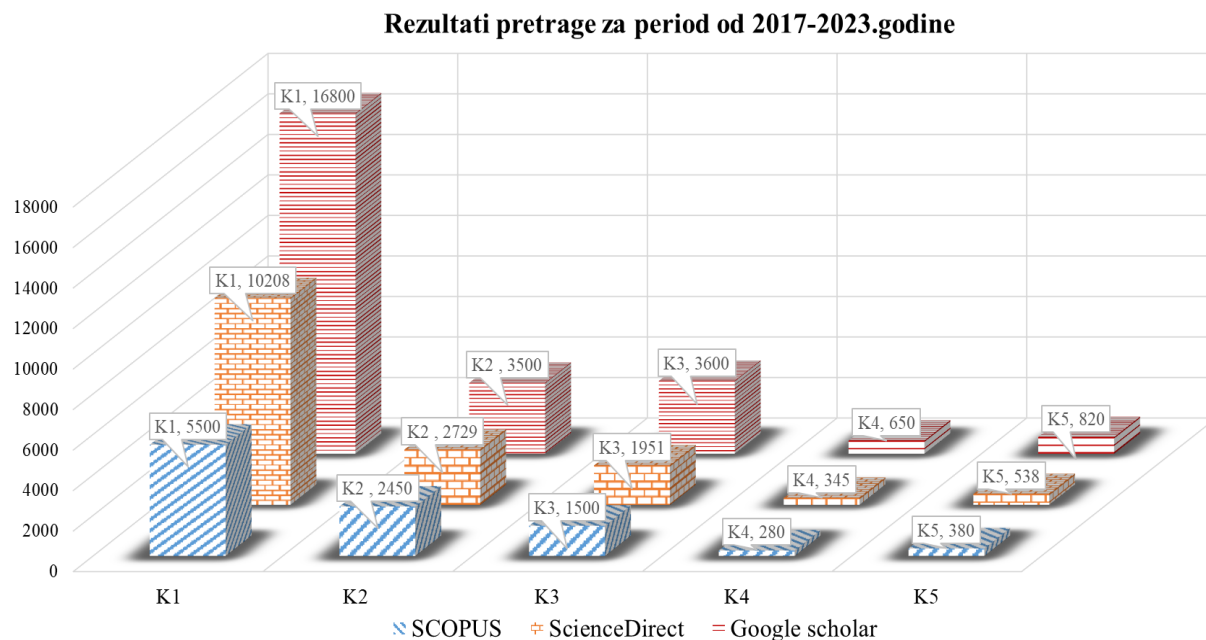
reči: K₁ - planiranje i raspoređivanje resursa (*eng. planning and scheduling resource*), K₂ - planiranje i raspoređivanje proizvodnih resursa (*eng. manufacturing planning and scheduling resource*), K₃ - planiranje i raspoređivanje resursa u malim i srednjim preduzećima u uslovima neizvesnosti (*eng. planning and scheduling of resources in small and medium-sized enterprises in conditions of uncertainty*), K₄- podrška malim i srednjim preduzećima u uslovima neizvesnosti (*eng. support for small and medium enterprises in conditions of uncertainty*), K₅ – fleksibilno raspoređivanje poslova u uslovima neizvesnosti (*eng. flexible job shop scheduling problem with stochastic processing times*). Za pretragu i prikupljanje svih potrebnih podataka korišćene su sledeće baze podataka: SCOPUS, ScienceDirect i Google Scholar. U tabeli 2.1 prikazan je deo rezultata pretrage ključnih reči u relevantnim časopisima. Osnovni cilj kvantitativne analize je identifikacija relevantnijih časopisa koji obrađuju temu istraživanja ove doktorske disertacije.

Tabela 2.1 Relevantni časopisi na osnovu ključnih reči za period od 2017 – 2023.

Naziv časopisa i ukupan broj naučnih radova iz oblasti istraživanja	
<i>Computers & Industrial Engineering</i>	256
<i>Expert Systems with Applications</i>	197
<i>Journal of Cleaner Production</i>	240
<i>Applied Energy</i>	203
<i>Future Generation Computer Systems</i>	179
<i>European Journal of Operational Research</i>	179
<i>Energy</i>	245
<i>Computers & Industrial Engineering</i>	256
<i>Journal of Cleaner Production</i>	270
<i>Procedia Manufacturing</i>	59
<i>Journal of Manufacturing Systems</i>	34
<i>Journal of Systems and Software</i>	45
<i>Computers & Operations Research</i>	28
<i>International Journal of Production Economics</i>	25
...	...
<i>Engineering Applications of Artificial Intelligence</i>	5

Na slici 2.2 predstavljen je grafički prikaz rezultata pretrage zasnovane na ključnim rečima, za period od 2017. do 2023. godine. Važno je napomenuti da pretragom naučnih radova

na osnovu ključnih reči dolazi do značajnog procenta poklapanja rezultata, tako da rezultate ne treba posmatrati kumulativno.



Slika 2.2 Grafički prikaz dobijenih rezultata za period od 2017 – 2023. godine

Analizom dosadašnjeg pregleda istraživanja i primenjenih naučnih metoda u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa napravljen je kritički osvrt i izdvojeni su mogući pravci istraživanja. Kritički osvrt na pregled literature i primenjenih naučnih metoda omogućava identifikaciju nedostataka u postojećim pristupima, dok analiza pruža detaljan uvid u trenutno stanje istraživanja i primenjenih metoda, čime se postavlja osnova za dalji razvoj u ovoj oblasti.

2.3 KRITIČKI OSVRT I PRAVCI ISTRAŽIVANJA

Kritički osvrt i detaljna analiza dosadašnjih istraživanja u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa predstavljaju ključni faktor u definisanju budućih pravaca istraživanja. Ovi pravci direktno proizilaze iz pregleda naučnih radova u odabranoj oblasti, omogućavajući identifikaciju postojećih trendova, metoda i praznina u istraživanju. Sveobuhvatni pregled literature dosadašnjih istraživanja ukazuje na značajan napredak u ovoj oblasti, posebno u pogledu razvoja i primene različitih metodoloških pristupa. Napredak tehnologije, posebno u poslednjih nekoliko godina, istakao je veliki potencijal veštačke inteligencije, koja se sve više prepoznaje kao ključni faktor u unapređenju istraživanja u ovoj oblasti. Razvoj veštačke inteligencije ne samo da pruža alate za rešavanje postojećih problema, već otvara i potpuno nove pravce istraživanja. Ovi pravci su od posebnog značaja

za ovu doktorsku disertaciju, jer omogućavaju inovativne pristupe u modeliranju i optimizaciji procesa. Jedna od osnovnih hipoteza disertacije jeste da postoji značajan prostor za dalji razvoj novih pristupa i modela u rešavanju problema planiranja i raspoređivanja resursa u proizvodnim procesima. Ova hipoteza naglašava potrebu za kontinuiranim istraživanjem i usavršavanjem metodologija kako bi se odgovorilo na sve složenije izazove savremene industrije.

U nastavku, izdvojeni su ključni pravci istraživanja koji oblikuju osnovu ove doktorske disertacije. Cilj je identifikovati ključne pravce koji doprinose daljem unapređenju ove oblasti, kao i prepoznati izazove i ograničenja postojećih studija. Time se postavlja čvrst okvir za razvoj novih i inovativnih pristupa, otvarajući mogućnosti za efikasnije i naprednije metode rešavanja relevantnih problema.

Pravac 1. Jedan od osnovnih i početnih pravaca istraživanja u okviru doktorskse disertacije je identifikacija ključnih problema i izazova sa kojima se MSP u Republici Srbiji suočavaju u procesu upravljanja resursima. Analizom trenutnog stanja i identifikacijom ključnih problema sa kojima se MSP u Republici Srbiji suočavaju, utvrđeni su glavni uzroci neadekvatnog upravljanja proizvodnim resursima.

Ovi uzroci su utvrđeni na osnovu sprovedenih istraživanja, uključujući anketna istraživanja i pregled literature u ovoj oblasti i obuhvataju:

- Upravljanje proizvodnjom obavlja se metodama ručnog planiranja koja se oslanjaju na iskustva radnika. Ovakav pristup nije efikasan, sklon je ljudskim greškama i ograničava mogućnost napredka. Takođe, jedan od potencijalnih problema je postojanje mogućnosti odlaska radnika sa iskustvom iz kompanije, što dodatno komplikuje efikasno upravljanje resursima i onemogućava optimalno planiranje proizvodnih procesa;
- Nedostatak znanja u oblasti naprednih tehnologija i generalno stručnosti takođe je jedan od izazova sa kojim se susreću MSP. Čak 88% preduzeća smatra da bi dodatna edukacija o primeni naprednih metoda u proces proizvodnje bila korisna za njihove inženjere;
- Nedovoljna primena optimizacionih metoda i nedovoljna svest o prednostima koje nudi veštačka inteligencija predstavlja jedan od ključnih izazova za dalji razvoj i implementaciju novih pristupa u proces proizvodnje;
- Visoki troškovi nabavke gotovih softverskih rešenja koja se nude na tržištu i neadekvatna infrastruktura za implementaciju takvih rešenja predstavljaju značajan izazov. Kao rešenje predlaže se razvoj fleksibilnih optimizacionih modela koji su direktno usmereni i prilagođeni potrebama MSP.

Pravac 2. Na osnovu sprovedenih istraživanja metode koje se najčešće pominju i primenjuju u oblasti planiranja i raspoređivanja resusa su: egzakne metode, metaheurističke metode, metode veštačke inteligencije i simulacione metode. Sve ukazuje na to da nisu u dovoljnoj meri ispraćeni noviji tehnološki trendovi, pre svega u oblasti primene alata veštačke inteligencije. Nedovoljna integracija novih pristupa kao i kombinacija više metoda u jedan hibridni sistem planiranja ukazuje na to da ima još uvek prostora za unapređenje metodološkog pristupa planiranju proizvodnih procesa. Jedna od bitnih stavki je i nedovoljna implementacija fazi logike u modelima planiranja kao i simulacija proizvodnih procesa pre implementacije razvijenih modela u procese proizvodnje.

Takođe, nedostaci uključuju i činjenicu da današnja istraživanja ne uzimaju u obzir sve faktore koji direktno ili inderiktno utiču na proces proizvodnje što predstavlja veliki problem pri implementaciji ovakvih modela u realne proizvodne procese. Implementacija alata veštačke inteligencije u razvijene modele planiranja otvara nove pravce istraživanja, pri čemu se povećava složenost modela, ali istovremeno značajno unapređuju njihova efikasnost i produktivnost. Ovaj pristup omogućava oponašanje realnog stanja u proizvodnim procesima, što doprinosi preciznijem planiranju i optimizaciji resursa. Metode veštačke inteligencije igraju ključnu ulogu u ovoj doktorskoj disertaciji, jer predstavljaju osnov za kreiranje inovativnih i prilagodljivih modela planiranja. Njihova primena omogućava rešavanje kompleksnih problema u dinamičnim proizvodnim okruženjima, čime se unapređuju performanse sistema i doprinosi povećanju konkurentnosti u savremenoj industriji. **Prema svemu ovom, drugi pravac se odnosi na proučavanje i selekciju metoda neophodnih za koncipiranje i razvoj optimizacionog modela za upravljanje resursima u proizvodnim okruženjima.**

Pravac 3. Analizom dosadašnjih istraživanja takođe je utvrđeno da je nedovoljna pažnja posvećena razvoju stohastičkih modela. U većini slučajeva do sada poznati pristupi usmereni su na modele sa determinističkim zahtevima. Ovi modeli koriste fiksna vremena obrade poslova na mašinama. Osnovni nedostatak i ograničenje ovakvog pristupa jeste u tome što optimizacija proizvodnog procesa, zasnovana na takvim modelima, rezultira vremenskom funkcijom cilja koja može pokazivati značajna odstupanja u odnosu na realno stanje proizvodnog procesa. Uvođenjem alata teorije verovatnoće i fazi alata u model planiranja omogućava se integracija perioda neizvesnosti događaja, čime se povećava verovatnoća tačnog predikovanja funkcije cilja. Ovakvim pristupom ostvaruje se veća efikasnost proizvodnog procesa, uz istovremeno smanjenje odstupanja modela od stvarnih uslova proizvodnje. Navedeni pristup doprinosi kreiranju fleksibilnijih i preciznijih modela

koji su prilagođeni dinamičnoj prirodi savremenih proizvodnih sistema. **Treći pravac istraživanja u doktorskoj disertaciji odnosi se na razvoj modela za optimalno planiranje i raspoređivanje resursa u MSP u uslovima neizvesnosti.**

Pravac 4. Potencijalni istraživački prostor prepoznaje se u samoj primeni i implementaciji više različitih metoda u jedan sistem planiranja što može dodatno da dovede do poboljšanja postojećih modela planiranja. U doktorskoj disertaciji prikazani su različiti pristupi, kao i implemetacija novih naučnih metoda kroz nekoliko faza, što predstavlja hibridni pristup koji će omogućiti realno sagledavanje procesa proizvodnje. Integracija modela mašinskog učenja u procese planiranja predstavlja perspektivan pravac istraživanja sa značajnim potencijalom za unapređenje preciznosti i efikasnosti u predviđanju ključnih funkcija cilja i optimizaciji proizvodnih procesa.

Ovaj pristup omogućava dublju analizu uticaja ulaznih parametara na izlazne vrednosti, sa fokusom na ključne metrike kao što je ukupno vreme funkcije cilja, koje predstavlja vreme potrebno za realizaciju svih operacija unutar proizvodnog sistema. Jedan od ključnih aspekata ovog pravca istraživanja jeste razvoj baza podataka na osnovu optimizacija sprovedenih primenom alternativnih algoritama, poput metaheurističkih metoda. Ove baze podataka zatim služe kao preduslov za obuku modela mašinskog učenja, omogućavajući predikciju funkcije cilja bez potrebe za ponovnim sprovođenjem kompleksnih optimizacijskih procesa. Takva metodologija ne samo da smanjuje vremenske i računarske zahteve, već otvara nove mogućnosti za brže i preciznije donošenje odluka u industrijskim aplikacijama. Dalje istraživanje u ovom pravcu može doprineti razvoju novih hibridnih metoda koje kombinuju prednosti optimizacije i mašinskog učenja, pružajući time alate za unapređenje složenih procesa planiranja i optimizacije. **Četvrti pravac istraživanja biće razvoj samog računarskog modela koji ima za cilj implamentaciju više naučnih pristupa u jedan sistem planiranja, čilja je osnovna namena povećanje produktivnosti proizvodnje.**

Pravac 5. Kako bi se proces upravljanja resursima pojednostavio i izazovi sveli na minimum, predlaže se razvoj softverske aplikacije koja bi značajno unapredila proces planiranja poslova u proizvodnim sistemima, posebno u MSP. Glavni cilj ove aplikacije je unapređenje procesa planiranja u MSP kroz primenu naprednih računarskih modela i algoritama optimizacije. Ova aplikacija bi omogućila efikasnije upravljanje resursima, smanjenje vremena potrebnog za donošenje odluka i povećanje produktivnosti proizvodnih sistema, pružajući korisnicima fleksibilne alate za rešavanje kompleksnih izazova u savremenom industrijskom okruženju. **Dakle, peti pravac istraživanja je razvoj softverske**

aplikacije koja omogućava da se složeni algoritmi i računarski modeli pretoče u intuitivne, korisnički pristupačne interfejse koji omogućavaju menadžerima i planerima proizvodnje da lako unose podatke, pokreću optimizacione procese i analiziraju rezultate bez potrebe za dubokim tehničkim znanjem.

Poglavlje 3

UPRAVLJANJE RESURSIMA – DEFINISANJE PROBLEMA

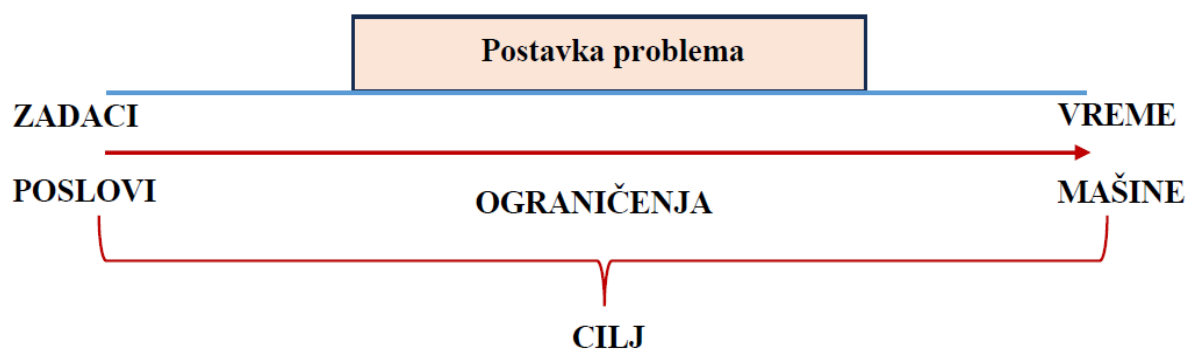
U trećem poglavlju doktorske disertacije definisan je problem i potrebna notacija za razvoj modela i upravljanje resursima u uslovima neizvesnosti. Upravljanje resursima predstavlja ključnu oblast istraživanja koja obuhvata optimizaciju industrijskih procesa, upravljanje proizvodnjom i raspoređivanje resursa. U kontekstu proizvodnih sistema, ključni resursi koji se raspoređuju uključuju ulazne sirovine, poslove, mašine i radnu snagu, pri čemu njihova optimizacija ima direktan uticaj na finansijske aspekte i vremenske performanse proizvodnje. Osnovni cilj ovog pristupa jeste efikasno planiranje i raspoređivanje resursa kako bi se postigla maksimalna produktivnost uz minimizaciju potrebnog vremena i troškova. Definisanje problema upravljanja resursima uključuje identifikaciju i modeliranje svih relevantnih unutrašnjih i spoljašnjih parametara koji utiču na donošenje odluka. Ključni elementi koji oblikuju proces upravljanja resursima uključuju: tip resursa, definisanje ciljeva posmatranog preduzeća, identifikaciju ograničenja modela, analizu promenljivih koje utiču na proizvodne procese, razmatranje perioda neizvesnosti i rizika, kao i određivanje izlaznih funkcija sistema. Upravljanje proizvodnjom uključuje planiranje i raspoređivanje resursa kroz sve faze procesa, od ulaznih sirovina do finalnog proizvoda (Tomić, 2016), (Mihajlović, 2016). Definisanje problema

upravljanja resursima često zahteva formalizaciju kroz matematičke modele. Ova formalizacija omogućava analizu različitih scenarija i donošenje pravovremenih odluka na osnovu optimizacije postavljenih ciljeva u okviru definisanih ograničenja. Na slici 3.1 prikazan je tok resursa koji obuhvata transformaciju ulaznih resursa ($j_1, j_2, \dots, j_n$), kao što su poslovi i operacije, kroz razvijene modele sve do izlaznih vrednosti u obliku detaljnog plana proizvodnje.



Slika 3.1 Grafički prikaz transformacije ulaznih resursa u proizvodne planove

Sledeći korak obuhvata detaljno predstavljanje i formalno definisanje problema istraživanja. Problem uključuje sistematično definisanje i opisivanje domena savremenog operativnog planiranja proizvodnje, uz identifikaciju ključnih potreba i mogućnosti za unapređenje procesa upravljanja resursima. Cilj ovog pristupa jeste povećanje efikasnosti upravljanja resursima što neposredno doprinosi jačanju konkurentnosti i poslovnog uspeha preduzeća. Pravilno definisanje problema predstavlja osnovu za implementaciju inovativnih rešenja i postizanje postavljenih ciljeva istraživanja. Na slici 3.2 prikazana je postavka problema, koja predstavlja prvi korak u razvoju računarskog modela za planiranje poslova.



Slika 3.2 Definisane komponente problema planiranja i raspoređivanja resursa

Na slici 3.2 su jasno prikazane ključne komponente kao i međusobna veza unutar definisanog problema. Kao što se može videti ključni resursi: zadaci, vreme, poslovi, mašine i ograničenja međusobno utiču na formulaciju ciljeva u okviru operativnog planiranja proizvodnje. Ograničenja predstavljaju sve faktore koji ograničavaju ili usmeravaju proces odlučivanja, uključujući kapacitete mašina, raspoloživost radne snage i vremenske rokove

izvršavanja poslova na setu mašina... Jasna identifikacija i formalizacija ovih ograničenja omogućava razvoj modela koji opisuje stvarne uslove u proizvodnim sistemima. Raspoređivanje u jednom proizvodnom okruženju obuhvata i uzima u obzir određeni broj poslova i broj dostupnih mašina. Prema notaciji svaki pojedinačni posao biće obeležen indeksom j , pri čemu je ukupan broj poslova n , ($j = 1, 2, \dots, n$), dok će svaka pojedinačna mašina biti označena indeksom k , a ukupan broj mašina sa m , ($k = 1, 2, \dots, m$). Svaki posao n može se sastojati iz većeg broja operacija, zbog čega je potrebno uvesti i indeks operacija i . Na taj način, može se definisati operacija i posla j na mašini k . Dodatno, može se definisati vreme obrade poslova na mašinama pt_{ijk} kao vremensko trajanje operacije i posla j na mašini k , kao i oznaka Ct_j koja predstavlja ukupno vreme završetka posla j na skupu mašina u proizvodnom okruženju. Uloga ovih oznaka je od suštinskog značaja za precizno modeliranje i optimizaciju procesa planiranja i raspoređivanja poslova u proizvodnom okruženju.

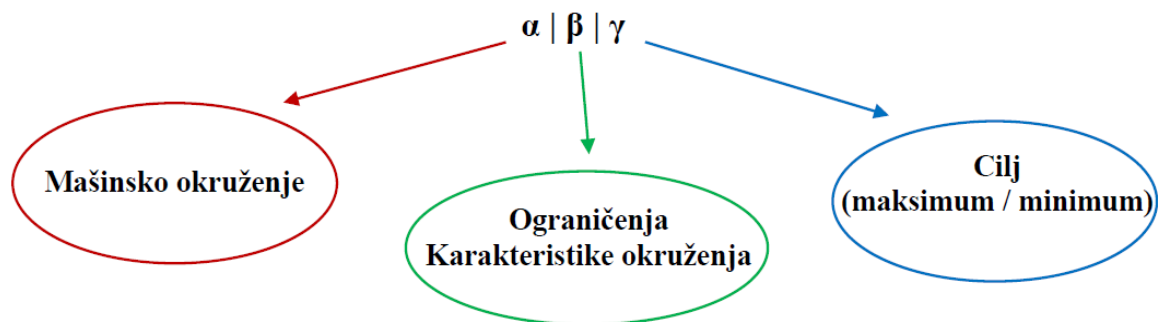
Osnovni cilj, koji predstavlja određivanje optimalnog rešenja koje obuhvata maksimizaciju produktivnost i minimizaciju troškova i vremena, definiše se kroz kompleksan zadatak međusobnog povezivanja poslova j i mašina k . U tom zadatku značajan broj veličina ima slučajni karakter, zbog čega je neophodno pri razvoju modela uključiti uslove neizvesnosti kao ograničenja u matematičkim modelima optimizacije, čime se obezbeđuje realno stanje proizvodnih procesa. U tom kontekstu, stohastički procesi, zasnovani na zakonima teorije verovatnoće, pružaju adekvatan okvir za modeliranje.

3.1 KLASIFIKACIJA PROBLEMA I DEFINISANJE NOTACIJE

Nakon predstavljanja svih komponenti definisanog problema, potrebno je uvesti preciznu klasifikaciju i notaciju, koja dalje omogućava adekvatno generisanje i predstavljanje matematičkog modela. Notacija obuhvata definisanje ključnih parametara, promenljivih i ograničenja, što omogućava standardizovan pristup analizi i optimizaciji modela. Definisanje notacije je ključno za efikasno upravljanje proizvodnim resursima, jer doprinosi boljem razumevanju modela, optimizaciji troškova i poboljšanju kvaliteta i povećanju produktivnosti (Perić, 2018).

Konfiguracija proizvodnog sistema može se definisati na osnovu predložene notacije (Pinedo, 1995, 2005, 2008) korišćenjem tri polja $\alpha \mid \beta \mid \gamma$, kao što je grafički prikazano na slici 3.3. Polje α predstavlja tip proizvodnog (mašinskog) okruženja. Polje β označava osnovne karakteristike poslova koje je potrebno uključiti u proces obrade, kao i ograničenja

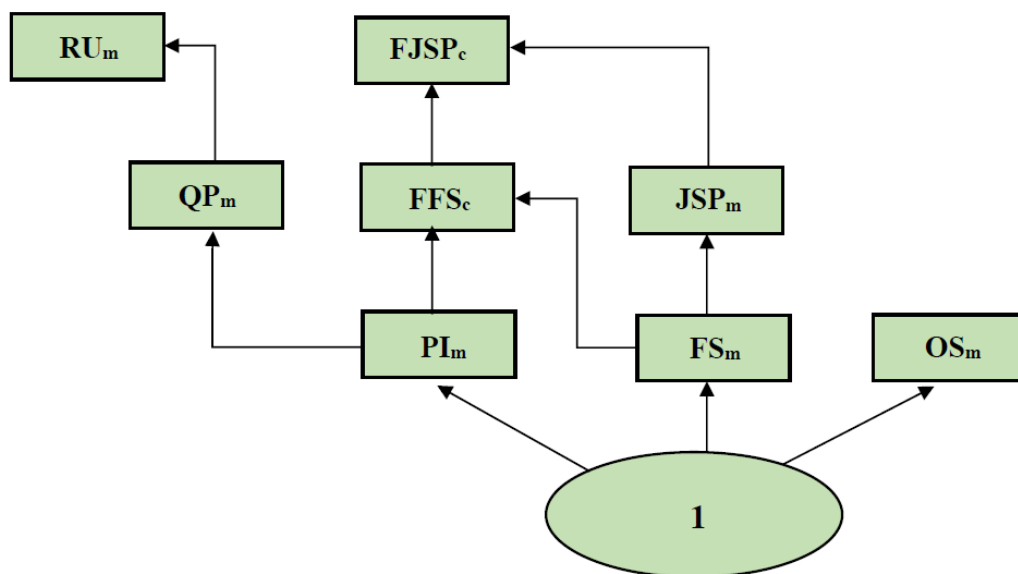
koja se moraju uzeti u obzir tokom optimizacije proizvodnog procesa. Polje γ predstavlja kriterijumsku funkciju cilja koju je potrebno dostići. Na osnovu predstavljene notacije u tri polja: α | β | γ može se zaključiti o kom modelu se radi.



Slika 3.3 Grafički prikaz konfiguracije proizvodnog sistema

3.1.1 Mašinsko okruženje i tipovi modela u skladu sa notacijom polja α

Modeli koji se koriste u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa zavise od specifičnog tipa proizvodnog procesa. Osnovni tipovi modela u proizvodnom okruženju mogu se podeliti na osnovu funkcije cilja i potreba okruženja. Moguća proizvodna okruženja koja se predstavljaju u prvom polju α prikazana su grafički na slici 3.4.



Slika 3.4. Mašinsko okruženje u prvom polju α

Model raspoređivanja poslova na pojedinačnoj mašini sa oznakom (S_m) potiče od engleske reči (*eng. Single Machine Model*) i predstavlja najjednostavniji tip modela, gde se raspoređivanje poslova vrši na jednoj dostupnoj mašini. Iako se radi o osnovnom modelu on ima značajnu praktičnu primenu čak i u složenijim proizvodnim sistemima, gde se često

koristi za raščlanjivanje složenih problema na podprobleme sa pojedinačnim mašinama. Ovakav problem raspoređivanja može se formalno definisati kao raspoređivanje n poslova na jednoj mašini.

Model identičnih paralelnih mašina, sa oznakom (PI_m), potiče od engleske reči (*eng. Identical Parallel Machine Model*) i predstavlja najjednostavniji tip modela paralelnog raspoređivanja poslova. Model identičnih paralelnih mašina ne uzima u obzir razlike između mašina, odnosno sve mašine imaju iste karakteristike (iste performanse). Poslovi se mogu dodeliti bilo kojoj mašini bez razlike u vremenu izvršenja, pa je cilj ravnomerno rasporediti poslove kako bi se minimizovalo ukupno vreme.

Model paralelnih mašina sa različitim brzinama sa oznakom (QP_m) potiče od engleske reči (*eng. Parallel Machine Model with different speeds*). Kod ovog modela ključna karakteristika je to da se uzima u obzir da mašine rade različitim brzinama, što znači da vreme obrade poslova zavisi od toga kojoj mašini je dodeljen. Iako sve mašine mogu obraditi bilo koji posao, razlike u brzini unose dodatnu složenost u proces optimizacije rasporeda. Na osnovu prethodne pretpostavke, ako mašina k ima brzinu obrade v_k , onda u tom slučaju vreme koje operacija jednog posla pt_j provede u obradi na mašini k iznosi pt_j/v_k .

Model nepovezanih mašina sa oznakom (RU_m) potiče od engleske reči (*eng. Unrelated Machines Model*) i predstavlja najsloženiji model paralelnog raspoređivanja, gde se performanse mašina razlikuju ne samo po brzini već i po specifičnosti poslova. Vreme obrade svakog posla zavisi od toga na kojoj mašini je dodeljen, zbog čega je optimizacija još izazovnija. Ovaj model najbolje opisuje situacije gde mašine imaju različite tehničke karakteristike ili prilagođenost određenim poslovima, što zahteva pažljivo dodeljivanje poslova.

Raspoređivanje poslova po modelu *Flow Shops Model*, sa oznakom (FS_m), karakterističan je po tome što se svi poslovi realizuju na unapred definisanoj ruti mašina. Suština se ogleda u raspoređivanju operacija i u okviru poslova j na već unapred definisanom nizu (ruti) mašina k . Svi poslovi moraju ići istom rutom tokom obrade operacija na mašinama. Nakon obrade posla na prvoj mašini u nizu, operacija se prenosi na sledeću mašinu u nizu radi nastavka obrade. Osnovna struktura obrade skupa poslova funkcioniše po principu (*eng. First In First Out – FIFO*) strategije.

Složeniji model od prethodnog karakteriše se raspoređivanjem poslova na fleksibilnoj ruti mašina sa oznakom (FFS_c) potiče od engleske reči (*eng. Flexible Flow Shops*) i predstavlja

proširenje osnovnog FS_m modela. Osnovna razlika između ova dva modela je u obradi poslova na c identičnih mašinskih centara umesto m mašina u seriji. Svaki posao mora prvo biti obrađen u početnoj fazi obrade (faza 1), a zatim prelazi na sledeću fazu, pri čemu unutar svake faze može postojati više paralelnih mašina. Poslovi prate sekvencijalni tok kroz faze, ali postoji mogućnost izbora mašine u okviru svake faze. Ovaj model uvodi fleksibilnost, omogućavajući bolju iskorišćenost resursa i prilagodljivost u slučaju razlika u kapacitetima ili kvarova mašina.

Model obrade *Job Shop Model*, sa oznakom (JSP_m), predstavlja model u kojem se svaki posao sastoji od niza operacija koje je potrebno izvršiti kako bi posao bio završen. Suština ovog problema leži u pravilnom raspoređivanju n poslova na m mašina, prema unapred definisanoj sekvencijalnoj ruti. Važno je napomenuti da raspored obavljanja poslova ne mora biti identičan za sve poslove, niti mora uključivati sve dostupne mašine već svaki posao ima svoj individualni put kroz mašine.

Model fleksibilne obrade poslova sa oznakom ($FJSP_c$) potiče od engleske reči (*eng. Flexible Job Shop Model*) i ovaj model se sastoji od c mašinskih centara. U svakom mašinskom centru se nalaze m mašina koje mogu izvršiti svaku nadolazeću operaciju. Svaki posao ima svoj put kroz mašinski centar a svaku operaciju u okviru tog posla može izvršiti svaka mašina. Fleksibilno raspoređivanje poslova predstavlja najsloženiji model planiranja.

Model otvorenog rasporeda sa oznakom (OS_m) potiče od engleske reči (*eng. Open Shop Model*) i predstavlja raspoređivanje n poslova na m mašina, pri čemu svaki posao mora biti obrađen na svakoj od k mašina barem jednom. Redosled operacija za svaki posao je otvorenog tipa, odnosno nije unapred definisan. Planer poslova ima fleksibilnost da formira rutu za svaki posao, omogućavajući različitim poslovima da imaju različite rute obrade.

3.1.2 Karakteristike okruženja i moguća ograničenja poslova prema notaciji polja β

Osnovne karakteristike okruženja planiranja i moguća ograničenja poslova određuju se u drugom polju β . Ovo polje definiše ključne parametre i pravila koja utiču na način obrade i raspoređivanja poslova u datom proizvodnom okruženju (Pinedo, 1995, 2005, 2008). Moguće oznake u svojstvu ograničenja proizvodnog procesa, prikazane su grafički na slici 3.5.



Slika 3.5 Karakteristike okruženja i moguća ograničenja u drugom polja β

Izvršavanje poslova nakon odobrenog datuma radnog naloga (*eng. release dates*) sa oznakom rd_j predstavlja pravilo prema kojem posao j ne može započeti obradu pre datuma izdavanja radnog naloga. U tom slučaju, datum izdavanja radnog naloga definiše najraniji mogući trenutak početka obrade. Nasuprot tome, ukoliko simbol rd_j nije prisutan u predviđenom polju β , posao j može početi sa izvršenjem u bilo kom trenutku, pod uslovom da je dostupna mašina m .

Vremena pripreme poslova (*eng. sequence dependent setup times*) koja zavise od redosleda izvršavanja, sa oznakom sd_{ij} , predstavljaju vremena podešavanja koja nastaju između obrade poslova. Vreme pripreme za obradu i –te operacije zavisi od prethodne operacije u nizu operacija posla j . U slučaju da vreme podešavanja između obrade dve operacije posla j , zavisi od mašine na kojoj se operacije obrađuju, u oznaci se dodaje indeks k i ona dobija oblik sd_{ijk} .

Ograničenje preuzimanja prioriteta posla (*eng. preemptions*), u oznaci $prmp$, potiče od engleske reči. Prisustvo oznake $prmp$ u polju β predstavlja mogućnost prekida raspoređenog posla i pokretanje obrade novog posla koji možda do tada nije bio dostupan za izvršenje. Zaustavljeni proces obrade može se nastaviti na bilo kojoj dostupnoj mašini u tom trenutku. U slučaju da simbol $prmp$ nije uključen u polju β , prekidanje procesa obrade poslova nije dozvoljeno.

Ograničenja prethodnosti (*eng. precedence constraints*) $prec$ označavaju pravila ili uslove u raspoređivanju poslova ili zadataka koji definišu redosled u kojem određeni poslovi ili operacije moraju biti obavljeni. Prisustvo oznake $prec$ u polju β definiše izvršenje jednog ili više poslova pre nego što se drugom nekom poslu dozvoli da započne izvršenje na toj mašini. Postoje nekoliko posebnih oblika ograničenja prvenstva:

- ako posao ima najviše jednog prethodnika i najviše jednog naslednika to ograničenje se naziva lancem i obeležava se u polju β oznakom *chains*,
- ako posao ima samo jednog naslednika, onda to ograničenje se obeležava oznakom *intree*,
- ako posao ima najviše jednog prethodnika onda se ograničenje obeležava oznakom *outtree*.

Period nedostupnosti mašina (*eng. breakdowns*) sa oznakom *brkdown* označava period fiksne nedostupnosti mašine tokom unapred definisanog vremenskog intervala. Ovakvi periodi mogu nastati usled promena smena radnika, kvarova na mašinama ili perioda preventivnog održavanja mašina. U takvim situacijama, mašine sa identičnim

karakteristikama preuzimaju zadatak obrade poslova, čime se osigurava kontinuitet proizvodnog procesa.

Ograničenje podobnosti mašina (*eng. machine eligibility restrictions*) Me_j definiše pravila ili uslove u raspoređivanju poslova koji određuju koji poslovi mogu biti obrađeni na kojim mašinama. Prisustvo oznake Me_j u polju β predstavlja jedan vid ograničenja gde pojedine mašine nisu sposobne za obradu svakog posla. U slučaju da simbol Me_j nije prisutan u polju β , svaki posao može biti obrađen na bilo kojoj od m dostupnih mašina. Ova ograničenja često reflektuju stvarna ograničenja u kapacitetima, tehnologiji ili sposobnostima mašina, kao i specifične zahteve poslova.

Zastoj ili blokiranje (*eng. blocking*) poslova sa oznakom *blockg* predstavlja ograničenje koje označava situaciju u kojoj se posao ne može prebaciti na sledeću fazu ili mašinu jer ta sledeća faza (ili mašina) nije trenutno dostupna. Završen posao na jednoj mašini mora ostati na toj mašini kako bi je sprečio da preuzme obradu sledećeg posla. Na taj način, blokirani posao sprečava i onemogućava sledeći posao da započne obradu na istoj mašini, čime se uvodi dodatno ograničenje u procesu raspoređivanja poslova.

Režim obrade poslova bez zastoja (*eng. no-wait*) *nowt* predstavlja sigurni protok obrade poslova na celoj liniji mašina. Poslovi ne smeju da čekaju između dve uzastopne mašine. U slučaju da nesmetani protok obrade poslova na svim mašinama nije osiguran, onda vreme početka rada na prvoj sledećoj mašini mora da se odloži kako bi se osigurao siguran protok obrade nadolazećeg posla.

Proces ponovnog kruženja resursa (*eng. recirculation*) sa oznakom *recrc* najčešće se javlja kod JSP_m i $FJSP_c$ modela. Ograničenje omogućava da se jedan posao može obraditi na istoj mašini više puta nezavisno od rute obrade poslova. Svaki posao se može obraditi na svakoj dostupnoj mašini.

Grupe poslova ili familije poslova (*eng. job families*) *Jfmls* označavaju skup poslova podeljenih u različite grupe, koje se nazivaju familijama. Poslovi iz iste familije mogu se obrađivati na istoj mašini jedan za drugim, u nizu, bez potrebe za dodatnim vremenom podešavanja između poslova. Svi poslovi unutar iste familije mogu imati ista ili različita vremena obrade na mašini, što omogućava fleksibilnost u planiranju proizvodnje. Međutim, ukoliko je potrebno prebaciti obradu sa poslova jedne familije na poslove druge familije, vreme podešavanja mašine mora biti uključeno u proces planiranja. Ovaj koncept doprinosi efikasnijem upravljanju proizvodnim procesima, posebno u situacijama gde su promene u obradi česte i raznovrsne.

Serijska obrada poslova (*eng. batch processing*) u oznaci $bpatch(b)$ označava grupnu obradu poslova, gde mašina može istovremeno obrađivati više poslova. Grupa poslova označava se oznakom b . Vremena obrade poslova unutar jedne grupe ne moraju biti identična, a cela grupa se smatra završenom kada je obrađen poslednji posao u radnom setu. Ukupno vreme obrade grupe poslova određuje posao sa najdužim vremenom obrade unutar tog seta. Ovaj princip omogućava efikasniju organizaciju rada, posebno u okruženjima gde se poslovi mogu paralelno obrađivati.

Ograničenje permutacija (*eng. permutation*) u oznaci $permu$ najčešće se javlja kod *Flow Shops* modela i predstavlja ograničenje u vidu rasporeda obrade operacija na svakoj mašini. Raspored operacija prilikom obrade na prvoj mašini ostaje isti u celom sistemu obrade. Ovakav način obrade poslova se ostvaruje primenom pravila FIFO.

Vreme potrebno da se obradi jedan posao (*eng. processing times*) u oznaci pt_j , označava ograničenje ukupnog vremena obrade j - tog posla, bez obzira na kojoj mašini se vrši obrada. U slučaju kada je vreme obrade svakog posla jednako, tada se ukupno trajanje svakog posla na bilo kojoj mašini, može jednostavnije obeležiti sa $pt = pt_j$. Ova uniformnost u vremenu obrade omogućava pojednostavljeno planiranje i analizu proizvodnih procesa.

Vremensko ograničenje obrade poslova (*eng. due date*) u oznaci dd_j predstavlja vremenski rok do kojeg je potrebno završiti sve poslove ili pojedinačan posao na setu mašina. Prekoračenje ovog vremenskog roka u obradi poslova je moguće, ali onda ono povlači dodatne troškove obrade. Ovo ograničenje igra ključnu ulogu u optimizaciji proizvodnih procesa, jer omogućava ravnotežu između vremena završetka i ekonomskih troškova.

Ukupan broj poslova (*eng. number of jobs*) u oznaci $njbr$ predstavlja ograničen broj poslova koji mogu biti prisutni u jednom proizvodnom okruženju tokom plana obrade. Ovo ograničenje je ključno za optimizaciju resursa, smanjenje zagušenja i obezbeđenje efikasnog toka proizvodnog procesa.

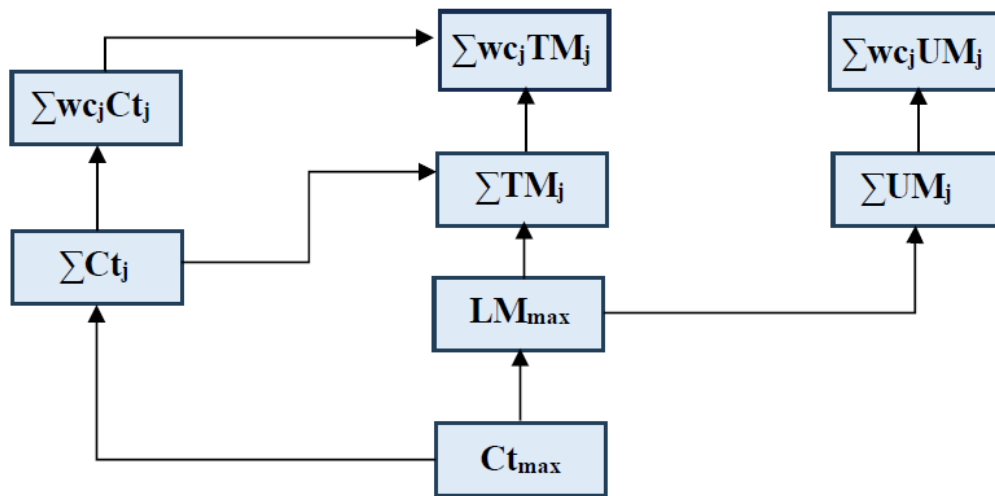
Ukupan broj operacija (*eng. number of operations in jobs*) u oznaci no_j predstavlja ograničenje u broja operacija koje jedan posao može imati. Najčešća primena ovog simbola je kod JSP_m modela, gde se broj operacija definiše za svaki posao u skladu sa specifičnim zahtevima raspoređivanja i obrade u proizvodnom okruženju. Ovo ograničenje omogućava preciznije modeliranje i rešavanje problema raspoređivanja.

Težinski koeficijent posla (*eng. weighting coefficient*) u oznaci wc_j označava težinu posla, koja odražava njegovu važnost (prioritet) za pravovremeno izvršenje u odnosu na druge poslove. Težinski koeficijent omogućava da se poslovi različite važnosti rangiraju i

prioritetizuju, čime se obezbeđuje efikasnije upravljanje rasporedom resursa u proizvodnom procesu.

3.1.3 Vrste ciljnih funkcija i moguće oznake notacije u polju γ

Osnovne informacije o kriterijumskoj funkciji cilja nalaze se u trećem polju γ . Cilj kriterijumske funkcije je da prikaže finalni proces optimizacije problema planiranja i raspoređivanja resursa u obliku rezultata. Na ovaj način omogućava se uvid u prednosti i nedostatke optimizacionog pristupa za posmatrani problem. Moguće oznake u polju γ predstavljene su grafički na slici 3.6.



Slika 3.6 Funkcije cilje i moguće oznake u trećem polju γ

Ukupno vreme trajanja poslova (*eng. Makespan*) u oznaci Ct_{max} označava funkciju cilja koja određuje ukupno vreme završetka poslednjeg posla na bilo kojoj mašini. Ct_{max} je jedan od najčešće korišćenih kriterijuma pri optimizaciji procesa raspoređivanja resursa. Osnovni cilj ove funkcije je postizanje maksimalne produktivnosti proizvodnje u najkraćem mogućem vremenskom intervalu. U proširenom obliku ova kriterijumska funkcija cilja može se predstaviti u obliku $Ct_{max} = \max(Ct_j)$. Ukoliko se u razmatranje uzimaju i težinski koeficijenti poslova, funkcija se izražava u obliku ukupnog vreme obrade poslova sa težinskim koeficijentima (*eng. Total Weighted Completion Time*) u oznaci $(\sum wc_j Ct_j)$. Težinski koeficijenti imaju ključnu ulogu u izražavanju i kvalifikaciji važnosti svakog posla.

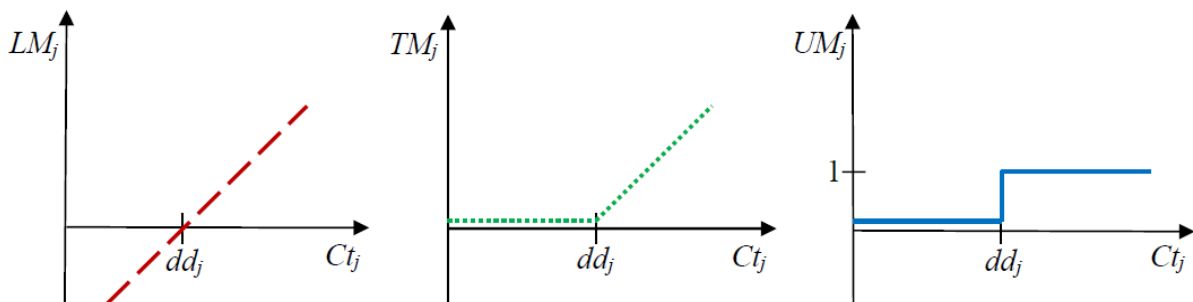
Maksimalno kašnjenje poslova (*eng. Maximum Lateness*) u oznaci LM_{max} može se predstaviti u proširenom obliku kao $\max(LM_j)$, gde je LM_j kašnjenje j -tog posla. Veličina LM_j predstavlja razliku između vremena završetka i predviđenog roka završetka posla $LM_j = Ct_j -$

dd_j , tj. odstupanje od definisanog roka dd_j . Pri tome, ako je $LM_j < 0$ posao je završen pre roka, ako je $LM_j = 0$ posao je završen u roku i na kraju ako je $LM_j > 0$ posao je kasnio).

Maksimalno kašnjenje poslova koji kasne (eng. *Maximum Tardiness*), u oznaci TM_{max} , označava maksimalno vreme kašnjenja posla u odnosu na njegovo pravovremeno izvršenje, ali uzimajući u razmatranje samo poslove koji imaju neko kašnjenje. Može se predstaviti u obliku $\max(TM_j)$, gde je TM_j kašnjenje j -tog posla, ako postoji. Veličina TM_j računa se prema obrascu $TM_j = (Ct_j - dd_j, 0)$, odnosno uzima se u razmatranje samo ako posao kasni $Ct_j > dd_j$, inače ima vrednost 0.

Može se definisati i ukupan broj zakasnelih poslova (eng. *Total Number of Tardy Jobs*), u oznaci $\sum UM_j$, koji predstavlja ukupan broj poslova koji kasne tokom procesa planiranja. Ako se poslovima pridruže i težinski koeficijenti poslova, sa ciljem naglašavanja njihove važnosti, tada se prethodno definisana funkcija cilja može proširiti u novi oblik $\sum wc_j UM_j$ koji predstavlja ukupan broj zakašnjelih poslova uzimajući u obzir težinske koeficijente (eng. *Weighted Number of Tardy Jobs*).

Prethodno definisane funkcije su ključne u analizi i optimizaciji rasporeda, posebno u situacijama gde je minimizacija kašnjenja od suštinskog značaja. Na slici 3.7 prikazane su funkcije sa prethodno definisanim rokom izvršavanja poslova na setu mašina (Pinedo, 2008), (Rakićević, 2018).



Slika 3.7 Funkcije cilja povezane sa vremenskim rokom izvršavanja poslova na mašinama

3.1.4 Primeri modela planiranja i raspoređivanja poslova u okviru definisane notacije

Na samom početku poglavlja predstavljen je način kategorizacije problema planiranja i raspoređivanja resursa na osnovu tri ključna polja $\alpha \mid \beta \mid \gamma$. Ovakav pristup kategorizacije modela omogućava strukturisano predstavljanje problema i olakšava razumevanje u skladu sa definisanim parametrima i postavljenim ciljevima optimizacije. U nastavku su predstavljeni

primeri modela koji koriste notaciju definisanu u prethodnom delu poglavlja kako bi se izvršila jasna klasifikacija modela i definisanih ograničenja u okviru posmatranog problema.

Primer 1 – Model paralelnih mašina P_4 | $nowt, pprmp$ | $\sum wc_j TM_j$. Model se tumači kao problem raspoređivanja poslova na četiri mašine koje se nalaze u paralelnoj vezi. Prilikom obrade poslova na mašinama uspostavljen je siguran protok poslova na celoj liniji mašina. Prilikom prekida obradnog posla postoji mogućnost obrade novog dostupnog posla u tom trenutku, dok ciljna funkcija ima zadatak da prikaže ukupno vreme kašnjenja svih prioritarnih poslova.

Primer 2 – Job Shop Model - JSP_m | $prec$ | Ct_{max} . Model označava raspoređivanje poslova sa unepred definisanim sekvencnim rasporedom izvršavanja na m mašina. Prisustvo oznake $prec$ u polju β definiše izvršenje jednog ili više poslova pre nego što se nekom drugom poslu dozvoli da započne izvršenje na toj mašini. Ciljna funkcija ima zadatak postizanja maksimalne produktivnosti uz minimizaciju vremena završetka svih poslova na setu mašina.

Primer 3 – Flexible Job Shop Problem - $FJSP_c$ | $brkdown, sd_{ijk}$ | Ct_{max} . Model označava fleksibilno raspoređivanje poslova na c mašinskih centara. U drugom polju modela predstavljena su ograničenja sa unapred definisanim periodom nedostupnosti mašina kao i vremena podešavanja poslova koja su zavisna od rasporeda sekvenci na dostupnom skupu mašina. Cilj problema je minimizacija vremenskog intervala raspoređivanja poslova i obrade poslova na skupu mašina.

Poglavlje 4

METODOLOŠKI OKVIR ZA REŠAVANJE PROBLEMA PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA RESURSA

U četvrtom poglavlju doktorske disertacije analizirane su metode koje čine osnovu za razvoj optimizacionih modela u narednim poglavljima. Fokus istraživanja usmeren je na klasifikaciju optimizacionih pristupa i njihove specifične primene u kontekstu planiranja i raspoređivanja resursa u proizvodnim sistemima. Posebna pažnja posvećena je metodama koje omogućavaju modeliranje neizvesnosti u procesima planiranja i raspoređivanja resursa primenom alata teorije verovatnoće i fazi skupova. U prvom slučaju analizirane su metode kod kojih se neizvesnost izražava kroz slučajne promenljive i njihove verovatnosne raspodele na način da svaka moguća realizacija nekog događaja ima određenu verovatnoću. U okviru ovog pristupa posebna pažnja biće posvećena metodi zasnovanoj na primeni matematičkog operatora konvolucije koji omogućava precizno kombinovanje dve funkcije u cilju dobijanja treće - zbirne raspodele slučajnih promenljivih. Ovo je ključan matematički alat za analizu nezavisnih izvora neizvesnosti u procesima planiranja i raspoređivanja resursa.

Međutim, kako u složenim proizvodnim sistemima, osim stohastičkih promenljivih, često je potrebno uzeti u obzir i veličine koje nisu precizno definisane ili su nepotpune, a sa druge strane mogu imati subjektivni ili lingvistički karakter, u okviru ovog poglavlja

predstavljena je i metodologija koja koristi fazi pristup, kao i implementaciju fazi brojeva u razmatrane modele.

Kako bi se rešili problemi planiranja i raspoređivanja resursa u proizvodnim sistemima razmatrani su i različiti metaheuristički pristupi, uključujući metode GA, ACO, SA, TS, PSO i ABC. Primena ovih metoda omogućava optimizaciju rasporeda poslova, čime se povećava efikasnost i produktivnost proizvodnog procesa a smanjuju ukupni troškovi i ukupno vreme proizvodnje. Da bi se pravilno procenilo koji algoritam ostvaruje najbolje performanse za određeni optimizacioni problem, neophodno je razviti inteligentni sistem sposoban da identifikuje najpogodniji pristup u skladu sa specifičnostima problema i promenljivim uslovima u proizvodnom procesu. Takav sistem omogućava automatsko prilagođavanje različitim scenarijima i obezbeđuje donošenje optimalnih odluka u realnom vremenu. U ovom istraživanju, izbor optimalnog algoritma za rešavanje posmatranog problema realizovan je primenom novog pristupa zasnovanog na metodologiji prilagodljivog neuro-fazi sistema zaključivanja (*eng. Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System – ANFIS*). ANFIS pristup kombinuje prednosti veštačkih neuronskih mreža i fazi logike, omogućavajući efikasno modeliranje složenih nelinearnih odnosa između ulaznih i izlaznih parametara sistema. Osnovna uloga ovog pristupa je adaptivno prepoznavanje algoritma koji pruža najbolje rezultate za specifične probleme u uslovima promenljivih parametara i neizvesnosti.

Detaljnim istraživanjem oblasti planiranja i raspoređivanja resursa ustanovljeno je da pravilno određivanje prioriteta poslova i adekvatno podešavanje ulaznih parametara optimizacije predstavljaju ključne faktore koji utiču na efikasnost upravljanja resursima u proizvodnim procesima. Ovi faktori mogu da imaju direktan uticaj na performanse optimizacionih modela. Kako bi se unapredio proces planiranja i obuhvatili navedeni ključni faktori, u ovom istraživanju analizirane su mogućnosti primene sledećih pristupa:

- metode višekriterijumskog odlučivanja (*eng. Multi-Criteria Decision Making – MCDM*) za određivanje prioriteta poslova,
- modeli mašinskog učenja (*eng. Machine Learning*) za odabir optimalnih parametara optimizacije.

Cilj primene MCDM pristupa je eliminisanje subjektivnih procena pri rangiranju poslova, koje mogu dovesti do grešaka u rasporedu i smanjenja produktivnosti. U tom kontekstu, razmatrana je primena tri različite MCDM metode: FAHP (*eng. Fuzzy Analytic Hierarchy Process*), FFUCOM (*eng. Fuzzy Full Consistency Method*) i FWASPAS (*eng. Fuzzy Weighted Aggregated Sum Product Assessment*).

Mašinsko učenje predstavlja jedan od savremenih pristupa u optimizaciji resursa u okviru proizvodnih procesa. Primena modela mašinskog učenja omogućava analizu velikog broja ulaznih veličina i predikciju parametara optimizacije sa ciljem unapređenja performansi optimizacionih modela. Odabir adekvatnih ulaznih parametara značajno utiče na performanse algoritama i efikasnost optimizacionih procesa. U okviru ove doktorske disertacije, primenjeni su različiti modeli mašinskog učenja čija je osnovna uloga predikovanje optimalnih parametara korišćenih metaheurističkih algoritama, čime se osigurava postizanje optimalne funkcije cilja u različitim fazama upravljanja resursima proizvodnog procesa. Ovaj prediktivni pristup omogućava unapred procenu kvaliteta rešenja pre same optimizacije, čime se značajno ubrzava proces pronalaženja optimalnog rešenja.

Navedene metode su veoma značajne za razvoj modela planiranja i raspoređivanja resursa u realnim proizvodnim okruženjima. Metode koje će u nastavku biti predstavljene služe kao teorijska osnova za razvoj modela u petom poglavlju.

4.1 OPŠTI KONCEPT I TERMINOLOGIJA OPTIMIZACIJE

Optimizacija je naučna disciplina koja se bavi pronalaženjem optimalnih rešenja za zadate probleme u okviru definisanih ograničenja. U osnovi optimizacije je proces minimizacije ili maksimizacije ciljne funkcije, pri čemu su ključni ciljevi smanjenje troškova (vremena), poboljšanje performansi ili povećanje efikasnosti sistema. Maksimalne ili minimalne vrednosti ciljne funkcije u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa mogu biti: minimalno vreme završetka svih poslova u procesu proizvodnje, maksimalno kašnjenje proizvoda, maksimalno ili minimalno potrebno vreme jedne mašine da obradi operaciju, maksimalni ili minimalni broj proizvoda, minimalni ili maksimalni troškovi ciljne funkcije.

Osnovna terminologija u oblasti optimizacije uključuje pojmove poput ciljne funkcije, ograničenja, prostora rešenja, kao i metoda za pronalaženje optimalnih vrednosti. Ciljna funkcija predstavlja matematički izraz koji određuje kvalitet rešenja, dok ograničenja definišu dozvoljeni opseg mogućih vrednosti. Prostor rešenja je skup svih mogućih rešenja, a optimizacija se fokusira na pronalaženje onih koja ispunjavaju postavljene uslove i pružaju optimalni rezultat. U naučnoj literaturi mogu se naći različite definicije optimizacije ali u osnovi ove definicije su slične.

Bertsekas (Bertsekas, 1999) definiše optimizaciju na sledeći način: "*Optimizacija je proces pronalaženja rešenja koje minimizuje ili maksimizuje zadatau ciljnu funkciju uz poštovanje datih ograničenja.*",

"Boyd i Vandenberghe (Boyd i Vandenberghe, 2004) definišu optimizaciju kao: "Optimizacija se sastoji od minimizacije ili maksimizacije funkcije cilja na osnovu ograničenja definisanih u prostoru rešenja."

Opšti koncept optimizacije zasniva se na definiciji problema i razvoju adekvatnog matematičkog modela koji na zadovoljavajući način opisuje realne karakteristike posmatranog sistema. U matematičkom obliku, opšti koncept problema optimizacije može se formalno predstaviti na sledeći način:

Funkcija cilja:

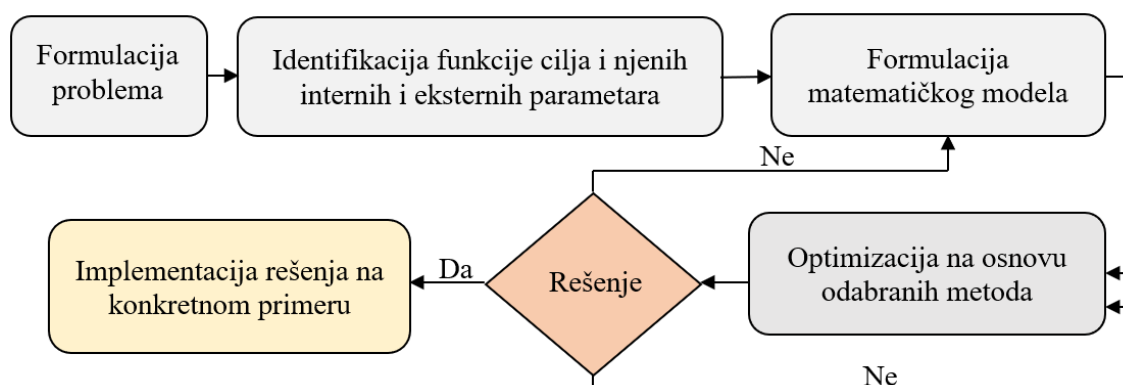
$$\min/\max f(x), \quad (4.1)$$

sa ograničenjima:

$$\varphi_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.2)$$

$$\omega_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (4.3)$$

Jedančina (4.1) predstavlja minimum/maksimum opisane funkcije cilja, dok ograničenja (4.2) i (4.3) predstavljaju nejednakosna ograničenja $\varphi_i(x) \leq 0$, koja definišu dozvoljeni prostor rešenja, odnosno jednakosna ograničenja $\omega_j(x) = 0$, koja dodatno imaju uticaj i usmeravaju izbor mogućih rešenja. Na slici 4.1 predstavljeno je nekoliko osnovnih koraka pri procesu optimizacije (Petrović, 2013).



Slika 4.1 Osnovi koraci optimizacije (Petrović, 2013)

Kao što se može videti na slici 4.1, proces rešavanja optimizacionog problema sastoji se od nekoliko ključnih koraka, koji su povezani iterativnim tokom sa povratnim petljama (informacijama) za proveru rešenja.

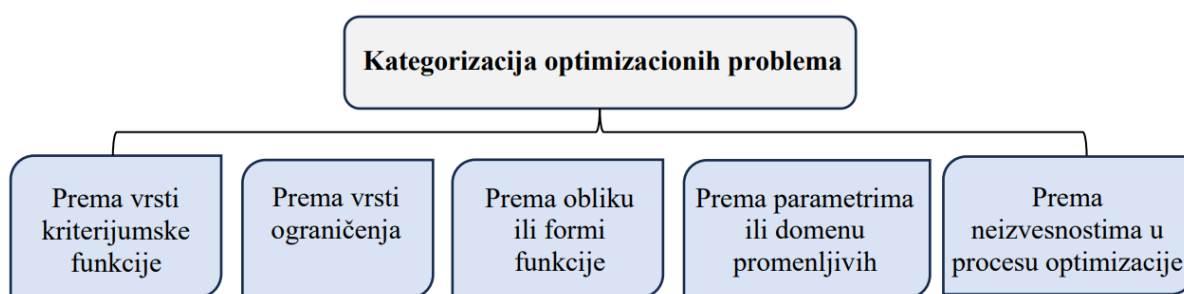
Proces započinje formulacijom problema, nakon čega sledi identifikacija funkcije cilja i njenih internih i eksternih parametara koji imaju uticaj na funkciju cilja. Na osnovu ovih

podataka kreira se matematički model koji definiše funkciju cilja i ograničenja sistema. Nakon toga, primenjuju se odabrane metode optimizacije kako bi se pronašlo odgovarajuće rešenje. Proverom rešenja procenjuje se da li ono zadovoljava postavljene kriterijume. Ako rešenje nije adekvatno, proces se vraća na prethodne korake kako bi se model i parametri prilagodili. U slučaju da rešenje ispunjava zadate ciljeve, prelazi se na njegovu implementaciju u realnom proizvodnom sistemu. Ovaj iterativni pristup omogućava prilagođavanje različitim uslovima i doprinosi postizanju optimalnih rešenja kroz kontinuiranu proveru i unapređenje modela.

4.1.1 Klasifikacija optimizacionih problema

Klasifikacija optimizacionih problema ima za cilj detaljnu analizu i istraživanje dostupnih metoda koje su pogodne za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa. Fokus istraživanja je na identifikaciji metoda koje omogućavaju efikasno planiranje i raspoređivanje resursa u uslovima neizvesnosti, uzimajući u obzir specifičnosti posmatranog optimizacionog problema.

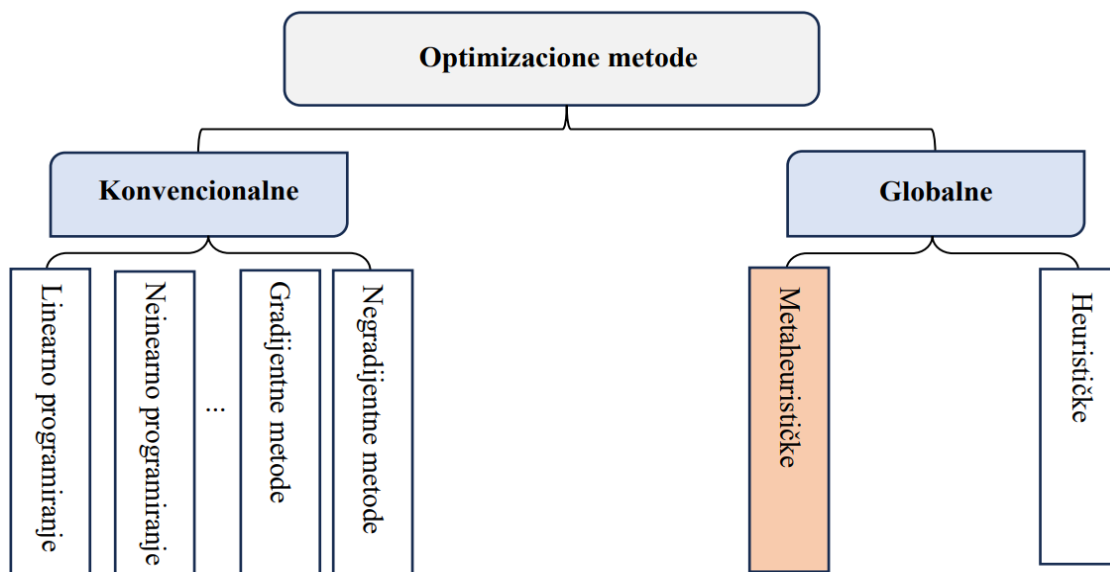
Klasifikacija optimizacionih problema, kao i podela optimizacionih metoda u zavisnosti od specifičnih tipova problema, može se pronaći u radovima istaknutih istraživača iz oblasti optimizacije (Yang, 2010), (Pinedo, 2008). U radu Petrović (Petrović, 2013) autor navodi da se opšta kategorizacija optimizacionih metoda može predstaviti na osnovu sledećih kriterijuma prikazanih na slici 4.2.



Slika 4.2 Kategorizacija optimizacionog problema (Petrović, 2013)

Da bi se optimizacioni problemi sagledali i rešili na adekvatan način, neophodno je izvršiti detaljnu analizu optimizacionih metoda koje su direktno povezane sa posmatranim problemom.

Pravilnim izborom metoda optimizacije obezbeđuje se efikasno rešavanje problema, uzimajući u obzir specifične karakteristike i ograničenja konkretne oblasti primene. Na slici 4.3 predstavljena je klasifikacija metoda optimizacije (Yang, 2010).



Slika 4.3 Klasifikacija optimizacionih metoda (Yang, 2010)

4.2 IMPLEMENTACIJA STOHAŠTIČKE OPTIMIZACIJE U MODELIMA PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA RESURSA

Problemi stohastičke optimizacije predstavljaju izazovnu oblast gde se neizvesnost javlja u obliku slučajnih promenljivih. Takvi problemi zahtevaju primenu prilagođenih strategija rešavanja, koje omogućavaju efikasno upravljanje promenljivim uslovima u različitim fazama optimizacije. Ova oblast optimizacije bavi se rešavanjem problema u kojima neizvesnost u ulaznim parametrima ili okruženju igra ključnu ulogu, što zahteva korišćenje metoda koje uzimaju u obzir raspodele slučajnih promenljivih i slučajni karakter njihovih promena.

Kombinacija naprednih algoritama i metoda koje omogućavaju uzimanje u obzir uslova neizvesnosti može igrati ključnu ulogu u efikasnom rešavanju problema planiranja i raspoređivanja resursa. Planiranje proizvodnje u dinamičnim uslovima okruženja poseban fokus mora staviti na formiranje pravilnog sekventnog rasporeda poslova primenom alata stohastičke optimizacije. Navedeni problem prvi put se razmatra u istraživanju Dantzig-a (Dantzig, 1955) polovinom prošlog veka.

Kada je reč o stohastičkom programiranju u naučnoj literaturi uočava se podela metoda na dve osnovne grupe: implicitne i eksplicitne metode. Ova klasifikacija zasniva se na načinu na koji se neizvesnost integriše u proces optimizacije. Eksplicitne metode direktno modeliraju neizvesnost kroz slučajne promenljive, dok implicitne metode koriste aproksimacije i scenarije kako bi se uz neizvesnost osigurala rešenja u različitim uslovima (Marković, 2018).

U slučaju kada je funkcija cilja stohastičke prirode zadatak optimizacije je minimizacija ili maksimizacija matematičkog očekivanja funkcije cilja $f_i(x)$ i podrazumeva pronalaženje optimalnog rešenja unutar definisanog prostora pretrage (Vujošević, 1988):

$$\min/\max f_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (4.4)$$

dok se sa druge strane zadatak može definisati na način da je potrebno pronaći optimalno rešenje x koje minimizuje ili maksimizuje verovatnoću da svaka funkcija $f_i(x)$ dostigne ili prevaziđe zadatu vrednost f_0 unutar definisanog prostora pretrage rešenja.

$$\min/\max P[f_i(x)] \geq f_0, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4.5)$$

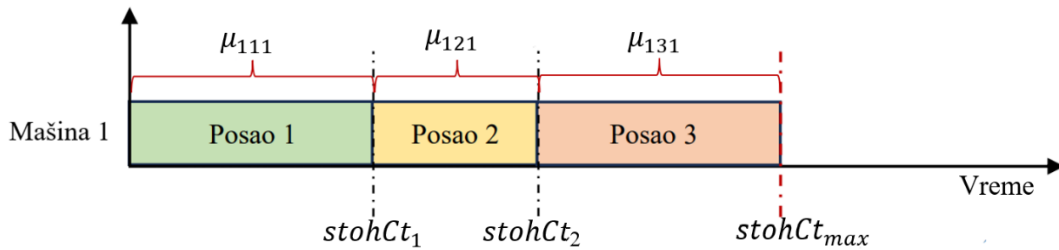
Prema Sen-u (Sen, 2013) stohastičko programiranje obuhvata optimizaciju modela u kojima početni uslovi problema zavise od neizvesnih događaja. Prema Yang-u (Yang, 2010) stohastičko programiranje koristi funkciju gustine verovatnoće $f(x)$, sa posebnim fokusom na srednju vrednost ciljne funkcije kao ključni kriterijum za donošenje odluka u uslovima neizvesnosti. Uslovi neizvesnosti događaja mogu dovesti do velikih odstupanja i očekivanja realnih vrednosti funkcije cilja. Jedan od načina rešavanja ovakvih problema je definisanje optimizacionih promenljivih i neizvesnosnih događaja na osnovu slučajnih promenljivih. U zavisnosti od početnih uslova i karaktera slučajnih promenljivih razlikuju se dva tipa njihovih raspodela verovatnoće: diskretne raspodele i neprekidne raspodele.

4.2.1 Model stohastičkog planiranja i raspoređivanja resursa primenom normalnog zakona raspodele verovatnoće

Normalna raspodela ili Gausova raspodela jedna je od najvažnijih raspodela u statistici i teoriji verovatnoće. Njena osnovna karakteristika je simetrična kriva u obliku zvona, koja opisuje raspodelu vrednosti slučajne promenljive oko srednje vrednosti. Normalnu raspodelu definišu dva osnovna parametra: očekivana vrednost μ i standardna devijacija σ . Neophodno je napomenuti da pri optimizaciji realnih slučajeva u praksi i rešavanju različitih problema u statistici umesto slučajne promenljive X , sa parametrima normalne raspodele $N(\mu, \sigma^2)$, koristi se standardizovana slučajna promenljiva Z , koja ima raspodelu $N(0,1)$ sa nultom srednjom vrednošću i jedničnom standardnom devijacijom. Transformacija slučajne promenljive X u standardizovanu promenljivu Z dobija se prema sledećoj jednačini (Petrović, 2018):

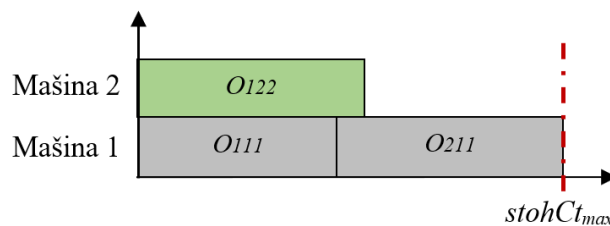
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (4.6)$$

U nastavku rada detaljno je opisan slučaj problema planiranja i raspoređivanja resursa kod koga vremena obrade poslova na mašinama $stohpt_{ijk}$ predstavljaju normalno raspodeljene slučajne promenljive. Slučajna promenljiva $stohpt_{ijk}$ predstavljena je kao nezavisna slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele F_{ijk} , očekivanom vrednošću μ_{ijk} i disperzijom σ_{ijk}^2 . Ukupno vreme funkcije cilja $stohCt_{max}$ predstavlja ukupno vreme završetka svih poslova u okviru procesa planiranja, uzimajući u obzir stohastičku prirodu vremena obrade. Na slici 4.4 predstavljene su opisane promenljive u grafičkom obliku radi vizuelnog prikaza i lakšeg razumevanja njihovih odnosa i karakteristika.



Slika 4.4 Grafički prikaz i pojašnjenje slučajnih promenljiva i funkcija cilja

S obzirom na to da vremena obrade poslova nisu deterministička, već se modeliraju kao slučajne promenljive sa normalnom raspodelom, $stohCt_{max}$ takođe postaje slučajna promenljiva. Funkcija raspodele $F_{stohCt_{max}}$ u tom slučaju opisuje verovatnoću da će vrednost $stohCt_{max}$ biti manja ili jednaka određenoj vrednosti. Cilj posmatranog problema je identifikacija minimalne vrednosti funkcije cilja $stohCt_{max}$ koja zadovoljava uslov $P(F_{stohCt_{max}} \leq stohCt_{max}) \geq \alpha$, pri čemu je α unapred zadati nivo poverenja. U ovom slučaju $\alpha = 0,95$, što odgovara verovatnoći događaja od 95%. Inverzna funkcija $F_{stohCt_{max}}^{-1}(\alpha)$, omogućava određivanje vrednosti funkcije cilja $stohCt_{max}$ za zadatu vrednost $\alpha = 0,95$, pri čemu važi uslov $F_{stohCt_{max}}^{-1}(\alpha) = stohCt_{max}$, ako i samo ako $P(F_{stohCt_{max}} \leq stohCt_{max}) = \alpha$ (Daniëls, 2013). Konkretna postupak raspoređivanja poslova (operacija) na mašinama u proizvodnom procesu i implementacija parametara normalne raspodele u taj proces prikazan je u nastavku u slučaju problema koji je prikazan na slici 4.5.



Slika 4.5 Grafički prikaz rasporeda operacija na mašinama

Kao što se može videti na slici 4.5, problem se sastoji od posla $J_1 = (O_{111}, O_{211})$, koji se izvršava na mašini M_1 i posla $J_2 = (O_{122})$ koji se izvršava na mašini M_2 . Zadatak je rasporediti poslove na skupu m mašina $M_k = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$, pri čemu svaki posao J_j ($j = 1, 2, \dots, n$) ima određeni broj operacija $(O_{1,j}, O_{2,j}, \dots, O_{ni,j})$.

Prvi korak predstavlja definisanje slučajnih promenljivih za ukupno vreme izvršavanja operacija na mašinama. Ukupno vreme izvršavanja operacije O_{111} na mašini M_1 u skladu sa parametrima normalne raspodele može se zapisati u sledećem obliku $N_{ijk}(\mu_{ijk}, \sigma_{ijk}^2) = N_{111}(7, 0.25)$. Takođe, ukupno vreme izvršavanja operacije O_{211} na mašini M_1 prema zakonu normalne raspodele može se zapisati kao $N_{211}(11, 0.25)$ i ukupno vreme izvršavanja operacije O_{122} na mašini M_2 prema zakonu normalne raspodele može se predstaviti kao $N_{122}(16, 0.25)$.

Ukupno vreme izvršavanja operacija na mašinama, što predstavlja optimalnu vrednost funkcije cilja $stohCt_{max}$, kada vremena trajanja pojedinih operacija imaju normalni zakon raspodele, može se zapisati sledećom jednačinom:

$$\max(N(7, 0.25) + N(11, 0.25), N(16, 0.25)) \quad (4.7)$$

Prema (Daniëls, 2013) zbir dve nezavisne, normalno raspodeljene slučajne promenljive je opet normalno raspodeljena slučajna promenljiva i može se predstaviti u sledećem obliku:

$$N(\mu_{X_g}, \sigma_{X_g}^2) + N(\mu_{Y_h}, \sigma_{Y_h}^2) = N(\mu_{X_g} + \mu_{Y_h}, \sigma_{X_g}^2 + \sigma_{Y_h}^2) \quad (4.8)$$

Na taj način ukupno vreme trajanja operacija $O_{1,1}$ i $O_{2,1}$ koje se izvršavaju na mašini M_1 i koje su definisane normalno raspodeljenim vrednostima vremena trajanja, može se dobiti sabiranjem pojedinačnih vremena trajanja operacija.

Sledeći korak jeste poređenje dve slučajne veličine sa normalnim zakonima raspodele. Optimalna vrednost ciljne funkcije $stohCt_{max}$ na osnovu prethodnih uslova verovatnoće ima sledeći oblik:

$$P(\max(N(18, 0.5), N(16, 0.25)) \leq stohCt_{max}) = \alpha = 0,95 \quad (4.9)$$

Jednačina (4.9) definiše uslov da maksimalne vrednosti vremena izvršavanja operacija na mašinama M_1 i M_2 , u obliku, $N(18, 0.5)$ i $N(16, 0.25)$, budu manje ili jednake od ukupne vrednosti ciljne funkcije $stohCt_{max}$ sa procentualnom verovatnoćom od 95%.

S obzirom na to da je izvršavanje operacija na mašinama M_1 i M_2 nezavisno jedno od drugog, mogu se uvesti dve nove nezavisne slučajne promenljive X_g , Y_h , čime se omogućava pojednostavljeno modeliranje raspodele vremena izvršavanja operacija. U tom kontekstu,

funkcije raspodele označene su kao F_{X_g} i F_{Y_h} , pri čemu svaka funkcija opisuje verovatnoćom definisan odnos između vrednosti promenljive i njenog mogućeg ishoda.

Maksimum normalno raspodeljenih slučajnih veličina nije nužno normalna slučajna veličina. Generalno, funkcija raspodele F_{X_g, Y_h} maksimuma $\max(X_g, Y_h)$ može se predstaviti kao $F_{X_g} \cdot F_{Y_h}$. Dodatno važi:

$$P(\max(X_g, Y_h) \leq \text{stohCt}_{\max}) = P(X_g \leq \text{stohCt}_{\max}) P(Y_h \leq \text{stohCt}_{\max}) \quad (4.10)$$

U razmatranom primeru može se uvesti pretpostavka da je vrednost slučajne promenljive $N(18, 0.5)$ veća od vrednosti druge slučajne promenljive $N(16, 0.25)$. Zbog toga se može prevashodno razmatrati uslov:

$$(N(18, 0.5) \leq \text{stohCt}_{\max}^1) = \alpha = 0.95 \quad (4.11)$$

gde nova funkcija cilja, označena kao $\text{stohCt}_{\max}^1$ predstavlja blisku aproksimaciju optimalnom rešenju prethodne ciljne funkcije $\text{stohCt}_{\max}$. Vrednost nove ciljne funkcije $\text{stohCt}_{\max}^1$ izračunava se korišćenjem slučajne promenljive $X_g = N(\mu_{X_g}, \sigma_{X_g}^2) = N(18, 0.5)$. Transformacija slučajne promenljive X_g u standardizovanu promenljivu Z dobija se prema sledećoj jednačini:

$$P(X_g \leq \text{stohCt}_{\max}^1) = P\left(\frac{X_g - \mu_{X_g}}{\sigma_{X_g}} \leq \frac{\text{stohCt}_{\max}^1 - \mu_{X_g}}{\sigma_{X_g}}\right) = P(Z \leq z) \quad (4.12)$$

Nova standardizovana slučajna promenljiva Z sada ima oblik:

$$z = \frac{\text{stohCt}_{\max}^1 - \mu_{X_g}}{\sigma_{X_g}} \quad (4.13)$$

Očitavanjem vrednosti parametra z iz tabele normalne raspodele za zadatu vrednost parametra $\alpha = 0.95$, dobija se $z = 1.646$. Prema tome vrednost funkcije cilja $\text{stohCt}_{\max}^1$, koja je bliska aproksimacija prethodne ciljne funkcije $\text{stohCt}_{\max}$ može se izračunati sledećom jednačinom:

$$\text{stohCt}_{\max}^1 = 1.646 \sigma_{X_g} + \mu_{X_g} = 1.646\sqrt{0.5} + 18 \approx 19.163 \quad (4.14)$$

Nakon izračunavanja vrednosti $\text{Ct}_{\max}^1 = 19.163$ potrebno je proveriti prethodno uvedenu pretpostavku približne jednakosti $\text{stohCt}_{\max}^1 \approx \text{stohCt}_{\max}$. Transformacijom slučajne promenljive $Y_h = N(\mu_{Y_h}, \sigma_{Y_h}^2) = N(16, 0.25)$ u standardizovanu promenljivu Z , može se izračunati vrednost parametra z na osnovu sledećeg izraza:

$$z = \frac{stohCt_{max}^1 - \mu_{Y_h}}{\sigma_{Y_h}^2} = \frac{19.163 - 16}{\sqrt{0.25}} \approx 6,326 \quad (4.15)$$

Iz tabele normalne raspodele, prema dobijenoj vrednosti parametra $z \geq 6.326$, očitava se vrednost parametra $\alpha = 1$. Prema tome, vrednost približne aproksimativne funkcije cilja $stohCt_{max}^1$ može se predstaviti sledećim jednačinom:

$$\begin{aligned} P(\max(X_g, Y_h) \leq stohCt_{max}) &= \\ P(\max(X_g, Y_h) \leq stohCt_{max}^1) &= (0.95)(1) = 0.95 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Jednačina (4.16) pokazuje da mašina M_1 i mašina M_2 neće raditi duže od vrednosti funkcije cilja $stohCt_{max}^1 = 19,163$ sa nivoom poverenja od 95%.

4.2.2 Model stohastičkog planiranja i raspoređivanja resursa primenom eksponencijalnog zakona raspodele verovatnoće

Jedan od važnih alata za modeliranje vremenskih intervala u stohastičkim procesima jeste eksponencijalna raspodela. Eksponencijalnu raspodelu opisuje parametar λ koji predstavlja brzinu kojom se događaji realizuju. Događaji se odvijaju konstantom brzinom ($\lambda = const.$) nezavisno od proteklog vremena i poslednjeg realizovanog događaja. Funkcija gustine za slučajnu promenljivu $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ prema zakonu eksponencijalne raspodele može se predstaviti kao (Petrović, 2018):

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ako je } x > 0 \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases} \quad (4.17)$$

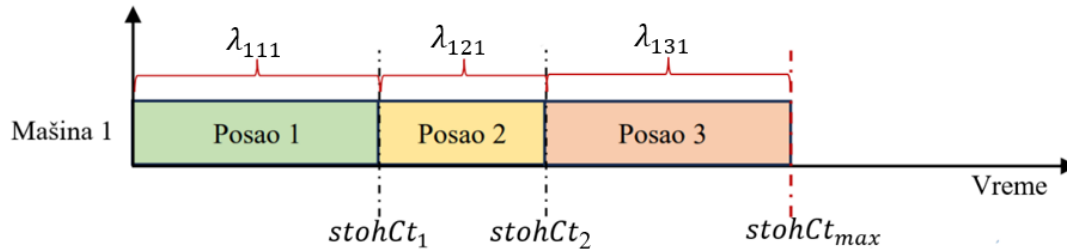
gde parametar x predstavlja nenegativan broj, dok broj e predstavlja matematičku konstantu koja je osnova prirodnog logaritma. Kumulativna funkcija eksponencijalne raspodele može se predstaviti kao:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (4.18)$$

U nastavku rada detaljno je opisan slučaj problema planiranja i raspoređivanja resursa kod koga vremena obrade poslova na mašinama $stohpt_{ijk}$ imaju eksponencijalne zakone raspodele. Srednja vrednost i standardna devijacija u slučaju eksponencijalnog zakona raspodele definišu se kao recipročna vrednost parametra λ $1/\lambda_{ijk}$. Prema tome, vreme obrade poslova na mašinama je slučajna promenljiva $stohpt_{ijk}$, gde je $\lambda_{ijk} = \frac{1}{stohpt_{ijk}}$. Kao i u

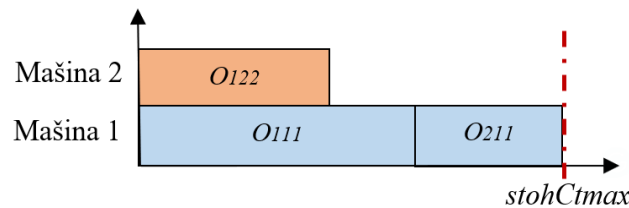
prethodnom slučaju kao funkcija cilja može se razmatrati ukupno vreme završetka svih poslova u okviru procesa planiranja $stohCt_{max}$.

Na slici 4.6 predstavljene su opisane veličine u grafičkom obliku radi vizuelnog prikaza i lakšeg razumevanja njihovih odnosa i karakteristika.



Slika 4.6 Grafički prikaz i pojašnjenje slučajnih veličina i funkcija cilja

S obzirom na to da vremena obrade poslova nisu deterministička, već se modeliraju kao slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom, $stohCt_{max}$ takođe predstavlja slučajnu veličinu. Funkcija raspodele $F_{stohCt_{max}}(stohpt_{ijk})$ u tom slučaju opisuje verovatnoću da će vrednost $stohCt_{max}$ biti manja ili jednaka određenoj vrednosti. Konkretna postupak raspoređivanja poslova (operacija) na mašinama u proizvodnom procesu i implementacija parametara eksponencijalne raspodele u taj proces prikazan je u nastavku u slučaju problema koji je prikazan na slici 4.7.



Slika 4.7 Grafički prikaz rasporeda operacija na mašinama

Kao što se može videti na slici 4.7, problem se sastoji od posla $J_1 = (O_{111}, O_{211})$, koji ima dve operacije i koje se izvršavaju na mašini M_1 i posla $J_2 = (O_{122})$ koji se izvršava na mašini M_2 i sastoji se od samo jedne operacije. Zadatak je rasporediti poslove na raspoloživim mašinama $M_k = \{M_1, M_2\}$, pri čemu svaki posao J_j ($j = 1, 2$) ima određeni broj operacija.

Prvi korak predstavlja definisanje slučajnih promenljivih za ukupno vreme izvršavanja operacija na mašinama. Ukoliko vreme izvršavanja operacije O_{111} na mašini M_1 ima eksponencijalni zakon raspodele, može se zapisati u obliku $X_1 \sim Exp(\lambda_{111})$. Slično, vreme izvršavanja operacije O_{211} na mašini M_1 prema zakonu eksponencijalne raspodele može se zapisati kao $X_2 \sim Exp(\lambda_{211})$ i vreme izvršavanja operacije O_{122} na mašini M_2 kao

$X_3 \sim \text{Exp}(\lambda_{122})$. Neka su zadate sledeće brojčane vrednosti: $\lambda_{111} = \frac{1}{21}$, $\lambda_{211} = \frac{1}{12}$ za mašinu M_1 i $\lambda_{122} = \frac{1}{17}$ za mašinu M_2 .

Ukupno vreme trajanja obrade operacija na mašinama, što predstavlja optimalnu vrednost funkcije cilja $stohCt_{max}$, može se odrediti kao maksimum ukupnih vremena obrade na jednoj i drugoj mašini, pri čemu ukupno vreme obrade na mašini M_1 predstavlja zbir dve slučajne promenljive X_1 i X_2 .

Prema (Lei, 2011) kada su parametri ekponencijalne raspodele različiti ($\lambda_{111} \neq \lambda_{211}$), funkcija gustine se izračunava kao:

$$f_{X_1+X_2}(z) = \begin{cases} \frac{\lambda_{111}\lambda_{211}}{\lambda_{211} - \lambda_{111}} [e^{-\lambda_{111}z} - e^{-\lambda_{211}z}], & \text{ako je } z > 0 \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases} \quad (4.19)$$

gde je $z = stohCt_{max}$, dok kumulativna funkcija raspodele se može izraziti primenom jednačine (4.20):

$$F_{X_1+X_2}(stohCt_{max}) = P(X_1 + X_2 < stohCt_{max}) = 0,95 \quad (4.20)$$

Prethodni izraz u razvijenom obliku se može napisati na sledeći način:

$$F_{X_1+X_2}(stohCt_{max}) = P(X_1 + X_2 < stohCt_{max}) = 1 - \left(\frac{\lambda_{211}}{\lambda_{211} - \lambda_{111}} e^{-\lambda_{111}stohCt_{max}} - \frac{\lambda_{111}}{\lambda_{211} - \lambda_{111}} e^{-\lambda_{211}stohCt_{max}} \right) = 0,95 \quad (4.21)$$

Jednačinama (4.20) i (4.21) definisan je uslov da zbir vremena izvršavanja operacija na mašini M_1 , predstavljen kao zbir dve slučajne promenljive $X_1 + X_2$, bude manji od ukupne vrednosti ciljne funkcije $stohCt_{max}$ sa procentualnom verovatnoćom od 95%.

U nastavku je prikazan detaljan postupak izračunavanja funkcije cilja $stohCt_{max}$ prema jednačini (4.21) uz primenu poznatih vrednosti $\lambda_{111} = \frac{1}{21}$, $\lambda_{211} = \frac{1}{12}$.

$$\left(\frac{\lambda_{211}}{\lambda_{211} - \lambda_{111}} e^{-\lambda_{111}stohCt_{max}} - \frac{\lambda_{111}}{\lambda_{211} - \lambda_{111}} e^{-\lambda_{211}stohCt_{max}} \right) = 1 - 0,95 = 0,05 \quad (4.22)$$

izračunavanje koeficijenata:

$$\frac{\lambda_{211}}{\lambda_{211} - \lambda_{111}} = \frac{7}{3} \quad \frac{\lambda_{111}}{\lambda_{211} - \lambda_{111}} = \frac{4}{3} \quad (4.23)$$

zamenom dobijenih vrednosti u jednačinu (4.21) dobija se:

$$\frac{7}{3}e^{-\frac{1}{21}stohCt_{max}} - \frac{4}{3}e^{-\frac{1}{12}stohCt_{max}} = 0.05 \quad (4.24)$$

S obzirom na to da jednačina sa eksponencijalnim funkcijama nije pogodna za analitičko rešavanje, pristupa se numeričkoj metodi. Iterativnom procenom, traži se vrednost funkcije cilja $stohCt_{max}$ koja zadovoljava datu jednačinu. Vrednosti $stohCt_{max} = 80$ minuta daje sledeće rezultate:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{80}{21}} &\approx e^{-3,81} \approx 0,0221 \\ e^{-\frac{80}{12}} &\approx e^{-6,67} \approx 0,0012 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Zamenom dobijenih vrednosti jednačine (4.25) u jednačinu (4.24), važi:

$$7 \cdot 0,0221 - 4 \cdot 0,00127 \approx 0,14962 \approx 0.15 \quad (4.26)$$

Kako je vrednost 0,14962 vrlo bliska desnoj strani jednačine 0.15, može se zaključiti da je vrednost funkcije cilja $stohCt_{max} = 80$ minuta, što zadovoljava postavljeni uslov jednačine. Iz tog razloga dobijena vrednost se može prihvatiti kao približno rešenje jednačine. U kontekstu problema, to znači da vrednost funkcije cilja $stohCt_{max} = 80$ minuta, zadovoljava nivo poverenja od 95%.

Sledeći korak jeste poređenje novo dobijene slučajne veličine $X_1 + X_2$ sa vremenom obrade na mašini M_2 koje ima oblik $X_3 \sim \mathcal{E}(\lambda_{122})$. S obzirom na to da je izvršavanje operacija na mašinama M_1 i M_2 nezavisno jedno od drugog, potrebno je definisati uslov da maksimalne vrednosti vremena izvršavanja operacija na mašinama M_1 i M_2 neće biti duža od ukupnog vremena ciljne funkcije $stohCt_{max}$. Za vrednost funkcije cilja $stohCt_{max} = 80$ minuta, koje je dobijeno u prethodnom koraku, potrebno je proveriti procentualnu verovatnoću da vreme obavljanja operacije O_{122} na mašini M_2 neće biti duže od ukupnog zbirnog vremena obavljanja operacija O_{111} i O_{211} na mašini M_1 :

$$P = (X_3 < stohCt_{max}) = 1 - e^{-\lambda_{122}stohCt_{max}} = 1 - e^{-0,0588235 \cdot 80} = 0,99 \approx 1 \quad (4.27)$$

To dalje znači da se sa procentualnom verovatnoćom od 99% može tvrditi da vreme obrade na mašini M_2 neće biti duža od vremena obrade na mašini M_1 .

Iz uslova poređenja vrednosti maksimuma na mašini M_1 i mašini M_2 sledi da je:

$$\begin{aligned} P(\max(X_1 + X_2, X_3 \leq stohCt_{max}) &= P(X_1 + X_2 \\ &\leq stohCt_{max}) \cdot P(X_3 \leq stohCt_{max}) = 0,95 \cdot 1 = 0,95 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Jednačina (4.28) pokazuje da maksimalne vrednosti vremena izvršavanja operacija na mašini M_1 i mašini M_2 neće biti duža od vrednosti funkcije cilja $stohCt_{max}$, sa nivoom poverenja od 95%.

4.2.3 Model stohastičkog planiranja i raspoređivanja resursa primenom uniformnog zakona raspodele verovatnoće

Uniformna raspodela predstavlja neprekidnu funkciju raspodele verovatnoće na intervalu $[a, b]$, gde granice intervala predstavljaju parametre raspodele, a verovatnoća događaja ima konstantnu vrednost na tom intervalu. Notacija slučajne promenljive prema zakonu uniformne raspodele može se zapisati kao $X \sim U(a, b)$, gde su a i b donja odnosno gornja granica intervala. Funkcija gustine može se predstaviti jednačinom:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{za } a \leq x \leq b \quad (4.29)$$

dok funkcija raspodele ima sledeći oblik:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{za } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{za } x \geq b \end{cases} \quad (4.30)$$

Srednja ili očekivana vrednost može se predstaviti jednačinom:

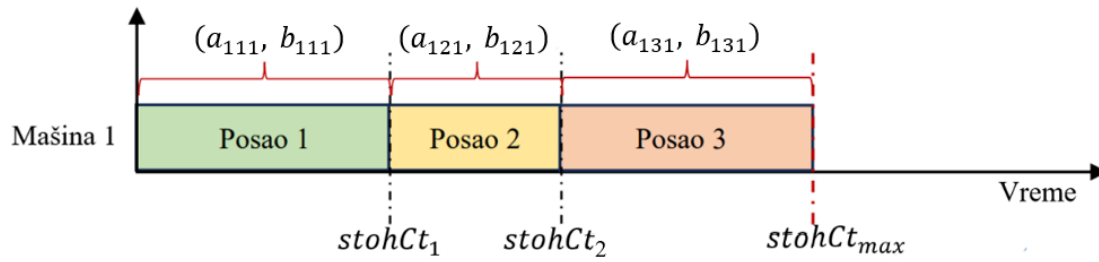
$$E(x) = \frac{a+b}{2} \quad (4.31)$$

dok je standardna devijacija predstavljena sledećom jednačinom:

$$D(x) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} \quad (4.32)$$

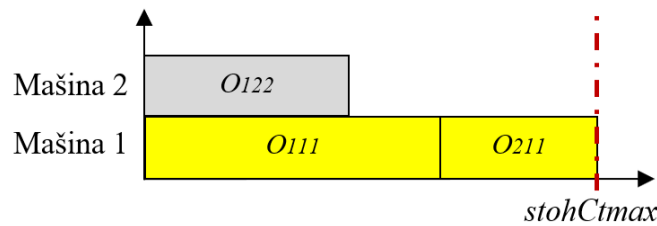
U nastavku rada detaljno je opisan slučaj problema planiranja i raspoređivanja resursa kod koga vremena obrade poslova na mašinama $stohpt_{ijk}$ predstavljaju uniformno raspodeljene slučajne promenljive. Slučajna promenljiva prema zakonu uniformne raspodele $stohpt_{ijk}$, $X \sim U(a_{ijk}, b_{ijk})$, predstavlja vreme izvršavanja operacija na mašinama. Slično kao i u prethodnim modelima funkcija cilja $stohCt_{max}$ predstavlja ukupno vreme završetka svih poslova u okviru procesa planiranja, uzimajući u obzir stohastičku prirodu vremena obrade.

Na slici 4.8 predstavljene su opisane promenljive u grafičkom obliku radi vizuelnog prikaza i lakšeg razumevanja njihovih odnosa i karakteristika.



Slika 4.8 Grafički prikaz i pojašnjenje slučajnih promenljivih i funkcije cilja

Konkretan postupak raspoređivanja poslova (operacija) na mašinama u proizvodnom procesu i implementacija parametara uniformne raspodele u taj proces prikazan je u nastavku u slučaju problema koji je prikazan na slici 4.9.



Slika 4.9 Grafički prikaz rasporeda operacija na mašinama

Kao što se može videti na slici 4.9, problem se sastoji od posla $J_1 = (O_{111}, O_{211})$, koji ima dve operacije i koje se izvršavaju na mašini M_1 i posla $J_2 = (O_{122})$ koji se izvršava na mašini M_2 i sastoji se od samo jedne operacije. Zadatak je rasporediti poslove na raspoloživim mašinama $M_k = \{M_1, M_2\}$, pri čemu svaki posao J_j ($j = 1, 2$) ima određeni broj operacija.

Prvi korak predstavlja definisanje slučajnih promenljivih koje predstavljaju vremena izvršavanja operacija na mašinama. Ukupno vreme izvršavanja operacije O_{111} na mašini M_1 u skladu sa parametrima uniformne raspodele može se zapisati u sledećem obliku $X_1 \sim U(a_{111}, b_{111}) = U(0, 21)$. Slično, ukupno vreme izvršavanja operacije O_{211} na mašini M_1 prema zakonu uniformne raspodele može se zapisati kao $X_2 \sim U(a_{211}, b_{211}) = U(21, 33)$ i ukupno vreme izvršavanja operacije O_{122} na mašini M_2 prema zakonu uniformne raspodele može se predstaviti kao $X_3 \sim U(a_{122}, b_{122}) = U(0, 17)$.

Cilj je odrediti ukupnu vrednost funkcije cilja $stohCt_{max}$. Prvi korak jeste definisanje zbira dve slučajne promenljive $X_1 \sim U(0, 21)$ i $X_2 \sim U(21, 33)$, koje se izvršavaju na istoj mašini M_1 . Kao i u prethodna dva slučaja to će biti urađeno uz uslov da procentualna verovatnoća realizacije bude 95%.

$$P(X_1 + X_2 \leq stohCt_{max}) = 0,95 \quad (4.33)$$

Jednačina (4.32) definiše zbir vrednosti slučajnih promenljiva na osnovu zakona uniformne raspodele na mašini M_1 , gde zbir slučajnih promenljiva $X_1 + X_2 = X_4 \sim U(0, 33)$, treba da bude manji ili jednak od ukupne vrednosti funkcije cilja $stohCt_{max}$ sa procentualnom verovatnoćom od 95%. Dodatno važi:

$$F(stohCt_{max}) = P(X_4 \leq stohCt_{max}) = \frac{1}{b_{141} - a_{141}} (stohCt_{max} - a_{141}) \quad (4.34)$$

Ako je $X_4 \sim U(0, 33)$ i traži se funkcija cilja $stohCt_{max}$ za $P(X_4 \leq stohCt_{max}) = 0,95$, onda važi sledeći postupak:

$$0,95 = \frac{stohCt_{max} - 0}{33 - 0} \quad (4.35)$$

$$stohCt_{max} = 0,95 \cdot 33 = 31,35 \quad (4.36)$$

iz toga važi da funkcija cilja $stohCt_{max}$, ima ukupnu vrednost na osnovu zakona uniformne raspodele $stohCt_{max} = 31,35$ minut.

Sledeći korak jeste poređenje dve slučajne veličine sa uniformnim zakonima raspodele. S obzirom na to da je izvršavanje operacija na mašinama M_1 i M_2 nezavisno jedno od drugog, potrebno je definisati uslov poređenja da maksimalne vrednosti vremena izvršavanja operacija na mašinama M_1 i M_2 neće biti duže od ukupnog vremena ciljne funkcije $stohCt_{max}$.

Ukupno vreme izvršavanja operacije O_{122} na mašini M_2 može se izračunati pomoću funkcije raspodele za vrednost $z = stohCt_{max}$:

$$P(X_3 \leq z) = \begin{cases} 0, & \text{za } z < 0 \\ \frac{z - 0}{17}, & \text{za } 0 \leq z \leq 17 \\ 1, & \text{za } z \geq 17 \end{cases} \quad (4.37)$$

Pri tome je $stohCt_{max} = 31,35 \geq 17$, što predstavlja uslov da vreme obavljanja operacije O_{122} na mašini M_2 neće biti duže od ukupnog zbirnog vremena obavljanja operacija O_{111} i O_{211} na mašini M_1 , a samim tim i od ukupne vrednosti funkcije cilja $stohCt_{max}$ sa procentualnom verovatnoćom od 95%.

$$stohCt_{max} = 31,35 \geq 17, \text{ sledi da je } P(X_3 \leq stohCt_{max}) = 1 \quad (4.38)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} P(\max(X_1 + X_2 = X_4, X_3 \leq stohCt_{max}) &= P(X_4 \\ &\leq stohCt_{max}) \cdot P(X_3 \leq stohCt_{max}) = 0,95 \cdot 1 = 0,95 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Jednačine (4.38) i (4.39) pokazuju da mašina M_1 i mašina M_2 neće raditi duže od vrednosti funkcije cilja $stohCt_{max}$ sa nivoom poverenja od 95%.

4.3 SUMIRANJE FUNKCIJA PRIMENOM METODE KONVOLUCIJE

Sumiranje nezavisnih empiriskih funkcija predstavlja veliki izazov, samim tim i veliki motiv prilikom implementacije matematičkog operatera konvolucija na primeru problema planiranja i raspoređivanja resursa. Jedan od prvih naučnika koji je razvio matematički operator konvolucija je matematičar Parzen (Parzen, 1960). Konvolucija je matematički operator koji sabiranjem dve nezavisne funkcije X i Y proizvodi treću funkciju Z koja predstavlja zbir i količinu poklapanja sumiranih funkcija (Evans i Leemis, 2004). Konvolucija predstavlja ključnu operaciju u teoriji verovatnoće i koristi se u različitim granama matematike, fizike, kao i u mnogim drugim naučnim disciplinama.

Opšti oblik konvolucije zavisi od toga da li je definisana za kontinualne ili diskretne funkcije. Kontinualna konvolucija koristi integraciju za funkcije definisane u neprekidnom domenu, dok diskretna konvolucija koristi sumiranje nad konačnim ili beskonačnim nizovima diskretnih podataka (Thomas, 1977).

Kontinualna konvolucija koristi integral kako bi izračunala preklapanje dve funkcije u neprekidnom domenu, što je korisno u analizi signala, sistemima sa neprekidnim podacima i modeliranju funkcija gustine verovatnoće. Opšti oblik prikazan je sledećom jednačinom (Parzen, 1960):

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (4.40)$$

gde $f(\tau)$ predstavlja funkciju gustine ili bilo koju drugu funkciju u zavisnosti od primenjene oblasti. Funkcija $g(t - \tau)$ predstavlja transformisanu verziju funkcije $f(\tau)$, pri čemu se vrši simetrična transformacija oko ose τ (tj. zamenjuje se τ sa $-\tau$), nakon čega se funkcija pomera za vrednost t . Pri čemu τ predstavlja promenljivu integracije a t vreme.

U nastavku, prikazan je konkretan primer kontinualne konvolucije sa dve funkcije definisane u neprekidnom vremenskom domenu:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{ostalo} \end{cases} \quad (4.41)$$

$$g(t) = e^{-t}u(t) \quad (4.42)$$

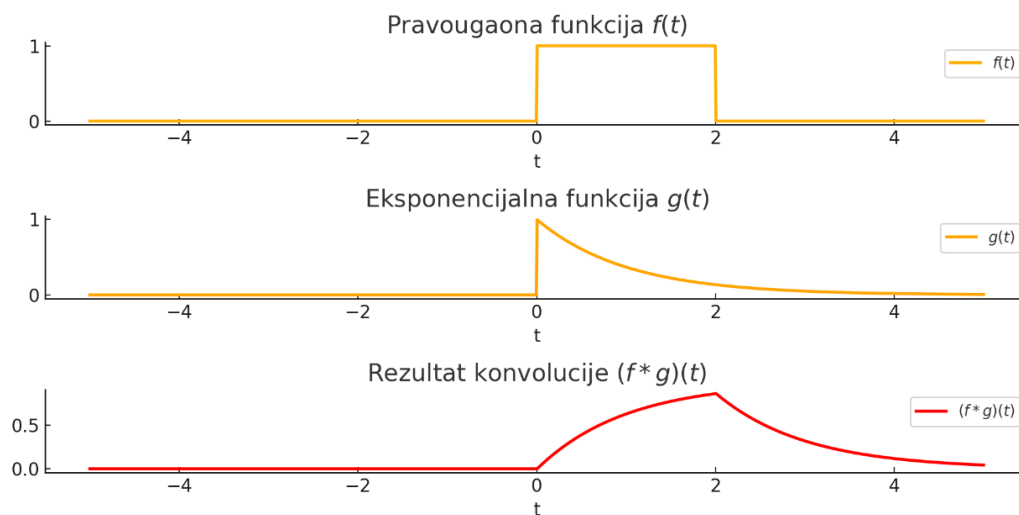
gde je $u(t)$ jedinična stepenasta funkcija koja je definisana kao:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

Osnovi cilj je izračunati konvoluciju slučajnih promenljivih primenom jednačine (4.40). Sumiranjem dve nezavisne funkcije, koje su predstavljene jednačinama (4.41) i (4.42) i primenom kontinualne konvolucije, dobijena je ukupna vrednost funkcije $(f * g)(t)$ u sledećem obliku:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} (e^2 - 1)e^{-t} & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Grafički prikaz dobijenih rezultata predstavljen je na slici 4.10, gde su prikazane raspodele slučajni promenljivih pre i nakon primene kontinualne konvolucije.



Slika 4.10 Grafički prikaz dobijenih rezultata primenom kontinualne konvolucije

Diskretna konvolucija se primenjuje na diskretne nizove podataka i računa se kao suma proizvoda elemenata dve sekvence. Opšti oblik predstavljen je jednačinom (Parzen, 1960):

$$(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n - k] \quad (4.45)$$

gde $f[k]$ predstavlja bilo koju numeričku sekvencu zadatu u vidu niza podataka. Diskretna funkcija $g[n - k]$, predstavlja transformisanu verziju funkcije $f[k]$. Konkretno, indeks funkcije gustine g menja se iz k u $n - k$, što omogućava poklapanje funkcije g sa funkcijom f pri različitim vrednostima n , gde n predstavlja indeks izračunavanja rezultata diskretne konvolucije $(f * g)[n]$, tj. pokazuje kako se konvolucija menja za različite vrednosti. Pri tome k predstavlja pomoćnu celobrojnu promenljivu. U nastavku, prikazan je primer diskretne konvolucije sa dve diskretne funkcije definisane na skupu celih brojeva:

$$f[n] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

$$g[n] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Cilj je izračunati diskretnu konvoluciju primenom jednačine (4.45). Pošto su $f[n]$ i $g[n]$ funkcije definisane za konačan broj vrednosti, sumiranje se vrši samo u opsegu gde se funkcije preklapaju. Postupak izračunavanja primenom diskretne konvolucije za različite vrednosti n prikazan je u nastavku:

$$\text{Za } n = 0: \text{ vazi } (f * g)[0] = f[0] \cdot g[0] = (1) \cdot (1) = 1 \quad (4.48)$$

$$\text{Za } n = 1: \text{ vazi } (f * g)[1] = f[0] \cdot g[1] + f[1] \cdot g[0] = (1) \cdot (1) + (2) \cdot (1) = 3 \quad (4.49)$$

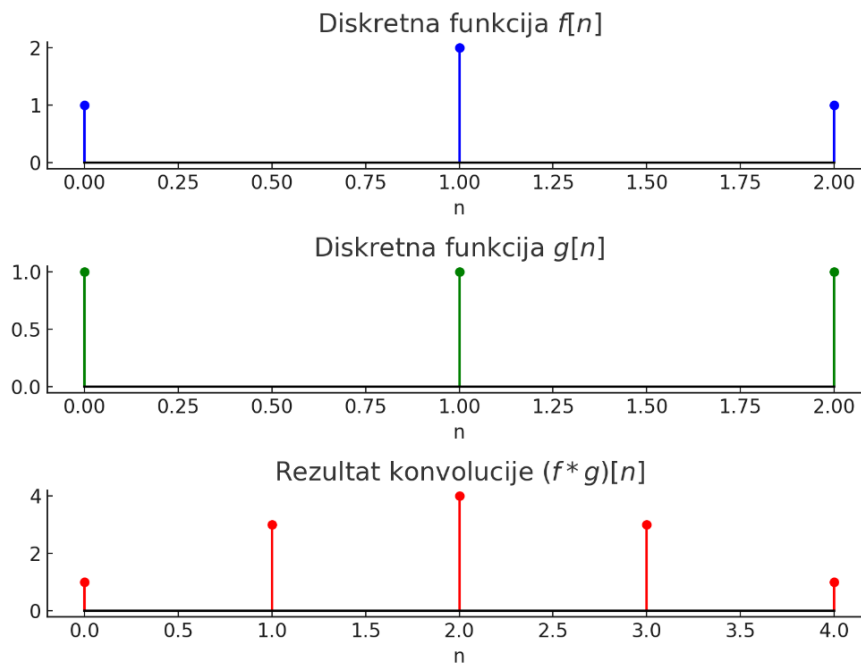
$$\vdots$$

$$\text{Za } n = 4: \text{ vazi } (f * g)[4] = f[2] \cdot g[2] = (1) \cdot (1) = 1 \quad (4.50)$$

Sumiranjem dve diskretne funkcije definisane na skupu celih brojeva i primenom diskretne konvolucije dobijen je zbir u sledećem obliku:

$$(f * g)[n] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

U nastavku na slici 4.11 predstavljen je grafički prikaz dobijenih funkcija pre i nakon primene operatora diskretne konvolucije.



Slika 4.11 Grafički prikaz dobijenih rezultata primenom diskretne konvolucije

4.3.1 Model stohastičkog planiranja i raspoređivanja resursa zasnovan na diskretnoj konvoluciji

U oblasti planiranja i raspoređivanja resursa često se susreću stohastičke promene vremena obrade poslova, što zahteva primenu verovatnosnih metoda za precizno modeliranje i optimizaciju. U nastavku rada, korišćena je diskretna konvolucija kako bi se odredilo ukupno vreme funkcije cilja $Z = stohCt_{max}$. Konkretno, razmatran je zbir vremena dva nezavisne operacije, čije vreme trajanja ima diskretne verovatnoće.

Prvi korak jeste definisanje nezavinih slučajnih promenljivih X i Y . U ovom slučaju promenljiva X predstavlja vreme trajanja prve operacije sa verovatnoćom događaja $P(X)$, dok promenljiva Y predstavlja vreme trajanje druge operacije sa verovatnoćom događaja $P(Y)$. Za dve diskretne slučajne promenljive X i Y , raspodela njihovog zbira Z izračunava se primenom diskretne konvolucije, koja je definisana jednačinom (Evans i Leemis, 2004):

$$P(Z = z) = \sum_k P(X = n)P(Y = z - n) \quad (4.52)$$

gde $P(Z = z)$ predstavlja verovatnoću da zbir Z može imati vrednost z sa određenom verovatnoćom. Izraz $P(X = n)$ predstavlja verovatnoću da promenljiva X može imati vrednost k sa određenom verovatnoćom, dok $P(Y = z - n)$ predstavlja verovatnoću da promenljiva Y može imati vrednost $z - n$ sa određenom verovatnoćom. Jednačina (4.45) koja uključuje funkcije $f[k]$ i $g[k]$ u ovom slučaju su $P(X)$ i $P(Y)$ i predstavljaju verovatnoće, dok promenljiva n predstavlja zbir dve slučajne promenljive.

U nastavku rada predstavljeni su koraci primene diskretne konvolucije na konkretnom primeru planiranja i raspoređivanja poslova.

Prvi korak: Prvi korak u primeni diskretne konvolucije jeste definisanje slučajnih promenljivih. Za svaku slučajnu promenljivu potrebno je odrediti odgovarajuće verovatnoće:

$$P(X) = \begin{Bmatrix} 6,600 & 6,800 & 7,000 & 7,200 & 7,400 \\ 0,0434 & 0,1304 & 0,21739 & 0,04347 & 0,17391 \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

$$P(Y) = \begin{Bmatrix} 10,600 & 10,800 & 11,000 & 11,200 & 11,400 \\ 0,0952 & 0,2380 & 0,1428 & 0,0952 & 0,04761 \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

Drugi korak: Primena operatora diskretene konvolucije:

U ovom koraku sledi primena operatora diskretne konvolucije u svrhu izračunavanja raspodele zbira slučajnih promenljivih. Za ovaj proračun koristi se operator konvolucije, koji je prethodno definisan jednačinom (4.52).

To znači da se za svaku moguću vrednost zbira slučajnih promenljivih Z iz skupa:

$$Z = [17,200 \ 17,400 \ 17,600 \ 17,800 \ 18,00 \ 18,200 \ 18,400 \ 18,600 \ 18,800] \quad (4.55)$$

vrši sabiranje svih mogućih kombinacija vrednosti promenljivih X i Y .

Za svaku kombinaciju $X = n$ i $Y = z - n$, množe se odgovarajuće verovatnoće $P_X(k)$, $P_Y(z - n)$, a zatim se ti proizvodi sabiraju za sve dozvoljene vrednosti n . Na taj način se dobija konačna raspodela verovatnoća za zbir $Z = X + Y$.

Praktična realizacija objašnjenog postupka prikazana je u daljem tekstu:

Ako je $z = 17,2$, tada se za svaku vrednost promenljive n iz skupa X računa razlika: $17,2 - n$.

$$P_Z(17,2) = \sum_k P_X(n)P_Y(17,2 - n) \quad (4.56)$$

Zatim se proverava da li ta razlika pripada skupu mogućih vrednosti promenljive Y . Na primer:

- Za $n = 6,6$:

$$17,2 - 6,6 = 10,6 \quad (\text{pripada skupu } Y)$$

Vrednost 10,6 pripada skupu

promenljive Y sa verovatnoćom:

$$P_Y(10,6) = 0,09523$$

Sličnim postupkom proveravaju se i ostale vrednosti promenljive n :

- Za $n = 6,8$:

$$17,2 - 6,8 = 10,4 \text{ (ne pripada skupu } Y)$$

- Za $n = 7$:

$$17,2 - 7 = 10,2 \text{ (ne pripada skupu } Y)$$

- Za $n = 7,2$:

$$17,2 - 7,2 = 10 \text{ (ne pripada skupu } Y)$$

- Za $n = 7,4$:

$$17,2 - 7,4 = 9,8 \text{ (ne pripada skupu } Y)$$

Iz proračuna se može zaključiti da samo za vrednost $n = 6,6$ postoji odgovarajuća vrednost u skupu Y . Dakle, verovatnoća za $P_Z(17,2)$ dobija se sledećom jednačinom:

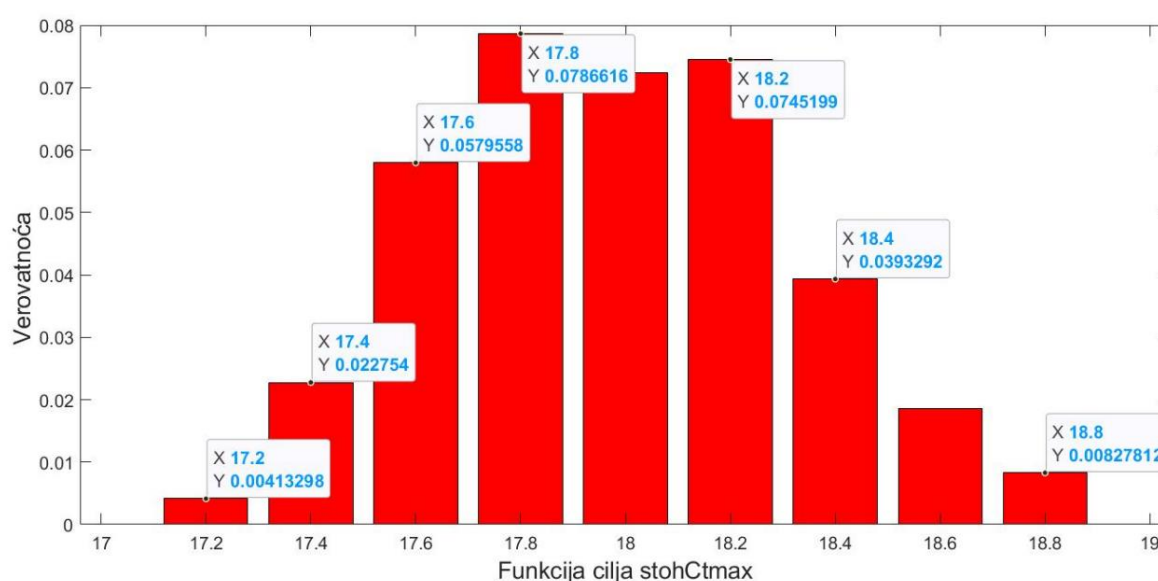
$$P_Z(17,2) = P_X(6,6) \cdot P_Y(10,6) = 0,0434 \cdot 0,09523 = 0,0041 \quad (4.57)$$

Nakon izračunavanja vrednosti $z - n$ za sve moguće vrednosti promenljive X , na sličan način se određuju pripadajuće verovatnoće zbira Z . Ukupna vrednost raspodele P_Z prikazana je izrazom 4.58, čime se završava postupak diskretne konvolucije za date slučajne promenljive.

$$P(Z) = \{17,200 \ 17,400 \ 17,600 \ 17,800 \ 18,000 \ 18,200 \ 18,400 \ 18,600 \ 18,800\} \quad (4.58)$$

$$\{0,0041 \ 0,0228 \ 0,0580 \ 0,0787 \ 0,0720 \ 0,0740 \ 0,0393 \ 0,0180 \ 0,0083\}$$

Grafički prikaz vrednosti funkcije cilja $Z = stohCt_{max}$, koja predstavlja raspodelu verovatnoća dobijenu primenom diskretne konvolucije, može se videti na slici 4.12.



Slika 4.12 Grafički prikaz vrednosti funkcije cilja primenom operatora diskretne konvolucija na primeru planiranja i raspoređivanja poslova

4.4 IMPLEMENTACIJA FAZI LOGIKE U MODELIMA PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA RESURSA

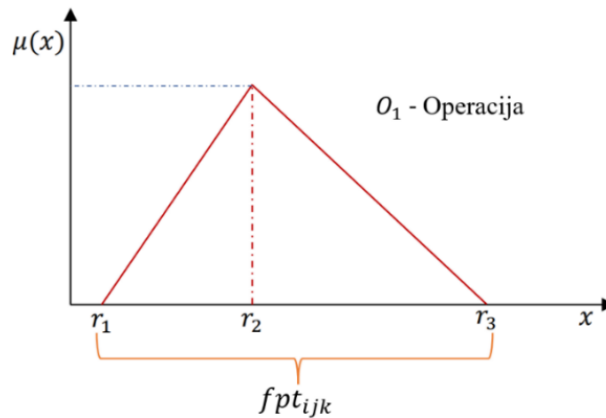
Fazi logika je matematička teorija koja se koristi za modeliranje neizvesnosti u procesima donošenja odluka. U konvencionalnoj logici, iskazi su obično istiniti ili lažni, dok fazi logika omogućava iskaze koji mogu biti delimično istiniti. Teoriju fazi skupova je predložio (Zadeh, 1965) sa namerom da generalizuje klasično shvatanje skupa. Umesto da elementi skupa pripadaju ili ne pripadaju skupu, kao u klasičnoj logici, fazi skupovi omogućavaju da elementi imaju stepen pripadnosti između 0 i 1. Ova kombinacija pruža bolje rezultate u situacijama kada su podaci neprecizni ili neizvesni, a kriterijumi za donošenje odluka su kompleksni i međusobno povezani.

4.4.1 Algebarske operacije nad fazi brojevima

U klasičnoj matematici, brojevi se obično smatraju tačnim i preciznim, npr. broj 5 predstavlja preciznu vrednost koja je istinita ili lažna. Međutim, u stvarnom svetu često se susrećemo sa situacijama u kojima informacije nisu potpune ili tačne, već postoje samo delimično tačne informacije sa određenim stepenom neizvesnosti. Fazi brojevi omogućavaju modeliranje ovakvih situacija.

U daljem tekstu biće razmatrani samo trougaoni fazi brojevi, zbog njihove jednostavnosti i lakoće modeliranja. Trougaoni fazi brojevi se sastoje od tri komponente: srednje vrednosti, donje granice i gornje granice (Laarhoven i Pedrycz, 1983). Vrednosti između donje i gornje granice predstavljaju stepen pripadnosti broju. Trougaoni fazi brojevi (r_1, r_2, r_3) predstavljaju raspon mogućih vrednosti za određeni parametar ili promenljivu (Stanković i Petrović, 2025).

U modelima planiranja i raspoređivanja resursa vrednost r_2 predstavlja očekivanu ili srednju vrednost vremena obavljanja operacija na mašinama, dok r_1 i r_3 predstavljaju najraniju i najkasniju granicu intervala tog vremena. Oblik funkcije pripadnosti u slučaju trougaonog fazi broja, kojom se predstavlja neizvesnost događaja pri izvršavanju poslova na mašinama, može se grafički prikazati kao na slici 4.13 (Stanković i Petrović, 2025).



Slika 4.13 Grafički prikaz trougaonog fazi broja

Funkcija pripadnosti $\mu(x)$ može se predstaviti u sledećem obliku (Stanković i Petrović, 2025):

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq r_1 \\ \frac{x - r_1}{r_2 - r_1}, & r_1 < x \leq r_2 \\ \frac{r_3 - x}{r_3 - r_2}, & r_2 < x < r_3 \\ 0, & x \geq r_3 \end{cases} \quad (4.59)$$

Kako bi se odredilo ukupno vreme trajanja obrade svih operacija na jednoj mašini, nekog razmatranog problema planiranja i raspoređivanja resursa, potrebno je izvršiti sumiranje pojedinačnih vremena trajanja obrada na toj mašini (Stanković i Petrović, 2025). U tom smislu, u daljem tekstu prikazane su osnovne algebarske operacije koje se mogu primeniti na dva trougaona fazi broja.

Neka su zadata dva trougaona fazi broja, koja predstavljaju vremena trajanja obrade pojedinačnih operacija na istoj mašini, u obliku $O_1(r_1, r_2, r_3)$ i $O_2(r_4, r_5, r_6)$.

Operacija sabiranja trougaonih fazi brojeva:

$$\widetilde{O}_1(+) \widetilde{O}_2 = (r_1, r_2, r_3)(+)(r_4, r_5, r_6) = (r_1 + r_4, r_2 + r_5, r_3 + r_6) \quad (4.60)$$

Operacija oduzimanja trougaonih fazi brojeva:

$$\widetilde{O}_1(-) \widetilde{O}_2 = (r_1, r_2, r_3)(-)(r_4, r_5, r_6) = (r_1 - r_4, r_2 - r_5, r_3 - r_6) \quad (4.61)$$

Operacija množenja trougaonih fazi brojeva:

$$\widetilde{O}_1(\cdot) \widetilde{O}_2 = (r_1, r_2, r_3)(\cdot)(r_4, r_5, r_6) = (r_1 \cdot r_4, r_2 \cdot r_5, r_3 \cdot r_6) \quad (4.62)$$

Operacija deljenja trougaonih fazi brojeva:

$$\widetilde{O}_1(/) \widetilde{O}_2 = (r_1, r_2, r_3)(/)(r_4, r_5, r_6) = \left(\frac{r_1}{r_4}, \frac{r_2}{r_5}, \frac{r_3}{r_6}\right) \quad (4.63)$$

Recipročna vrednost trougaonih fazi brojeva:

$$\widetilde{O}_1^{-1} = (r_1, r_2, r_3)^{-1} = \left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}\right) \quad (4.64)$$

4.4.2 Kriterijumi poređenja fazi brojeva

Naredni korak u implementaciji fazi brojeva u modele planiranja odnosi se na definisanje kriterijuma za poređenje dva fazi broja. Ovo je neophodno kako bi se definisala procedura za poređenje ukupnih vremena trajanja obrade na dve različite mašine. Da bi se pravilno izvršilo rangiranje i sortiranje fazi brojeva u literaturi se može naći postupak koji se sastoji od tri kriterijuma (Wang, 2013), (Stanković i Petrović, 2025):

Kriterijum 1: Poređenje dva fazi broja po prvom kriterijumu $K_1(O_1) > K_1(O_2)$:

$$K_1(O_1) = \frac{(r_1 + 2r_2 + r_3)}{4}$$

$$K_1(O_2) = \frac{(r_4 + 2r_5 + r_6)}{4} \quad (4.65)$$

Kriterijum 2: Ukoliko su vrednosti fazi broja prema kriterijumu K_1 jednake, poređenje se nastavlja prema kriterijumu K_2 , pri čemu važi:

$$\begin{aligned} K_2(O_1) &= r_2, K_2(O_2) = r_5 \\ K_2(O_1) &> K_2(O_2) \text{ onda je } O_1 > O_2 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Kriterijum 3: Ako su vrednosti fazi brojeva prema kriterijumima K_1 i K_2 i dalje jednake, konačno rangiranje se sprovodi prema kriterijumu K_3 , gde važi:

$$\begin{aligned} K_3(O_1) &= r_3 - r_1, K_3(O_2) = r_6 - r_4 \\ K_3(O_1) &> K_3(O_2) \text{ onda je } O_1 > O_2 \end{aligned} \quad (4.67)$$

4.5 METAHEURISTIČKE METODE OPTIMIZACIJE ZA REŠAVANJE PROBLEMA PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA RESURSA

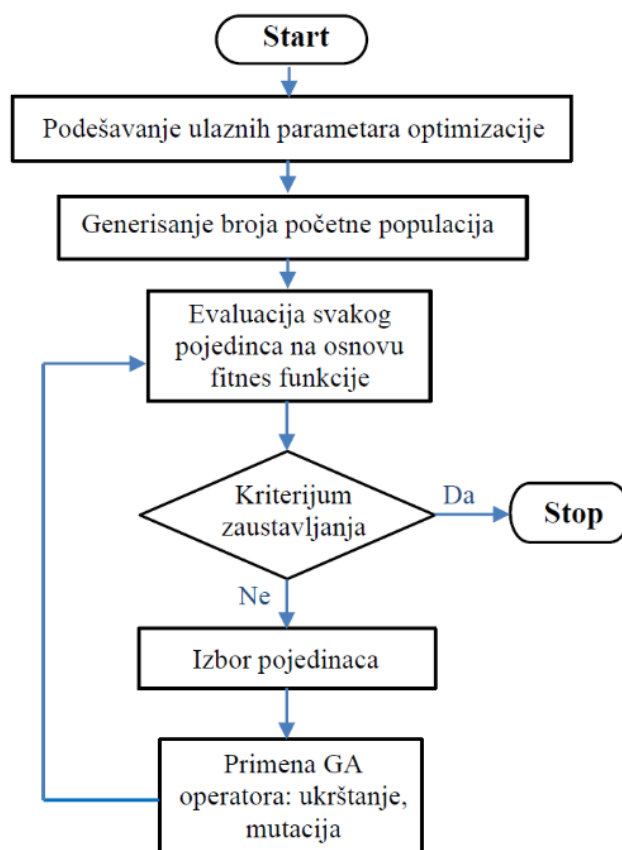
Metaheuristika predstavlja viši nivo heuristike i koristi se za određivanje lokalnog minimuma ili maksimuma u zavisnosti od funkcije cilja. Metaheuristika se prvi put pominje još davne 1986.godine (Glover, 1986).

Metaheurističke metode optimizacije predstavljaju snažne algoritme koji se koriste za rešavanje složenih optimizacionih problema, često tamo gde klasične matematičke metode nisu efikasne. Ove metode zasnovane su na strategijama pretrage koje omogućavaju nalaženje približno optimalnih rešenja u prihvatljivom vremenskom okviru. Različite metaheurističke metode optimizacije koriste različite, specifične principe inspirisane prirodnim ili društvenim fenomenima.

Ključna prednost metaheuristika leži u njihovoj sposobnosti da izbegnu lokalne minimume i istraže veliki prostor mogućih rešenja, čime se povećava verovatnoća pronalaženja globalnog optimuma. Zbog svoje fleksibilnosti i primenljivosti u različitim domenima, metaheurističke metode često se koriste u inženjerstvu, logistici, ekonomiji i veštačkoj inteligenciji.

4.5.1 Genetski algoritam

Genetski algoritam (GA) jedan je od najčešće primenjivanih metaheurističkih metoda, kod koga osnovna ideja leži u procesu evolucije. GA prvi put se pominje šesdesetih i sedamdesetih godina prošlog veka od strane poznatog naučnika Hollanda (Holland, 1962). Opšti koraci GA predstavljeni su na slici 4.14.



Slika 4.14 Grafički prikaz dijagrama toka GA

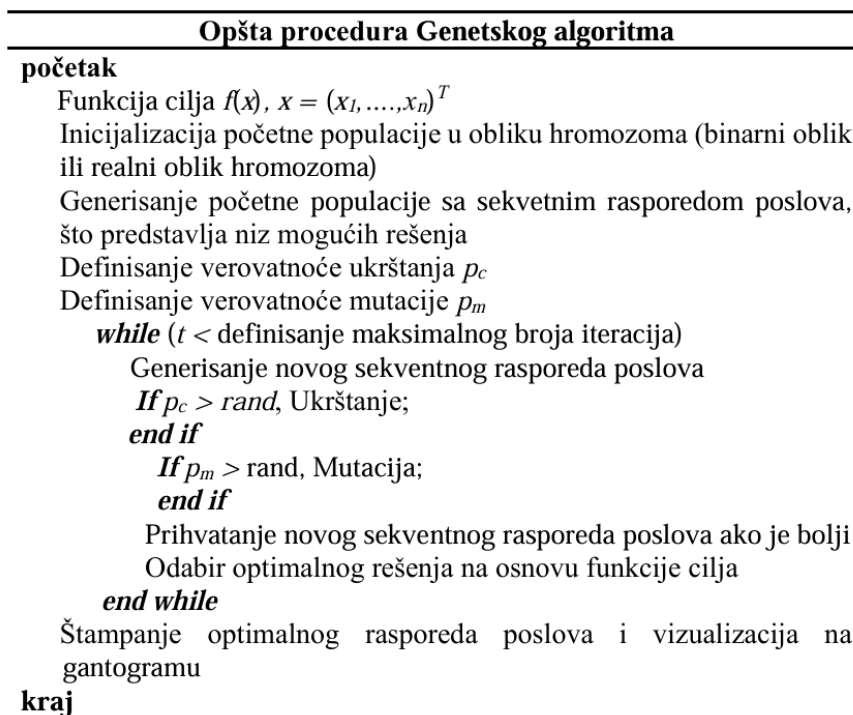
Prvi i osnovni korak u postupku uključuje podešavanje ulaznih parametara algoritma, koji imaju značajan uticaj na funkciju cilja. Drugi korak podrazumeva nasumično generisanje početne populacije, dok treći korak zahteva izračunavanje fitnes funkcije za svaku jedinku u populaciji kako bi se omogućilo rangiranje hromozoma prema njihovom doprinosu funkciji cilja.

Naredni korak u proceduri GA, poznat kao korak genetičkih operatora, predstavlja jednu je od najkritičnijih faza u celokupnom procesu. U ovom koraku primenjuju se sledeći operatori:

- selekcija,
- ukrštanje,
- mutacija.

Osnova uloga pomenutih operatora kod GA algoritma je: proces selekcije bira najbolje jedinke na osnovu njihove prilagođenosti, proces ukrštanja kombinuje delove dva roditelja da bi stvorilo potomke dok mutacija unosi male nasumične promene kako bi se očuvala raznolikost i istražila nova moguća rešenja. Primena GA za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa može se videti u autorskim radovima (Stanković i sar.,

2019), (Stanković i sar., 2020), (Stanković i sar., 2020), (Stanković i sar., 2021), (Stanković i sar., 2022), (Marković i sar., 2024), (Stanković i Petrović, 2025). Na slici 4.15 prikazana je opšta procedura i pseudokod GA za optimizaciju problema planiranja i raspoređivanja resursa (Yang, 2010), (Stanković i sar., 2022).



Slika 4.15 Opšta procedura GA

4.5.2 Metoda simuliranog kaljenja

Kao što je ranije rečeno, metaheuristički algoritmi oponašaju prirodne procese. U slučaju metode simuliranog kaljenja (SA) to je simulacija procesa kaljenja materijala. Algoritam SA prvi put je predložen od strane Kirkpatrick-a i njegovih saradnika (Kirkpatrick i sar., 1983). Osnovna ideja je simulacija procesa hlađenja materijala u kojem se materijal zagreva do visoke temperature, a zatim polako hladi dostižući stabilno stanje (Marković i sar., 2023).

Proces hlađenja kontroliše se primenom faktora α ($0 < \alpha < 1$), pri čemu se temperatura u svakoj iteraciji smanjuje prema sledećoj jednačini (Petrović, 2013):

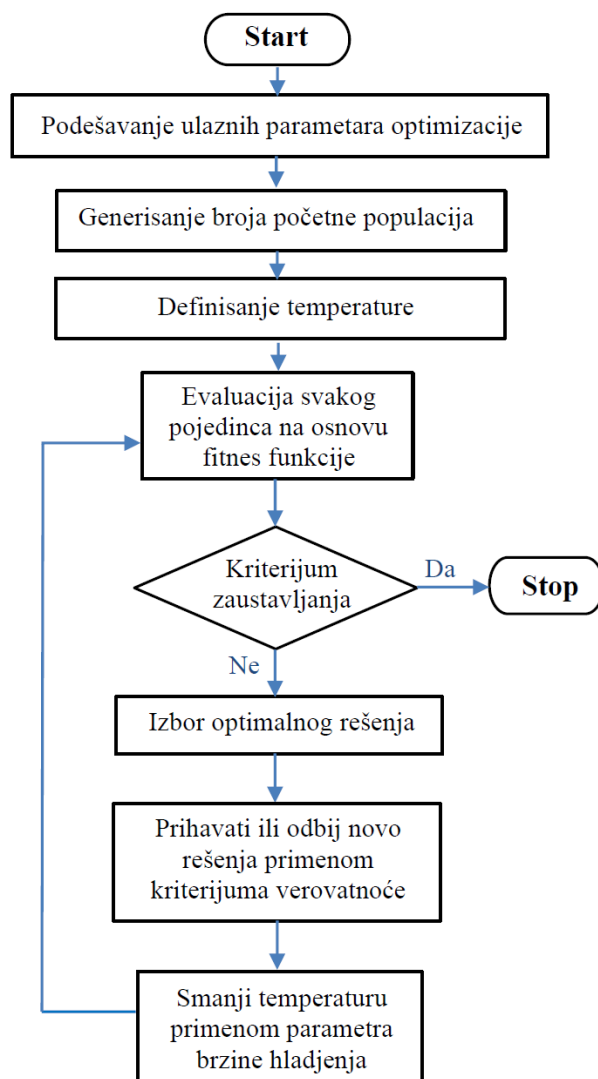
$$T_{(i)} = T_0 \cdot \alpha^i \quad (4.68)$$

gde je T_0 - početna temperature, α – faktor hlađenja, i – trenutni broj iteracija.

Kako "temperatura" opada, verovatnoća prihvatanja nedovoljno dobrih rešenja se smanjuje, što vodi ka optimalnom rešenju. Ovakva procedura pretrage optimalnih rešenja

je naročito korisna u planiranju i raspoređivanju resursa, gde postoji veliki broj sekvetnih kombinacija (poslova, operacija, mašina) i ograničenja, a cilj je pronaći dovoljno dobro rešenje u razumnom vremenskom roku.

Procedura izvršavanja SA algoritma najjasnije se može predstaviti grafičkom prezentacijom dijagrama toka, što je prikazano na slici 4.16 (Kshirsagar i sar., 2020).



Slika 4.16 Grafički prikaz dijagrama toka SA algoritma

Algoritam SA se često koristi u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa zbog svoje sposobnosti da pretražuje veliki prostor rešenja i prevazilazi lokalne minimume. Konkretna primena algoritma SA za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa predstavljena je u autorskim radovima (Stanković i sar., 2020), (Marković i sar., 2020), (Stanković i sar., 2019).

Na slici 4.17 predstavljena je opšta procedura i pseudokod algoritma SA kroz nekoliko koraka (Yang, 2010), (Stanković i sar., 2020), (Marković i sar., 2023).

Opšta procedura simularnog kaljenja**početak**Funkcija cilja $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_p)^T$ Definisati početnu temperaturu T_0 i početno inicijlno rešenje $x^{(0)}$ Podesiti konačnu temperaturu T_{fe} i maksimalni broj iteracija $maxIter$ Definisati postepeni raspored hladenja $T - \alpha T$, ($0 < \alpha < 1$)**While** ($T > T_f$ i $n < maxIter$)Nasumično pomeranje na novim lokacijama: $x_{n+1} = x_n + rand$ Izračunaj $\Delta f = f_{n+1}(x_{n+1}) - f_n(x_n)$,

Prihvati novo moguće rešenje ako je bolje od prethodnog

If ako nije bolje rešenje onda generiši novi random broj r Prihvati ako je $p = \exp[-\Delta f/T] > r$ **end if**sačuvaj najbolje rešenje x^* i f^* $n = n+1$ **end while**

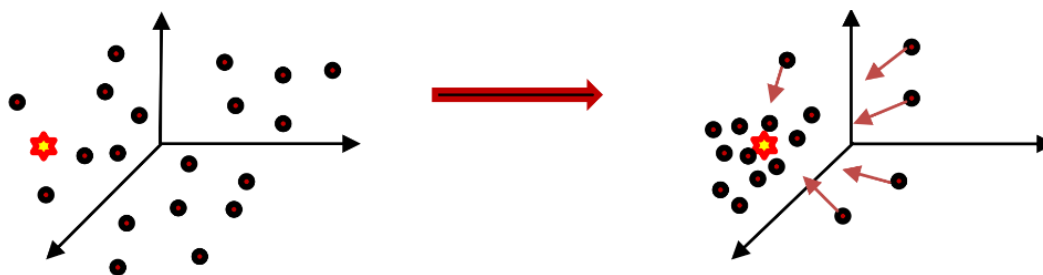
Štampanje optimalnog rasporeda poslova i vizualizacija na gantogramu

kraj

Slika 4.17 Opšta procedura SA algoritma

4.5.3 Optimizacija metodom rojeva čestica

Optimizacija rojem čestica (PSO) predstavlja metodu optimizacije inspirisanu kolektivnim ponašanjem rojeva u prirodi. Ova metoda se zasniva na dinamičkom kretanju skupa čestica kroz definisani prostor rešenja, pri čemu svaka čestica prilagođava svoju poziciju na osnovu sopstvenog iskustva i iskustva celokupnog roja. Na slici 4.18 prikazan je grafički prikaz kretanja čestica u pravcu optimalnog rešenja, čime je prikazana opšta procedura algoritma (Stanković i sar., 2020).



Slika 4.18 Opšta procedura i kretanje čestica u pravcu optimalnog rešenja

Proces konvergencije rešenja ostvaruje se usmeravanjem kretanja čestica ka globalno optimalnoj vrednosti funkcije cilja, čime se postiže efikasna pretraga prostora rešenja i povećava verovatnoća pronalaska optimalnog rešenja.

PSO algoritam je prvi put predložen od strane autora Kennedy i Eberhar (Kennedy i Eberhar, 1995). Ključni faktori koji su osnova funkcionisanja PSO algoritma su: brzina kretanja i položaj čestica. Položaj čestica predstavljen je kao $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD})$, dok

brzina kretanja čestica predstavljena je kao $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD})$. Položaj svih čestica tokom pretrage optimalnog rešenja $X_{k+1}^i, k + 1$ može se izračunati sledećom izrazom (Yang, 2010):

$$X_{k+1}^i = x_k^i + V_{k+1}^i \Delta t \quad (4.69)$$

gde je X_{k+1}^i pozicija čestice i u iteraci $k + 1$, Δt predstavlja vremenski interval pretrage, V_{k+1}^i brzinu čestice i u iteraciji $k + 1$, dok x_k^i predstavlja poziciju iste čestice u prethodnoj iteraciji k .

Brzina kretanja čestice predstavljena je jednačinom (Stanković i sar., 2020):

$$V_{k+1}^i = \omega V_k^i + c_1 r_1 (P_{Bi} - x_k^i) / \Delta t + c_2 r_2 (P_g - x_k^i) / \Delta t \quad (4.70)$$

gde je ω inercijalni faktor, reguliše uticaj prethodne brzine, r_1 i r_2 predstavljaju nasumične vrednosti iz intervala $[0,1]$, koje uvode stohastičku komponentu u kretanje čestica. Parametri c_1 i c_2 predstavljaju parametre učenja informacija tokom kretanja čestica, dok P_{Bi} , predstavlja najbolju poziciju svake čestice.

Primena PSO algoritma za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa detaljno je prikazna u autorskim radovima: (Stanković i sar., 2019), (Stanković i sar., 2020), (Stanković i sar., 2020), (Stanković i sar., 2022). Na slici 4.19 predstavljena je opšta procedura i pseudokod PSO algoritma kroz nekoliko koraka (Yang, 2010), (Stanković i sar., 2020).

Opšta procedura optimizacijom rojem čestica

početak

Funkcija cilja $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_p)^T$

Definisanje lokacije x_i i brzine v_i za n čestica.

Pronađi g^* iz funkcije $\min\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ (at $t = 0$)

While (kriterijum)

$t = t + 1$ (pseudo brojač ukupnog vremena i broja iteracija)

for petlju n svih čestica za sve dimenzije p

Generisanje novih brzina v^{t+1}_i

Izračunaj nove kolokcije čestica $x^{t+1}_i = x^t_i + v^{t+1}_i$

Izračunaj funkciju cilja na novim lokacijama x^{t+1}_i

Izdvoji najbolje rešenje za svaku česticu x^*_i

end for

Generiši optimalano rešenje g^*

end while

Prikaži izlazne optimalne rezultate x^*_i i g^*

Štampanje optimalnog rasporeda poslova i vizualizacija na gantogramu

kraj

Slika 4.19 Opšta procedura PSO algoritma

4.5.4 Optimizacija metodom kolonije mrava

Optimizacija kolonijom mrava (ACO) spada u grupu algoritama koji oponaša prirodni proces kretanja mrava, odnosno process pronalaženja hrane ili najkraćeg puta od tačke A do izvora hrane - tačke B. Ovaj fenomen pronalaženja najkraćeg puta u prirodnom okruženju je složen proces pretrage, gde mravi kao skup jedinki razmenjuju informacije o svom kretanju na osnovu fenomena kolektivne inteligencije. Informacije o kretanju svake jedinke ostvaruju se na osnovu ostavljanja traga u vidu hemijske supstance u nauci poznatoj pod nazivom feromon (Di Caro i sar., 2008). Na ovaj način mravi međusobno komuniciraju i na osnovu ovog principa dolaze do izvora hrane – optimalnog rešenja. Na slici 4.20 predstavljena je opšta procedura i pseudokod ACO algoritma kroz nekoliko koraka (Yang, 2010), (Stanković i sar., 2020).

Opšta procedura optimizacijom kolonijom mrava
početak Funkcija cilja $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ [$f(x_{ij})$] za problem planiranja i raspoređivanja poslova $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}$ Definisanje količine feromona τ While (kriterijum) for za sve mašine ili čvorove Generiši nova rešenja Definiši nova rešenja Označi najbolje lokacije sa količinom feromona $\delta\varphi_{ij}$ Ažuriraj feromon: $\varphi_{ij} = (1-\lambda) \varphi_{ij} + \delta\varphi_{ij}$ end for Pretraga najboljeg (optimalnog) rešenja end while Generiši najbolje rešenje u zavisnosti od količine feromona Štampanje optimalnog rasporeda poslova i vizualizacija na gantogramu kraj

Slika 4.20 Opšta procedura ACO algoritma

Konkretna primena ACO algoritma za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa može se videti u autorskim radovima (Stanković i sar., 2019), (Marković, 2019), (Stanković i sar., 2020), (Stanković i sar., 2022).

4.5.5 Optimizacija metodom veštačke kolonije pčela

Optimizacija veštačke kolonije pčela (ABC) predstavlja metodu optimizacije koja oponaša prirodni proces kolonije pčela tokom portage za hranom i pronalaženje optimalne putanje tokom kretanja. Tokom pretrage optimalne putanje, kolonije pčela su podeljene u tri grupe (Yang, 2010):

- pčele radilice koje su zadužene isključivo za pronalaženje hrane,

- pčele posmatrači koje imaju ulogu u nadgledanju drugih pčela,
- pčele izviđači pripadaju trećoj grupi, čija je osnovna uloga nadzor pretraživanog terena i novih izvora hrane.

ABC algoritam prvi put je predložen od strane Karaboğ-a i Basturk-a (Karabog i Basturk, 2007). Funkcija cilja predstavljena je jednačinom (Yang, 2010), (Stanković i sar., 2022):

$$P_i = \frac{F(x_i)}{\sum_{j=1}^S F(x_j)} \quad (4.71)$$

gde $F(x)$ predstavlja ukupnu količinu prikupljenog nektara i definiše funkciju cilja u procesu pretrage optimalnog rešenja, parametar P_i označava verovatnoću da se na lokaciji x_i nalazi najbolji izvor hrane, dok S predstavlja ukupan broj lokacija na kojima se vrši pretraga, kao i potencijalnih izvora hrane. Na slici 4.21 predstavljena je opšta procedura ABC algoritma kroz nekoliko koraka (Yang, 2010), (Stanković i sar., 2022).

Opšta procedura optimizacijom veštačke kolonije pčela

početak

Funkcija cilja $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$

Kodiranje funkcije $f(x)$ i virtualne količine nektara za svako rešenje

Definisanje ruta (snage, pravaca i strategije)

While (kriterijum)

for pretraga rešenja n , (ili čvorova za problem planiranja i raspoređivanja resursa)

Generisanje novih rešenja

end for

Ažuriranje optimalnih rešenja

end while

Štampanje optimalnog rešenja

Štampanje optimalnog rasporeda poslova i vizualizacija na gantogramu

kraj

Slika 4.21 Opšta procedura ABC algoritma

Primena ABC algoritma na primeru problema planiranja i raspoređivanja resursa može se videti u autorskim radovima (Stanković i sar., 2022), (Stanković i sar., 2020).

4.6 MODELIRANJE PRIMENOM NEURO-FAZI ANFIS SISTEMA

ANFIS (*eng. Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System*) sistem predstavlja računarsku implementaciju hibridnog neuro – fazi pristupa, koji predstavlja kombinaciju fazi logike i neuronskih mreža, omogućavajući efikasno modeliranje i kontrolu složenih nelinearnih

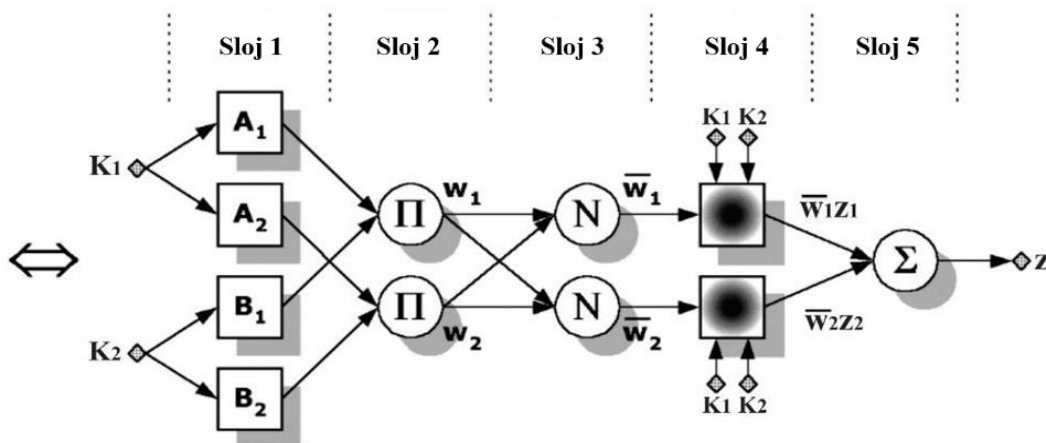
sistema. ANFIS sistem razvijen je od strane poznatog autora Jang-a (Jang i sar., 1997). Osnovnu strukturu ANFIS sistema čine dve ulazne i jedna izlazna veličina. Ovaj sistem je dizajniran tako da integriše prednosti fazi logike i neuronskih mreža, pri čemu se postiže poboljšana efikasnost i tačnost u odnosu na pojedinačne mogućnosti.

U slučajevima kada ANFIS sistem ima dva ulaza i jedan izlaz prema Čojbašić-u (Čojbašić, 2002), Vesović-u i Jovanović-u (Vesović i Jovanović, 2022) skup zajedničkih pravila može se zapisati sledećim jednačinama:

$$\text{Uslov 1: Ako } K_1 \text{ je } A_1 \text{ i } K_2 \text{ je } B_1, \text{ onda je } z_1 = p_1 K_1 + q_1 K_2 + r_1 \quad (4.72)$$

$$\text{Uslov 2: Ako } K_1 \text{ je } A_2 \text{ i } K_2 \text{ je } B_2, \text{ onda je } z_2 = p_2 K_1 + q_2 K_2 + r_2$$

Kako bi se ovaj model dodatno pojednostavio i učinio razumljivijim, na slici 4.22 prikazana je osnovna struktura ANFIS sistema. Slika predstavlja ključne komponente modela i njihovu međusobnu povezanost, olakšavajući razumevanje principa rada i funkcionisanja ANFIS sistema (Čojbašić, 2002), (Stanković i sar., 2022).



Slika 4.22 Osnovna struktura ANFIS sistema

Na osnovu slike 4.17 može se zaključiti da osnovna struktura ANFIS sistema se sastoji od pet ključnih slojeva koji su međusobno povezani, što doprinosi složenosti i efikasnosti sistema.

Sloj 1: Prvi korak u konstruisanju ANFIS sistema je proces fazifikacije, a osnovna uloga je pretvaranje ulaznih podataka u fazi skupove. Pretvaranjem ulaznih podataka u fazi skupove definišu se početni uslovi ili ti uslovi neizvesnosti događaja, što početnu fazu sistema dovodi do različitih mogućih scenarija karakterističnih sa fazi brojeve. Nakon fazifikacije i izlaza iz prve faze posmatranog ANFIS sistema važi sledeći uslov (Čojbašić, 2002):

$$O_m^1 = \mu_{A_m}(K_n) = \max \left[\min \left(\frac{K_n - r_1}{r_2 - r_1} \right), 1, \left(\frac{r_3 - K_n}{r_3 - r_2} \right), 0 \right] \quad (4.73)$$

gde K_n predstavlja ulazne veličine u elemente 1 i 2, dok A_m predstavlja lingvističku fazi tabelu (r_1, r_2, r_3). Potrebno je napomenuti da petlje ili čvorovi u ovoj fazi su prilagodljivog karaktera pa se oblik funkcije pripadnosti može promeniti tokom posmatranog procesa, μ_{A_m} predstavlja funkciju pripadnosti.

Sloj 2: U drugom sloju modeliranja ANFIS sistema sve petlje ili ti čvorovi su poznati kao takvi i ne menjaju se. U ovoj fazi osnovna uloga je aktivacija i primena postojećih pravila na osnovu jačine težinskih koeficijenata w_m . Odabir i upotreba pravila na osnovu težinskih koeficijenata obavlja se prema uslovu jednačine:

$$O_m^2 = w_m = \mu_{A_m}(K_1) \cdot \mu_{B_m}(K_2) \quad (4.74)$$

Sloj 3: U trećem sloju obavlja se proces normalizacije i dobijaju se vrednosti težinskih koeficijenata za svako m – to pravilo. Izračunavanje noramlizovanih vrednosti težinskih koeficijenata vrši se prema jednačini:

$$O_m^3 = \overline{w}_m = \frac{w_m}{w_1 + w_2}, m = 1, 2 \quad (4.75)$$

Sloj 4: Četvrti sloj je delimično sličan kao prvi sloj jer se oblik funkcije pripadnosti može promeniti tokom ovog procesa.

$$O_m^4 = \overline{w}_m z_m = \overline{w}_m (p_m K_1 + q_m K_2 + r_m) \quad (4.76)$$

gde je w_m izlaz iz faze četiri, a vrednosti $\{p_m, q_m, r_m\}$ predstavljaju posledične parametare izlaznih setova zaključka. Parametri u ovom sloju nazivaju se posledični parametri, jer se koriste u zaključnim delovima odgovarajućih fazi pravila (Ćojbašić, 2002).

Sloj 5: Poslednja faza ANFIS sistema je sloj pet, uloga ovog sloja je sračunavanje svih dospelih vrednosti u poslednjem izlaznom čvoru modela i računa se kao zbir svih vrednosti prema jednačini (Jang i sar., 1997):

$$O_m^5 = z = \sum_m \overline{w}_m z_m = \frac{\sum w_m z_m}{\sum w_m} \quad (4.77)$$

gde z predstavlja ukupni izlaz ANFIS sistema.

Poslednji sloj modeliranja ANFIS sistema se naziva defazifikacija i predstavlja pretvaranje fazi skupova u realne numeričke vrednosti (Jang i sar., 1997), (Ćojbašić, 2002).

U ovoj doktorskoj disertaciji ANFIS sistem je korišćen kako bi se implementirala složena veza između karakteristika problema (kao što su broj poslova, broj operacija, broj mašina i ukupno vreme obavljanja operacije na mašinama) kao ulaznih veličina i izbor optimalnog metaheurističkog algoritma optimizacije GA, PSO i SA, što se detaljno može videti u petom poglavlju i u autorskom radu (Stanković i sar., 2022).

4.7 FAZI METODE VIŠEKRITERIJUMSKOG ODLUČIVANJA

Višekriterijumsko odlučivanje (*eng. Multi Criteria Decision Making - MCDM*) predstavlja analitički proces koji omogućava procenu i izbor optimalne alternative, uzimajući u obzir različite kriterijume (Saaty, 1980). Iako tradicionalne metode višekriterijumskog odlučivanja polaze od pretpostavke da su ulazne vrednosti precizno definisane, realni problemi obično zahtevaju donošenje odluka u uslovima neizvesnosti (Jauševac, 2018). U tom kontekstu, fazi pristup, zasnovan na teoriji skupova, pokazao se kao efikasno sredstvo za prevazilaženje takvih izazova. Ovaj pristup omogućava donosiocima odluka da efikasno obrađuju neizvesne ili subjektivne informacije, čime se poboljšava kvalitet i relevantnost donetih odluka (Stanković i Petrović, 2025).

Osnovna uloga MCDM metoda u ovoj doktorskoj disertaciji jeste rangiranje poslova po prioritetu u cilju pravovremenog izvršenja. Implementacija metoda višekriterijumskog odlučivanja sa fazi pristupom MCDM za određivanje prioriteta poslova ima za cilj poboljšanje trenutnog stanja proizvodnje na osnovu ulaznih parametara koji direktno ili indirektno utiču na funkciju cilja, čime se isključuje subjektivnost odlučivanja i omogućava rangiranje poslova (Stanković i Petrović, 2025). Osnovni korak pri implementaciji fazi brojeva kod MCDM metoda je fazi matrica koja je predstavljena u sledećem obliku (Petrović i sar., 2019):

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{11} & \cdots & \hat{y}_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{y}_{m1} & \cdots & \hat{y}_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_{11}^{r1} y_{11}^{r2} y_{11}^{r3}) & \cdots & (y_{1n}^{r1} y_{1n}^{r2} y_{1n}^{r3}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ (y_{m1}^{r1} y_{m1}^{r2} y_{m1}^{r3}) & \cdots & (y_{mn}^{r1} y_{mn}^{r2} y_{mn}^{r3}) \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

U ovom izrazu m predstavlja broj alternativnih rešenja, n je broj kriterijuma evaluacije, dok $\hat{y}_{ij}$ predstavlja agregirani učinak alternative i u odnosu na kriterijum j . Izračunavanje agregiranih vrednosti svake alternative prema kriterijumu prikazano je sledećom jednačinom:

$$(y_{ij}^{r1} y_{ij}^{r2} y_{ij}^{r3}) = \left(\min(y_{ijk}), \frac{\sum_{k=1}^K y_{ijk}}{K}, \max(y_{ijk}) \right) \quad (4.79)$$

gde izraz $(y_{ij}^{r1} y_{ij}^{r2} y_{ij}^{r3})$ predstavlja trougaoni fazi broj, y_{ijk} – k -ta realizacija atributa y_{ij} dobijena iz različitih procena (merjenja, ekspertnih ocena), K predstavlja broj ukupnih realizacija, dok $\min(y_{ijk})$, $\frac{\sum_{k=1}^K y_{ijk}}{K}$, $\max(y_{ijk})$ predstavljaju najmanju vrednost $\min(y_{ijk})$, srednju vrednost $\frac{\sum_{k=1}^K y_{ijk}}{K}$ i najveću vrednost svih realizacija $\max(y_{ijk})$.

U slučaju da je specifični kriterijum kvalitativni, onda se za takav slučaj primenjuju opšta pravila koja su detaljno objašnjena u radovima Petrovića (Petrović i sar., 2019) i Zarbakhshnia (Zarbakhshnia i sar., 2018). Vrednosti se dodeljuju svakoj alternativni na osnovu predloga datih u tabeli 4.1 (Saaty, 1980), (Laarhoven i Pedrycz, 1983), (Petrović i sar., 2013).

Tabela 4.1 Fazi skala za alternativnu procenu

Rang	Trougaoni fazi broj	Ocena odluka
Veoma niska	(0, 0, 0.25)	1
Niska	(0, 0.25, 0.5)	2
Srednja	(0.25, 0.5, 0.75)	3
Visoka	(0.5, 0.75, 1.0)	4
Veoma visoka	(0.75, 1.0, 1.0)	5

4.7.1 Metoda FAHP

FAHP (*eng. Fuzzy Analytic Hierarchy Process*) predstavlja proširenje klasične AHP metode koja uključuje upotrebu fazi logike, čija je osnova uloga uvođenje uslova neizvesnosti. FAHP je jedna od najpoznatijih višekriterijumskih metoda za donošenje odluka koju je razvio Saaty (Saaty, 1980). FAHP metoda omogućava strukturalnu analizu složenih problema kroz hijerarhiju ciljeva, kriterijuma i alternativa. AHP koristi matricu poređenja, gde se elementi ocenjuju pomoću numeričkih vrednosti, kako bi se izračunale relativne težine kriterijuma i alternativa. AHP metoda je jednostavna, ona često ne može adekvatno da se nosi sa neizvesnošću i subjektivnošću u procenama donosioca odluka. Da bi se prevazišli ovi nedostaci, razvijena je FAHP metoda, koja kombinuje AHP sa teorijom fazi skupa.

FAHP metodu su unapredili Van Laarhoven i Pedrycz (Van Laarhoven i Pedrycz, 1983), Buckley (Buckley, 1985) i Chang (Chang, 1996) kako bi omogućili rad u uslovima neizvesnosti. U ovom istraživanju FAHP koristi trougaone fazi brojeve umesto klasičnih numeričkih vrednosti kako bi se modelirala nesigurnost u procenama. FAHP metoda može se koristiti za dva ključna aspekta donošenja odluka (Zavadskas i sar., 2020):

- Određivanje težina kriterijuma: određivanje relativne važnosti faktora koji utiču na odluku.
- Rangiranje alternativa: procena alternativa na osnovu težina kriterijuma i dobijanje optimalnog rešenja.

U okviru ove doktorske disertacije, FAHP metoda koristi se isključivo za određivanje težina kriterijuma, a primenjeni algoritam detaljno je opisan u autorskom radu (Stanković i Petrović, 2025).

4.7.2 Metoda FFUCOM

FFUCOM (*eng. Fuzzy Full Consistency Method*) predstavlja jednu je od najsavremenijih metoda za određivanje težina kriterijuma, koju su razvili Pamučar i saradnici (Pamučar i Erceg, 2020), (Pamucar i sar., 2021). Ova metoda se zasniva na parnim poređenjima kriterijuma i validaciji rezultata kroz procenu odstupanja od maksimalne konzistentnosti, čime se obezbeđuje veća tačnost i pouzdanost u odlučivanju (Petrović i sar., 2023).

FUCOM metoda omogućava poređenje kriterijuma ne samo korišćenjem celobrojnih vrednosti, već i decimalnih vrednosti, što povećava fleksibilnost modela. Takođe, koristi jednostavan algoritam za izračunavanje težina i zahteva manji broj poređenja, čime se smanjuje kognitivno opterećenje donosioca odluka i ubrzava proces analize (Petrović i sar., 2022), (Turudija i sar., 2023). Potencijalne primene FUCOM metode u grupnom odlučivanju istraživali su Fazlollahtabar i saradnici (Fazlollahtabar i sar., 2019) i Durmić i saradnici (Durmić i sar., 2020), dok je njena proširena verzija, poznata kao FFUCOM, razvijena za rešavanje problema odlučivanja uz korišćenje fazi brojeva.

Ova proširena verzija omogućava modeliranje nesigurnosti i subjektivnosti u ocenjivanju kriterijuma, što je posebno korisno u kompleksnim okruženjima donošenja odluka (Petrović i sar., 2022), (Stanković i Petrović, 2025). Osnovne faze FFUCOM metode predstavljene su u radovima (Pamučar i Erceg, 2020), (Stević i sar., 2020), (Petrović i sar., 2023). Cilj primene metode je omogućavanje objektivnijeg i konzistentnijeg određivanja relativne važnosti kriterijuma, čime se eliminiše subjektivna pristrasnost i unapređuje proces odlučivanja u procesu rangiranja poslova. Konkretno, primena FFUCOM metode za rangiranje poslova po prioritetu može se videti u autorskom radu Stankovića i Petrovića (Stanković i Petrović, 2025).

4.7.3 Metoda FWASPAS

FWASPAS (*eng. Fuzzy Weighted Aggregated Sum Product Assessment Method*) prvi su predložili Zavadskas i saradnici (Zavadskas i sar., 2012). FWASPAS metoda kombinuje WSM (*eng. The Weighted Sum Model*) i WPM (*eng. The Weighted Product Model*) čime se postiže veća tačnost i efikasnost u procesu donošenja odluka (Chakraborty i sar., 2014), (Stanković i Petrović, 2025). Kombinacija ove dve metode u FWASPAS metodi ima za cilj da iskoristi prednosti obe metode. Pravilno korišćenje metoda zahteva dobro definisanje kriterijuma, adekvatno dodeljivanje težina i ocena, kao i razumevanje fazi logike i matematičkih operacija koje se koriste. FWASPAS metoda se sastoji od šest osnovnih faza detaljno opisanih u radovima (Turskis i sar., 2015), (Petrović i sar., 2019).

Kao što je prethodno opisano, metode FAHP i FFUCOM korišćene su za određivanje težina kriterijuma, čime je definisana njihova relativna važnost u procesu odlučivanja. Kao nastavak ovog postupka, metoda FWASPAS primenjuje se za rangiranje alternativa, odnosno prioritizaciju poslova.

Korišćenjem FWASPAS metode omogućava se precizno određivanje redosleda izvršenja poslova na osnovu prethodno dobijenih težina kriterijuma, čime se optimizuje organizacija proizvodnih resursa i poboljšava efikasnost procesa planiranja, što se i može videti u autorskom radu Stankovića i Petrovića (Stanković i Petrović, 2025).

4.8 MAŠINSKO UČENJE ZA PREDIKCIJU ULAZNIH PARAMETARA OPTIMIZACIJE

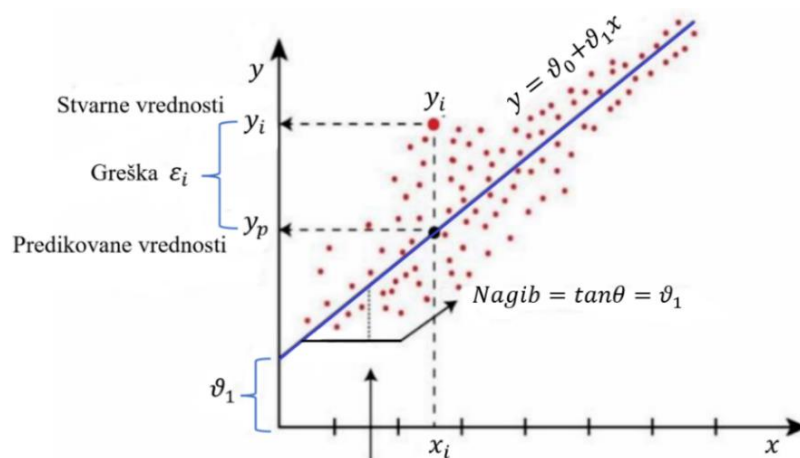
Mašinsko učenje predstavlja granu veštačke inteligencije čija je osnovna uloga omogućavanje računarima da automatski uče iz podataka, prepoznaju obrasce i donose odluke bez eksplicitnog programiranja. Računari koriste gotove modele koji su direktno povezani sa algoritmima, čija je zajednička uloga, prepoznavanje karakteristika podataka, formiranje pravila i donošenje odluka (Ali i sar., 2023).

Kada govorimo o mašinskom učenju neizostavno je pomenuti da prilikom odabira modela koriste se dve odvojene tehnike u zavisnosti od cilja postavljenog problema: nadgledano učenje (*eng. Supervised learning*) i nenadgledano učenje (*eng. Unsupervised learning*) (Yoosefzadeh-Najafabadi i sar., 2021), (Karimi-Mamaghan i sar., 2022). U ovoj doktorskoj disertaciji korišćena je tehnika nadgledanog učenja. Tehnika nadgledanog učenja može se matematički predstaviti sledećom jednačinom:

$$\varphi(Z) = Y \quad (4.95)$$

gde je Z vektor ulaznih podataka, Y vektor izlaznih podataka, φ funkcija cilja koja opisuje zavisnost između ulaza i izlaza. Cilj je pronaći aproksimaciju funkcije φ' kroz naučenu funkciju φ . U nastavku predstavljeni su korišćeni modeli mašinskog učenja u ovom istraživanju.

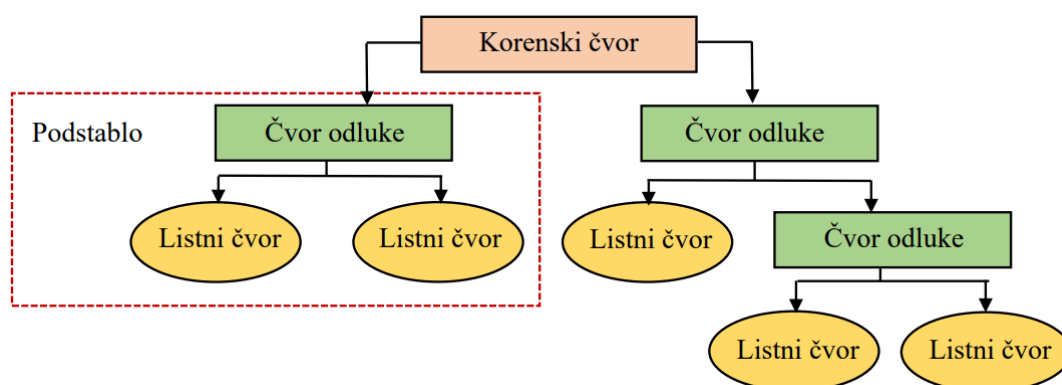
Linearna regresija (eng. *Linear Regression*) pripada grupi algoritma mašinskog učenja čiji se osnovni princip funkcionisanja svodi na modeliranju linearnih veza između nezavisnih i zavisnih promenljiva (Yeardley i sar., 2022), (Sanati i sar., 2022). Na slici 4.23 predstavljen je grafički princip funkcionisanja i očitavanja vrednosti linearne regresije.



Slika 4.23 Osnovi princip i struktura algoritma linearne regresije

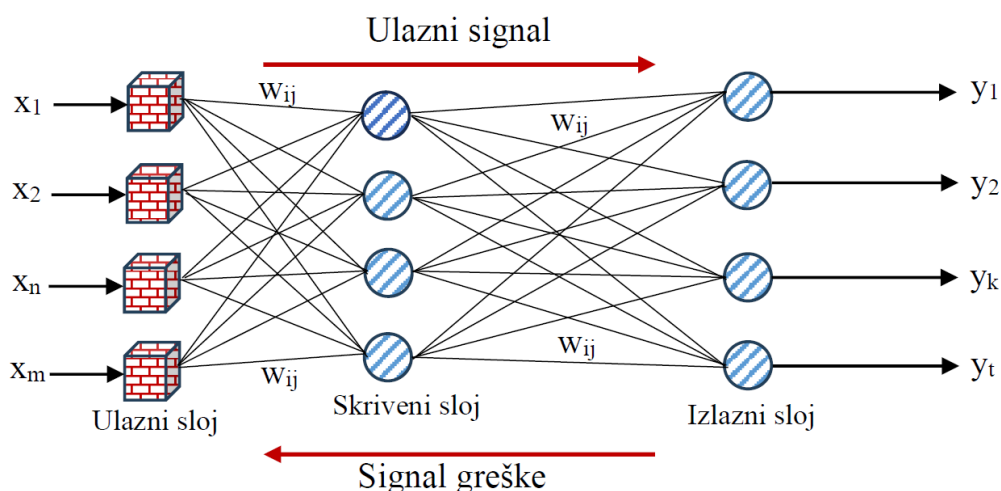
Navedena metoda se koristi za modeliranje odnosa između nezavisne promenljive x i zavisne promenljive y , pri čemu se koristi linearna regresija kako bi se predvidela vrednost y na osnovu x . Plava linija na slici 4.23 predstavlja regresioni model, definisan jednačinom $y = \vartheta_0 + \vartheta_1 x$, gde ϑ_0 označava presek regresione linije sa y -osom, odnosno vrednost y kada je $x = 0$, dok ϑ_1 predstavlja nagib regresione linije, koji opisuje promenu zavisne promenljive u odnosu na jedinicu promene nezavisne promenljive. Nagib se matematički izražava kao $\tan\theta = \vartheta_1$, pri čemu je θ ugao između regresione linije i x -ose. Na slici 4.23 su takođe prikazane stvarne vrednosti podataka y_i i predikovanе vrednosti modela y_p . Razlika između stvarnih i prediktivnih vrednosti označava grešku predikcije $\varepsilon_i = y_i - y_p$, koja predstavlja odstupanje modela od realnih podataka. Osnovni cilj regresione analize je minimizacija ukupnih grešaka korišćenjem metode najmanjih kvadrata, kako bi model što preciznije aproksimirao podatke.

Stablo odluke (*eng. Decision Tree*) je algoritam mašinskog učenja koji se u većini slučajeva koristi za klasifikacione probleme. Glavna karakteristika ovog algoritma je klasifikacija ulaznih podataka na osnovu postavljenih pravila algoritma (Song i Lu, 2015). Proces započinje korenskim čvorom, koji vrši početnu podjelu podataka na osnovu određenog kriterijuma (npr. određeni atribut u skupu podataka). Odatle se podaci dalje razvrstavaju kroz čvorove odluke, gde se primenjuju dodatni kriterijumi, sve dok se ne stigne do listnih čvorova, koji predstavljaju konačne odluke modela. Na slici 4.24 predstavljena je grafička struktura algoritma (Navlani, 2018).



Slika 4.24 Osnovi princip i struktura algoritma stabla odluke

Veštačke neuronske mreže (*eng. Artificial Neural Networks*) predstavljaju jedan od najmoćnijih modela mašinskog učenja, inspirisanih načinom funkcionisanja neurona u ljudskom mozgu. Ovi modeli koriste slojeve međusobno povezanih veštačkih neurona za obradu podataka, prepoznavanje obrazaca i donošenje odluka. Na slici 4.25 prikazan je grafički prikaz osnove strukture modela veštačke neuronske mreže.



Slika 4.25 Grafički prikaz osnove strukture veštačke neuronske mreže

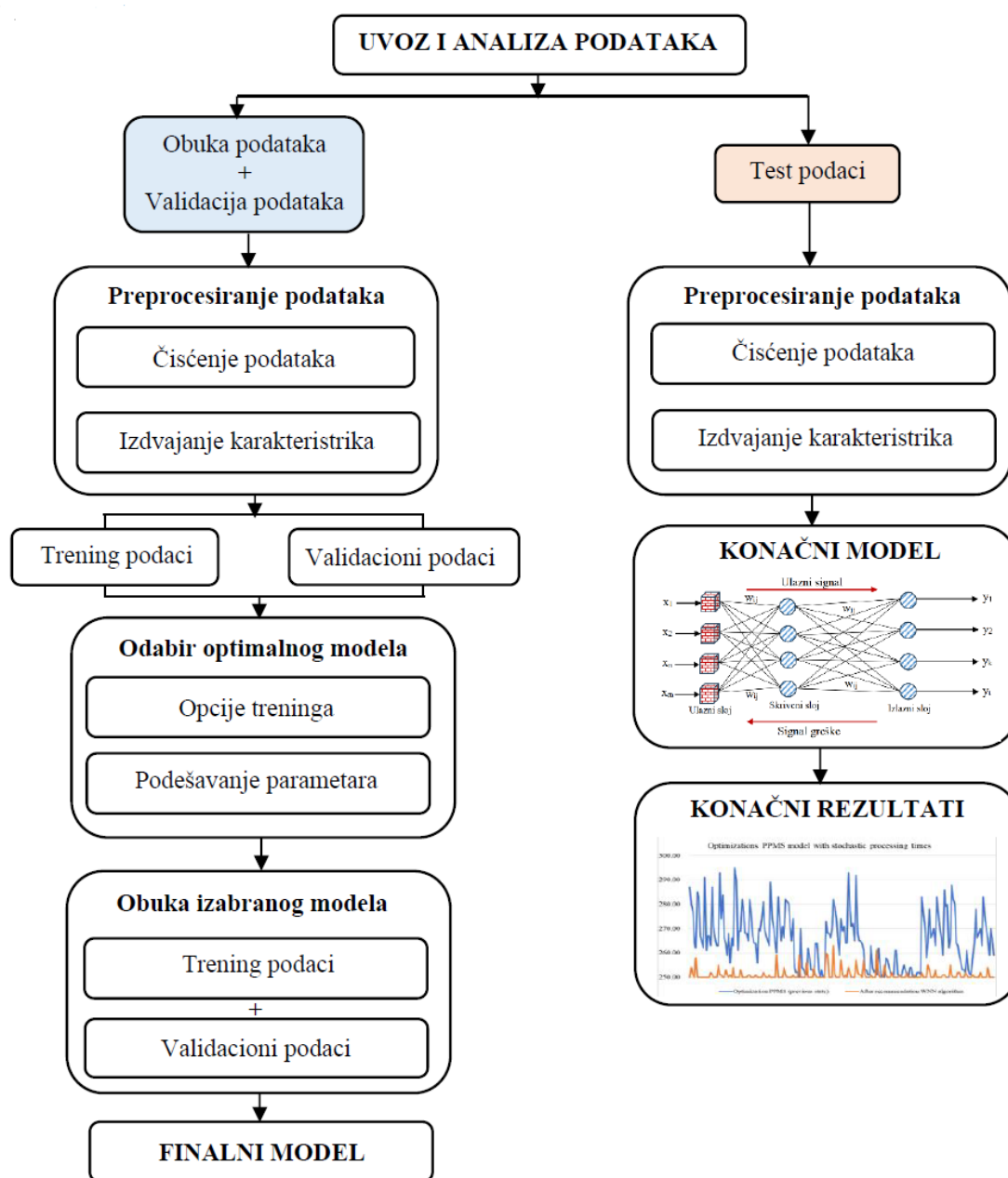
Glavna snaga algoritma potiče od sposobnosti učenja iz velikih skupova podataka i prilagođavanju težinskih parametara kako bi se postigla visoka tačnost u predikcijama (Ali i sar., 2023). Mreža modela se sastoji od ulaznog sloja $x_1, x_2, \dots, x_m$, skrivenih slojeva koji se sastoje od više neuronskih čvorova i dobijaju signale iz ulaznog sloja, pritom primenjuju aktivacionu funkciju i zatim ih prosleđuju ka izlaznom sloju. Izlazni sloj generiše predikcije $y_1, y_2, \dots, y_t$, koje predstavljaju izlazne vrednosti mreže. Težine između slojeva w_{ij} predstavljaju parametre koji se menjaju u zavisnosti od treninga mreža, kako bi se postigli optimalni rezultat. Dve ključne faze učenja neuronske mreže koje su i grafički prikazane na slici 4.25 su (Nikolić i Zečević, 2019):

- ulazni signal (*eng. feedforward*): podaci se kreću od ulaznog sloja ka izlaznom sloju kroz mrežu, prolazeći kroz skriveni sloj,
- signal greške (*eng. backpropagation*): kada se izračunaju izlazne vrednosti, greška između predikcija i stvarnih vrednosti se vraća kroz mrežu kako bi se prilagodile težine w_{ij} , čime se omogućava učenje modela.

Bajesova optimizacija (*eng. Bayesian optimization*) predstavlja metod za podešavanje hiperparametara koji proces pronalaženja optimalnih vrednosti tretira kao problem probabilističkog modelovanja. Ovaj pristup zasniva se na kontinuiranom održavanju probabilističkog modela funkcije cilja, najčešće korišćenjem Gausovog procesa, koji na osnovu prikupljenih podataka omogućava predviđanje vrednosti funkcije i procenu njihove nesigurnosti u celokupnom prostoru pretrage (Zahedi i sar., 2021). Procedura započinje inicijalnom evaluacijom funkcije cilja u određenom broju pažljivo odabranih tačaka, nakon čega se izbor naredne tačke vrši optimizacijom odgovarajuće akvizicione funkcije, kao što su očekivano poboljšanje (*eng. Expected Improvement*) ili gornja granica poverenja (*eng. Upper Confidence Bound*), koje omogućavaju balans između istraživanja nepoznatih regiona i eksploatacije oblasti za koje postoji velika verovatnoća dobrih rezultata. Nakon evaluacije funkcije u odabranoj tački, novi podaci inkorporiraju se u model, čime se iterativno poboljšava njegova preciznost. Opisani koraci se ponavljaju sve dok se ne ispuni prethodno definisani kriterijum zaustavljanja, najčešće određen maksimalnim brojem evaluacija ili postizanjem odgovarajućeg nivoa konvergencije (Garrido-Merchán i sar., 2023).

Opisani modeli mašinskog učenja koriste se za predikciju funkcije cilja, s ciljem minimizacije vremena proizvodnog procesa i povećanja produktivnosti. Ključni zadatak ovih modela je unapređenje procesa optimizacije kroz precizno određivanje optimalnih parametara metaheurističkih algoritama, koji se koriste za rešavanje složenih optimizacionih problema u

produkciji. S obzirom na to da izbor i podešavanje ulaznih parametara metaheurističkih algoritama značajno utiče na performanse rešenja, primena mašinskog učenja omogućava prilagođavanje parametara, čime se postiže pouzdanije i efikasnije pronalaženje optimalnih rešenja u proizvodnom procesu, bolja iskorišćenost resursa i smanjenje operativnih troškova. U nastavku na slici 4.26 prikazani su opšti koraci i procedura primene modela mašinskog učenja za problem planiranja i raspoređivanja resursa.



Slika 4.26 Opšti koraci i procedura primene modela mašinskog učenja

Modeli mašinskog učenja zahtevaju procenu performansi, pri čemu se koriste odgovarajuće metrike kako bi se utvrdila uspešnost primenjenog modela. Ove metrike

omogućavaju objektivno sagledavanje tačnosti predikcija i efikasnosti modela u rešavanju optimizacionog problema (Rainio i sar., 2024). Modeli se ocenjuju na osnovu metrika, kao što su:

- Koeficijent determinacije (*eng. R-squared*):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{n=1}^k (z_n - z'_n)^2}{\sum_{n=1}^k (z_n - \bar{z})^2} \quad (4.96)$$

gde je z_n stvarna vrednost, dok z'_n predstavlja predviđene vrednosti za n broj podataka,

- Srednja kvadratna greška (*eng. Mean squared error - MSE*):

$$MSE = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k (z_n - z'_n)^2 \quad (4.97)$$

- Srednja apsolutna greška (*eng. Mean absolute error - MAE*):

$$MAE = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |z_n - z'_n| \quad (4.98)$$

- Srednja kvadratna devijacija (*eng. Root mean square deviation - RMSE*):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{n=1}^k (z_n - z'_n)^2} \quad (4.99)$$

Opsiane metrike pružaju kvantitativne informacije o tome koliko uspešno svaki model predviđa stvarne podatke. Izbor određene metrike zavisi od specifičnosti problema i željenih karakteristika modela. Detaljna primena i uloga modela mašinskog učenja, posebno u razvoju hibridnog modela za rešavanje problema planiranja i raspoređivanja resursa, predstavljena je u petom poglavlju doktorske disertacije.

Poglavlje 5

RAZVOJ MODELA ZA PLANIRANJE I RASPOREĐIVANJE RESURSA

U prethodnim poglavljima doktorske disertacije definisana je teorijska podloga za razvoj modela planiranje i raspoređivanje resursa, dok su u ovom poglavlju detaljno predstavljeni razvijeni modeli.

Modeli planiranja i raspoređivanja resursa u proizvodnim okruženjima omogućavaju sistematičan pristup u organizaciji i upravljanju resursima kako bi se ostvarili proizvodni ciljevi. Ovaj proces obuhvata definisanje osnovnih koraka planiranja i raspoređivanje resursa, postavljanje prioriteta i optimizaciju radnih tokova kako bi se postigla efikasnost, smanjili troškovi i poboljšao kvalitet proizvoda ili usluga. Kroz razvoj modela, teži se stvaranju strukture koja omogućava precizno planiranje i raspoređivanje resursa, čime se obezbeđuje optimalno iskorišćavanje resursa u proizvodnom okruženju.

Modeli upravljanja proizvodnim resursima podrazumevaju kreiranje pojednostavljenih i apstraktnih prikaza stvarnih sistema ili procesa u proizvodnji. Generalno predstavljaju moćan alat za razumevanje i optimizaciju složenih sistema. Apstraktni model u opštem smislu je konstrukcija ljudskog razuma i ima za cilj bolje razumevanje i upravljanje sistemima (Kulesza, 2024). Ovakav pristup omogućava identifikaciju ključnih komponenti

sistema i njihovih međusobnih odnosa. Korišćenjem apstraktnih modela olakšava se analiza ponašanja sistema u različitim scenarijima, što doprinosi efikasnijem donošenju odluka. Osnovni elementi modela, grafički su prikazani na slici 5.1.



Slika 5.1 Osnovni elementi modela (Petrović, 2013)

Osnovni elementi koji čine sastavni deo modela i definišu njegov način funkcionisanja tokom razvoja i modeliranja su (Graybeal i Pooch, 1980), (Baer, 2019):

Ulaz: Svaki model sadrži ulazne informacije koje su ključne za posmatrani model. U oblasti planiranja i raspoređivanja resursa to mogu biti informacije kao što su: poslovi, mašine, operacije, vrsta proizvoda, proces proizvodnje, dakle svi raspoloživi resursi koji direktno i indirektno utiču na proces proizvodnje.

Model: Logički ekvivalent realnom sistemu ili procesor ulaznih informacija je najbitniji element modela. Osnovna uloga razvijenog modela je obrada ulaznih podataka koristeći različite tehnike, metode ili različite alate kako bi se optimizovao ili simulirao proizvodni proces.

Osnovne karakteristike koje jedan model mora da poseduje su:

- **Apstraktnost:** Osnovna razlika između realnog sistema i razvijenog modela nastaje uvođenjem ograničenja u model, tako da on zadržava samo one karakteristike realnog sistema koje su relevantne za proučavanje modela. Previše uprošćen model je jednostavan za rešavanje i optimizaciju ali može da da pogrešnu sliku o ponašanju realnog sistema. Sa druge strane, previše složen model, vrlo sličan realnom sistemu, često može biti nerešiv. Primenljiv model mora imati dobar balans između jednostavnosti i vernosti realnosti. U disertaciji će biti prikazan niz modela, počevši od najjednostavnijih do vrlo kompleksnih.
- **Univerzalnost:** Ova karakteristika ocenjuje koliko široko model može da se primeni na različite situacije ili sisteme. Osnovna prednost većine razvijenih modela u disertaciji jeste njihova univerzalna primena u različitim oblastima istraživanja što ih čini univerzalnim alatima.
- **Relevantnost modela:** Modeli moraju da verno opisuju stvarnost ili sistem koji predstavlja. Analiza ulaznih podataka, sagledavanje i razumevanje procesa

proizvodnje kao i eksperimentalna merenja daju verodostojnost ulaznim podacima i relevantnost razvijenim modelima.

- Primena metoda modeliranja: U zavisnosti od potreba i ciljeva razvijanog modela vrši se odabir optimalnih metoda čiji je osnovni zadatak dobijanje optimlanih izlaznih vrednosti.

Izlaz: Obradom ulaznih podataka na osnovu prethodno razvijanog modela dobijaju se izlazne informacije koje su direktno povezane sa postavljenim uslovima ili ograničenjima pomenutog modela. U kontekstu upravljanja proizvodnim resursima, izlazne veličine mogu biti optimalni sekventni raspored obavljanja poslova na mašinama, predviđanje budućih stanja proizvodnih resursa, minimiziranje vremena u procesu proizvodnje na osnovu postavljenih ograničenja u razvijenom modelu i još mnogo toga.

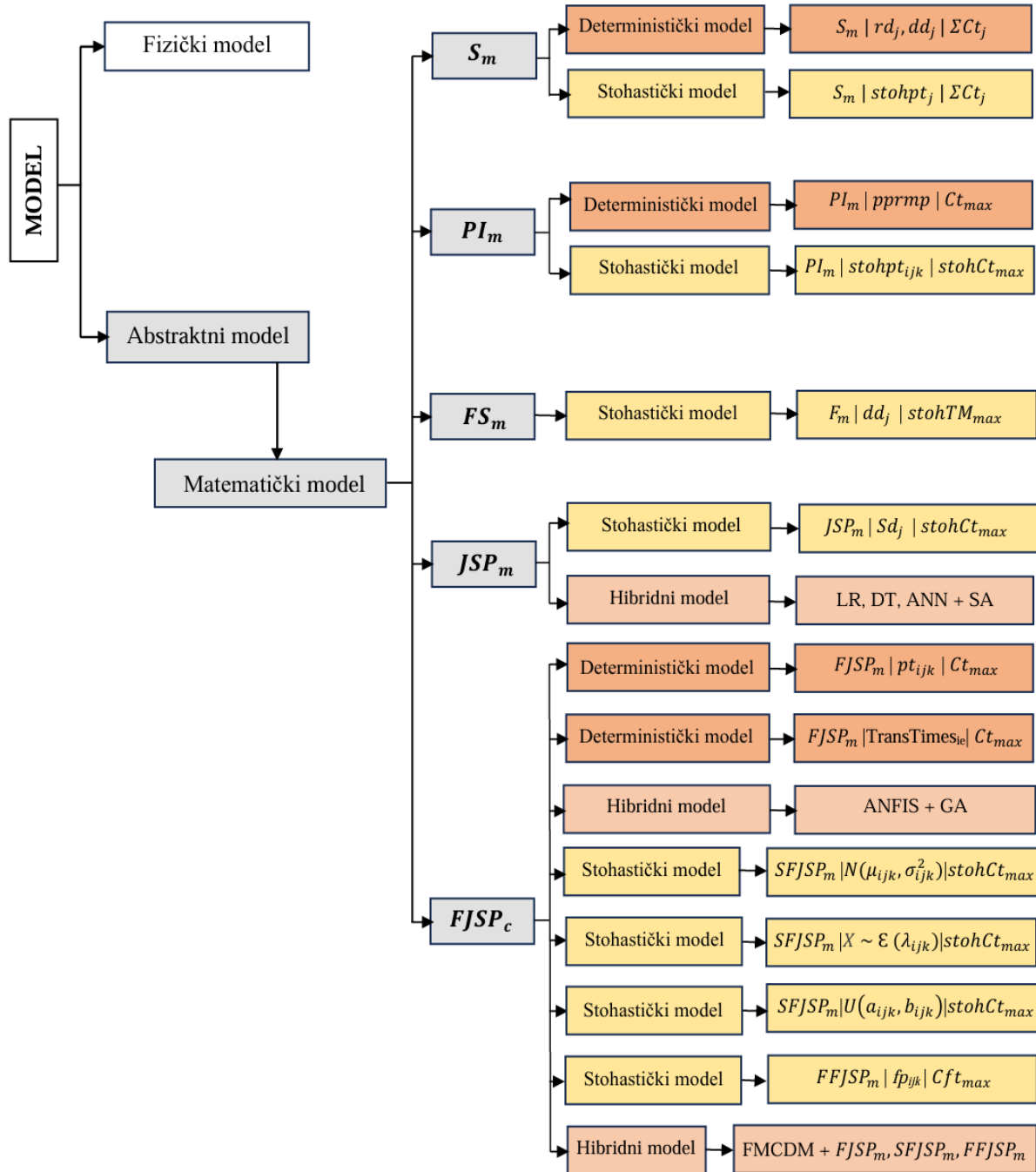
Modeliranje sistema podrazumeva proces kreiranja apstraktne reprezentacije (modela) realnog sistema sa ciljem da se razume, analizira ili predvidi njegovo ponašanje. Ovaj proces pokriva nekoliko ključnih aspekata, uključujući identifikaciju komponenti sistema, opisivanje organizacije i definisanje dinamičkog ponašanja okruženja. U oblasti modeliranja sistema postoje različite vrste modela. Statički modeli predstavljaju strukturu sistema u određenom trenutku i prikazuju raspored komponenti. S druge strane, dinamički modeli se bave vremenskim aspektima i ilustruju promene i interakcije tokom vremena. Funkcionalni modeli se fokusiraju na određivanje funkcija i operacija sistema, dok se modeli ponašanja fokusiraju na interakciju između komponenti sistema (Dejanović, 2014). Izbor tipa modela zavisi od specifičnih ciljeva i izazova posmatranog proizvodnog okruženja.

5.1 PODELA MODELA PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA RESURSA

U upravljanju proizvodnim resursima, modeli imaju za cilj da omoguće tačno i efikasno planiranje i raspoređivanje resursima čime se doprinosi boljem razumevanju i optimizaciji složenih proizvodnih procesa. Prvi korak u ovom procesu je jasno definisanje proizvodnih ciljeva, kroz definisanje konkretnih kvantitativnih rezultata, načina poboljšanja kvaliteta proizvoda ili optimizacije ukupnog vremena proizvodnje. Kada se utvrde ciljevi, sprovodi se detaljna analiza svih potrebnih resursa, uključujući radnike, mašine, poslove, tj. svih potrebnih resursa koje treba uzeti u obzir u procesu njihovog planiranja i raspoređivanja.

Razvoj modela u cilju optimizacije procesa proizvodnje igra ključnu ulogu u unapređenju i povećanju efikasnosti proizvodnih procesa. Postoje različiti pristupi u ovom procesu, od nekih najjednostavnijih analitički rešivih matematičkih modela do složenih

algoritma rešivih isključivo pomoću alata simulacije. Na slici 5.2 prikazana je podela modela koji će u daljem tekstu biti detaljno razmatrani i napravljena je sa ciljem lakšeg praćenja različitih pristupa koji se koriste u optimizaciji proizvodnih resursa.



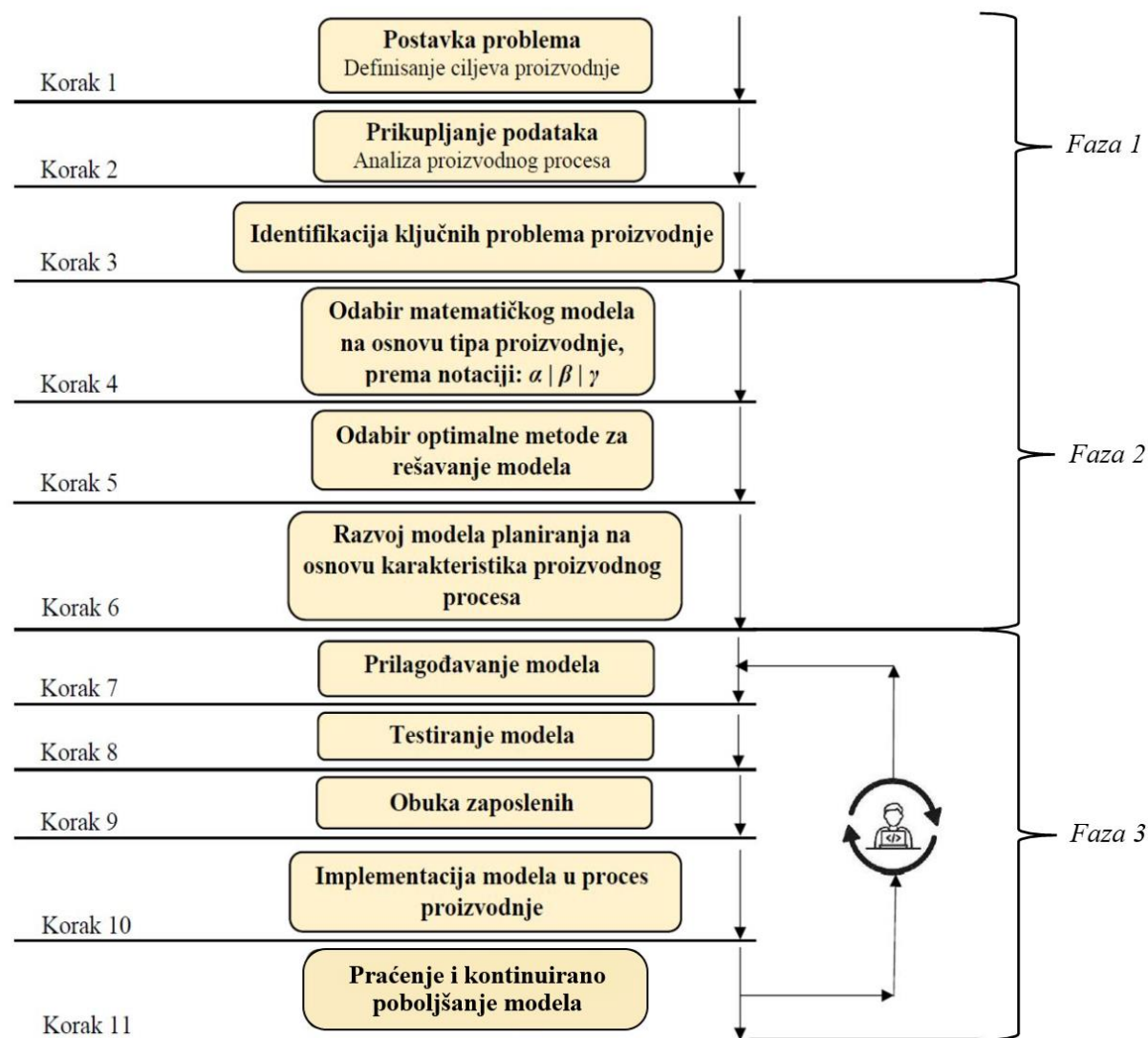
Slika 5.2 Klasifikacija modela na osnovu pravca istraživanja

Tipovi modela koji će se detaljno razmatrati u daljem tekstu ovog poglavlja su:

- Model planiranja i raspoređivanja poslova na pojedinačnoj mašini (S_m),
- Model planiranja i raspoređivanja poslova u paralelnoj vezi mašina (PI_m),
- Model planiranja i raspoređivanja poslova *Flow Shops Model* (FS_m),

- Model planiranja i raspoređivanja *Job Shop Problem* (JSP_m),
- Model fleksibilnog planiranja i raspoređivanja *Flexible Job Shop Problem* ($FJSP_c$).

Svi navedeni modeli dalje su razvijani sa naglaskom na njihovu prilagodljivost i fleksibilnost. Na slici 5.3 prikazan je dijagram toka, koji predstavlja korake pri razvoju modela planiranja i raspoređivanja resursa.



Slika 5.3 Garfički prikaz osnovnih koraka pri razvoja modela

Faza 1: Postavka zadatka - identifikacija problema

Korak 1: U prvom koraku postavke zadatka planiranja i raspoređivanja resursa potrebno je identifikovati ciljeve proizvodnog procesa, čime se određuju pravci daljeg istraživanja. Ciljevi proizvodnog procesa mogu se definisati kroz različite aspekte uključujući: analizu proizvodnog procesa, optimizaciju resursa, otklanjanje uskih grla u proizvodnji, uštedu vremena, povećanje produktivnosti proizvodnje... Jasno definisani ciljevi omogućavaju

efikasan razvoj i implementaciju modela, kao i izbor odgovarajućih metoda optimizacije u narednim fazama istraživanja.

Korak 2: Prikupljanje podataka o proizvodnom okruženju podrazumeva sistematsko prikupljanje informacija o različitim aspektima proizvodnog procesa, uključujući performanse mašina, zalihe, vreme proizvodnje, kvalitet proizvoda i druge ključne faktore. Za analizu prikupljenih podataka koriste se statističke metode i različiti analitički alati koji omogućavaju prepoznavanje uzroka problema i razvoj strategija za unapređenje proizvodnog sistema.

Korak 3: Identifikacija ključnih problema u proizvodnom procesu predstavlja prvi korak ka unapređenju proizvodnje. Pravovremeno prepoznavanje izazova i ključnih indikatora koji utiču na smanjenje performansi proizvodnih procesa omogućava preduzećima da preduzmu odgovarajuće korake kako bi se očuvala i poboljšala efikasnost a samim tim i produktivnost proizvodnog sistema.

Faza 2: Razvoj modela u zavisnosti od tipa proizvodnog procesa

Korak 4: Nakon sprovedene analize, pristupa se razvoju matematičkog modela koji treba da bude usklađen sa karakteristikama proizvodnog procesa i početnim ciljevima. Na ovaj način omogućava efikasan i prilagođen pristup rešavanju problema u okviru određenog tipa proizvodnje.

Korak 5: Izbor optimalne metode za rešavanje odabranog matematičkog modela potrebno je pažljivo razmotriti, uzimajući u obzir karakteristike problema i specifičnosti modela. Pravilnim odabirom metode osigurava se efikasnost i tačnost rešavanja, što je ključno za dobijanje optimalnih rešenja. Različiti problemi zahtevaju različite pristupe, pri čemu je neophodno analizirati prirodu proizvodnje i strukturu problema. Detaljna analiza svih parametara i opšteg stanja proizvodnje omogućava izbor metode kojom se razvijeni model može efikasno rešiti i implementirati u proizvodni proces.

Korak 6: Razvoj modela za optimalno planiranje i raspoređivanje resursa na osnovu karakteristika proizvodnog procesa obuhvata analizu resursa i njihovu optimizaciju kao krajnji cilj. Cilj je razvoj efikasnog modela za unapređenje proizvodnog procesa i upravljanje resursima, čime se postiže veća produktivnost i bolja iskorišćenost kapaciteta.

Faza 3: Implementacija i testiranje modela

Korak 7: Razvijeni model za planiranje i raspoređivanje resursa mora verno oponašati realan proizvodni proces, uzimajući u obzir sve njegove specifičnosti. Na taj način omogućava se adekvatno prilagođavanje zahtevima proizvodnje, čime se postiže efikasnija optimizacija procesa i poboljšanje ukupnih performansi sistema.

Korak 8: Nakon razvoja modela i implementacije njegovih rezultata u proizvodni proces, neophodno je sprovesti testiranje u realnim uslovima na nedeljnom i mesečnom nivou, kako bi se izvršila verifikacija modela. Pravovremeno otkrivanje potencijalnih problema omogućava dodatnu analizu i unapređenje modela.

Korak 9: Obuka i upoznavanje zaposlenih sa novim proizvodnim okruženjem predstavlja važan segment pri njenoj implementaciji. Kontinuirano usavršavanje zaposlenih omogućava efikasniju primenu rezultata, prilagođavanje promenama i poboljšanje ukupnih performansi sistema. Obuka zaposlenih nije jednokratni zadatak, već kontinuirani proces učenja, koji doprinosi stalnom unapređenju proizvodnih operacija i optimalnom korišćenju resursa.

Korak 10: Finalna implementacija novog proizvodnog okruženja je takođe složen i neizvestan proces. Uspešan završetak ove faze zahteva kombinaciju tehničke stručnosti i fleksibilnosti kako bi se osiguralo da rezultati imaju značajan uticaj na ukupne performanse i uspeh proizvodnog sistema. U tom smislu često se predlaže postepena implementacija dobijenih rezultata.

Korak 11: Nakon finalne implementacije rezultata razvijenog modela planiranja i raspoređivanja resursa u proces proizvodnje, neophodno je nastaviti proces praćenja i merenja performansi sistema. Ovakav pristup obezbeđuje efikasnu implementaciju i dugoročan uspeh u upravljanju proizvodnim resursima.

5.2 PRAVILA PRIORITETA IZVRŠAVANJA POSLOVA

Pravila prioriteta izvršavanja poslova koriste se za određivanje redosleda izvršenja operacija u proizvodnim okruženjima. Jedno od najčešće korišćenih pravila je FIFO, koje podrazumeva da se poslovi izvršavaju redosledom kojim su pristigli. Pored ovih pravila, često se primenjuju i druga pravila koja će u daljem tekstu biti detaljno opisana. Potrebno je naglasiti da se u slučaju dinamičnih sistemima, pravila prioriteta se moraju prilagođavati u realnom vremenu kako bi se obuhvatile promene u opterećenju sistema i dostupnosti resursa.

5.2.1 Pravila prioriteta poslova u rešavanju modela sa jednom mašinom

Pravila prioriteta poslova u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa obezbeđuju sistematski pristup i koordinaciju toka aktivnosti u proizvodnom sistemu. Pravila prioriteta koja su korišćena za rešavanje modela sa jednom mašinom predstavljena su detaljno u nastavku (Alharkan, 2005), (Pinedo, 2008), (Brucker, 2007):

- Najkraće vreme obrade (*eng. Shortest Processing Time – SPT*),

- Prioritetna najkraća obrada poslova (*eng. Weighted Shortest Processing - WSPT*),
- Obrada poslova prema najranijem datumu obrade (*eng. Earliest Due Date - EDD*),
- Ukupno vreme kašnjenja poslova (*eng. Slack Time Remaining - STR*),
- Pravilo kritičnog odnosa (*eng. Critical Ratio Rule - CRR*).

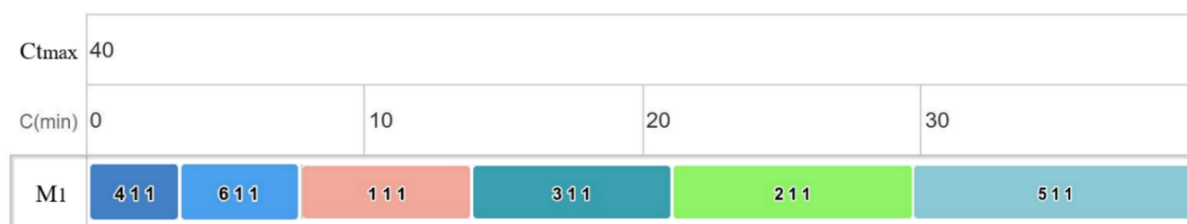
5.2.1.1 Najkraće vreme obrade - SPT pravilo

Pravilo najkraćeg vremena obrade određuje prioritete poslova na osnovu njihovog ukupnog vremena izvršavanja na mašinama, pri čemu se prvo izvršavaju poslovi sa najkraćim vremenom obrade (Alharkan, 2005). Ovaj pristup omogućava minimizaciju ukupnog vremena obrade i poboljšava efikasnost procesa. U nastavku je prikazan primer SPT pravila, dok su ulazni parametri modela dati u tabeli 5.1.

Tabela 5.1 Pravilo najkraćeg vremena obrade poslova - SPT

Poslovi	Vreme obrade pt_{ijk}	Raspored poslova
1	6	3
2	9	5
3	7	4
4	3	1
5	11	6
6	4	2

Na osnovu ovih ulaznih parametara u tabeli 5.1 prikazan je postupak sekvenciranja poslova na jednoj mašini primenom SPT pravila, prema kojem se poslovi sa najkraćim vremenom obrade raspoređuju prvi u nizu izvršavanja (Graybeal i Pooch, 1980). Dobijeni rezultati prikazani su u obliku sekvetnog rasporeda poslova, dok je optimalan raspored grafički prikazan na slici 5.4.



Slika 5.4 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom SPT pravila

5.2.1.2 Prioritetna najkraća obrada posla – WSPT pravilo

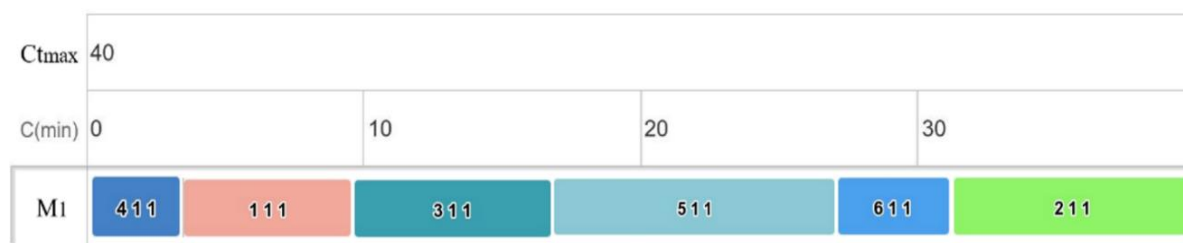
Prioritetna najkraća obrada poslova predstavlja proširenje SPT pravila, pri čemu se u procesu planiranja dodatno uzimaju u obzir težinski koeficijenti dodeljeni svakom poslu. U ovom pristupu, svaki posao dobija težinu ili faktor prioriteta, koji predstavlja relativnu važnost

u rasporedu izvršenja. Prioritet izvršenja određuje se na osnovu vremena obrade posla i dodeljene težine (Alharkan, 2005). U skladu sa notacijom posmatranog problema, oznaka wc_j koristi se za označavanje prioriteta poslova, gde j predstavlja određeni posao. Veća vrednost prioriteta posla wc_j označava da je posao j većeg prioriteta. U tabeli 5.2 prikazani su neophodni ulazni parametri koji se koriste za izbor sekvencijalnog rasporeda poslova primenom WSPT pravila prioriteta.

Tabela 5.2 Prioritetna najkraća obrada posla - WSPT

Poslovi	Vreme obrade pt_{ijk}	Važnost posla wc_j	pt_{ijk}/wc_j	Raspored poslova
1	6	2 	3.00	2
2	9	2	4.50	6
3	7	2	3.50	3
4	3	2 	1.50	1
5	11	3	3.66	4
6	4	1	4.00	5

Optimalan sekvencijalni raspored poslova formiran je deljenjem vremena obrade posla pt_{ijk} sa težinskim koeficijentom važnosti wc_j . Na ovaj način omogućava se prioritizacija poslova prema njihovoj relativnoj važnosti i vremenu izvršenja. Dobijeni sekvetni raspored poslova primenom WSPT pravila grafički je predstavljen na slici 5.5.



Slika 5.5 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom WSPT pravila

5.2.1.3 Obrada poslova prema najranijem datumu obrade – EDD pravilo

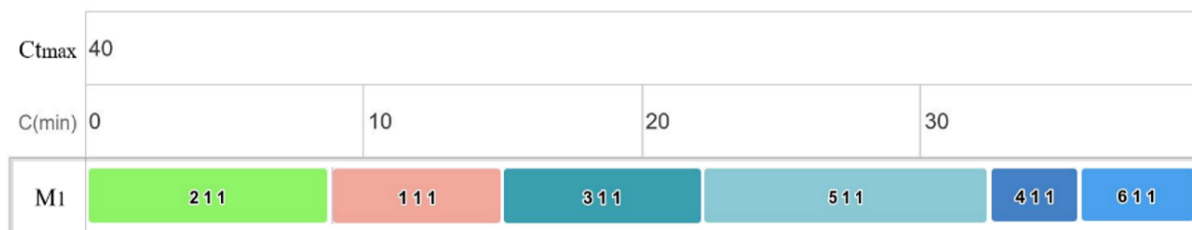
Obrada poslova prema najranijem datumu obrade predstavlja pravilo kod koga se poslovi rangiraju prema vremenskom roku do kojeg je potrebno završiti sve poslove ili pojedinačan posao na mašini. U tabeli 5.3 predstavljeni su ulazni parametri.

Tabela 5.3 Obrada posla prema najranijem datumu - EDD

Poslovi	Potrebno vreme obrade pt_{ijk}	Rok predaje dd_j	Raspored poslova
1	6	15 	2
2	9	10 	1
3	7	16	3

4	3	26	5
5	11	19	4
6	4	35	6

EDD metoda je posebno korisna u okruženjima gde je vremensko ograničenje obrade poslova važno. Optimalan raspored poslova primenom EDD pravila grafički je prikazan na slici 5.6.



Slika 5.7 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom EDD pravila

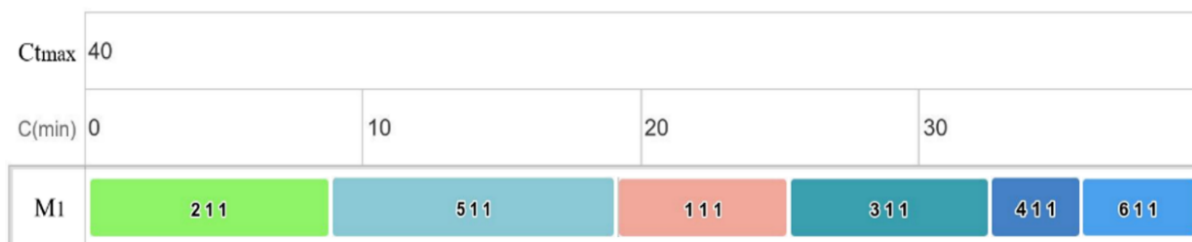
5.2.1.4 Ukupno vreme kašnjenja poslova - STR

Ukupno vreme kašnjenja posla na obradu definiše se kao ukupno vreme kašnjenja svih poslova u rasporedu. Sekvencijalni raspored poslova određuje se kao razlika između vremenskog roka obrade posla dd_j i vremena obrade posla pt_{ijk} (Alharkan, 2005).

U tabeli 5.4 predstavljen je način funkcionisanja STR pravila, dok optimalan raspored poslova grafički je predstavljen na slici 5.7.

Tabela 5.4 Ukupno vreme kašnjenja poslova - STR

Poslovi	Vreme obrade pt_{ijk}	Rok predaje dd_j	$dd_j - pt_{ijk}$	Raspored poslova
1	6	15	$15 - 6 = 9$	3
2	9	10	$10 - 9 = 1$	1
3	7	16	$16 - 7 = 9$	4
4	3	26	$26 - 3 = 23$	5
5	11	19	$19 - 11 = 8$	2
6	4	35	$35 - 4 = 31$	6



Slika 5.7 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom STR pravila

5.2.1.5 Metoda kritičnog odnosa - CRR

Metoda kritičnog odnosa predstavlja međusobni odnos vremena obrade posla pt_{ijk} i vremenskog roka obrade posla dd_j (Alharkan, 2005), (Pinedo, 2008), (Brucker, 2007). Odnos kritičnog puta i sekvencijalnog rasporeda poslova određuje se deljenjem vremenskog roka obrade posla i vremena obrade posla, što se i može videti u tabeli 5.5 gde su predstavljeni ulazni prametri.

Tabela 5.5 Metoda kritičnog odnosa - CRR

Poslovi	Vreme obrade pt_{ijk}	Rok predaje dd_j	dd_j / pt_{ijk}	Raspored poslova
1	6	15	$15 / 6 = 2,5$	4
2	9	10	$10 / 9 = 1,1$	1
3	7	16	$16 / 7 = 2,3$	3
4	3	26	$26 / 3 = 7,6$	5
5	11	19	$19 / 11 = 1,7$	2
6	4	35	$35 / 4 = 8,7$	6

Poslovi sa nižim kritičnim odnosom smatraju se prioritetnim poslovima, a njihovo pravovremeno izvršavanje osigurava da proces proizvodnje se odvija po planu. Optimalan raspored poslova primenom CRR pravila grafički je prikazan na slici 5.8.



Slika 5.8 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom CRR pravila

5.2.2 Džonsonovo pravilo u sekvenciranju poslova

Džonsonovo pravilo (*eng. Johnson's rule*) koristi se za sekvenciranje poslova, najčešće kod *Flow Shop* modela planiranja i raspoređivanja poslova. Ovo pravilo smanjuje vreme čekanja i povećava efikasnost rasporeda tako što se najkraće vreme obrade posla dodeljuje na početku ili kraju sekvence (Cho i Sahni, 1981). Osnovna procedura treba da zadovolji sledeće pretpostavke (Johnson, 1954), (Frostig i Adiri, 1985), (Allaoui i Artiba, 2009):

- Vremena obrade poslova su poznata unapred i ne menjaju se tokom izvršavanja;
- Svaki posao mora biti obrađen prvo na mašini 1, zatim na mašini 2, bez promene redosleda;

- c) Jednom kada posao započne obradu na nekoj mašini, mora biti završen pre nego što mašina prihvati sledeći posao;
- d) Planiranje se vrši za skup poslova koji su unapred definisani. Nema dolaska novih poslova tokom rasporeda;
- e) Nema zastoja između faza obrade, dakle postoji siguran protok obrade poslova na celoj liniji mašina;
- f) Džonsonovo pravilo se koristi isključivo kada je cilj minimizacija vremena završetka svih poslova.

Primer primene džonsonovog pravila prikazan je na modelu planiranja i raspoređivanja poslova na dve mašine sa unapred definisanom rutom $FS_2 \mid nowt \mid Ct_{max}$. Ulazni parametri predstavljeni su u tabeli 5.6.

Tabela 5.6 Ulazni parametri $FS_2 \mid nowt \mid Ct_{max}$

Posao	Vreme obrade na mašini M_1	Vreme obrade na mašini M_2
1	6	2
2	3	5
3	4	4
4	7	6
5	8	3

Korak 1 (Formiranje grupa): Formiranje grupa poslova zavisi od vremena obrade poslova na mašinama, poslovi se raspoređuju u dve grupe primenom sledećih pravila:

- Grupa I: prvu grupu čine poslovi koji se raspoređuju prema uslovu $pt_{j1} < pt_{j2}$ i imaju pravo prvenstva pri obradi na mašinama,
 Posao J_2 : $pt_{21} = 3, pt_{22} = 5 \rightarrow$ Grupa I
- Grupa II: drugu grupu čine poslovi koji se raspoređuju prema uslovu $pt_{j1} > pt_{j2}$ i obrađuju se nakon obrade prve grupe poslova,
 Posao J_1 : $pt_{11} = 6, pt_{12} = 2 \rightarrow$ Grupa II
 Posao J_4 : $pt_{41} = 7, pt_{42} = 6 \rightarrow$ Grupa II
 Posao J_5 : $pt_{51} = 8, pt_{52} = 3 \rightarrow$ Grupa I
- U slučaju da su vremena obrade poslova jednaka $pt_{1j} = pt_{2j}$, onda ti poslovi mogu biti deo bilo koje grupe.
 Posao J_3 : $pt_{31} = 4, pt_{32} = 4 \rightarrow$ može biti u bilo kojoj grupi: Grupa I ili Grupa II.

Nakon raspodele poslova po grupama one imaju sledeći oblik:

Grupa I: Posao J_2 i Posao J_3

Grupa II: Posao J_1 , Posao J_4 , Posao J_5 .

Korak 2 (Sortiranje unutar grupa):

- Poslovi iz Grupe I obrađuju se prema SPT pravilu.
Sekvetni raspored obrade poslova u tom slučaju biće: Posao $J_2 \rightarrow$ Posao J_3
- Poslovi iz Grupe II obrađuju se prema LPT pravilu.
Sekvetni raspored obrade poslova iz druge grupe biće: Posao $J_4 \rightarrow$ Posao $J_5 \rightarrow$ Posao J_1

Korak 3 (Kreiranje optimalne sekvence):

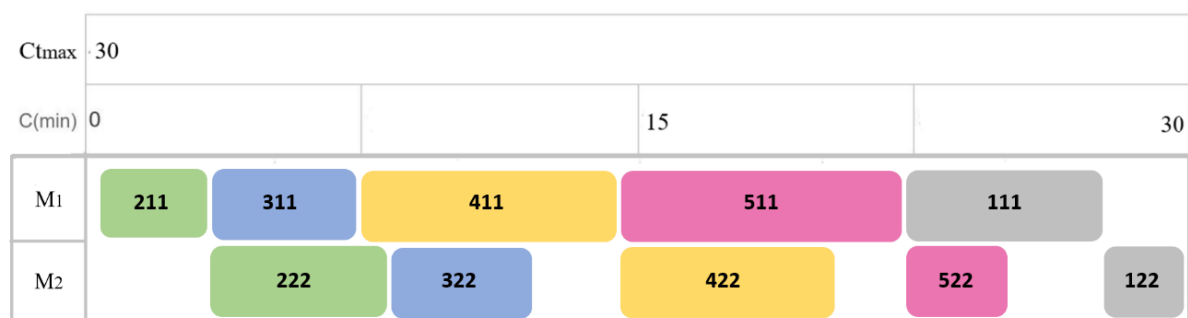
- Sabiranjem grupa (Grupa I + Grupa II) i primenom opisanih pravila dobija se optimalni sekvetni raspored poslova na mašinama.
- U tom slučaju optimalni sekvetni raspored poslova biće: Grupa I + Grupa II:
Posao $J_2 \rightarrow$ Posao $J_3 \rightarrow$ Posao $J_4 \rightarrow$ Posao $J_5 \rightarrow$ Posao J_1

Korak 4 (Izračunavanje funkcije cilja):

- Izračunavanje funkcije cilja Ct_{max} predstavljeno je u tabeli 5.7, dok grafički prikaz dobijenih rezultata prikazan je na slici 5.9.

Tabela 5.7 Izračunavanje ukupnog vremena obrade poslova Ct_{max}

J_n	Početak obrade M_1	Završetak obrade M_1	Početak obrade M_2	Završetak obrade M_2
J_1	0	3	3	8
J_2	3	7	8	12
J_3	7	14	14	20
J_4	14	22	22	25
J_5	22	28	28	30

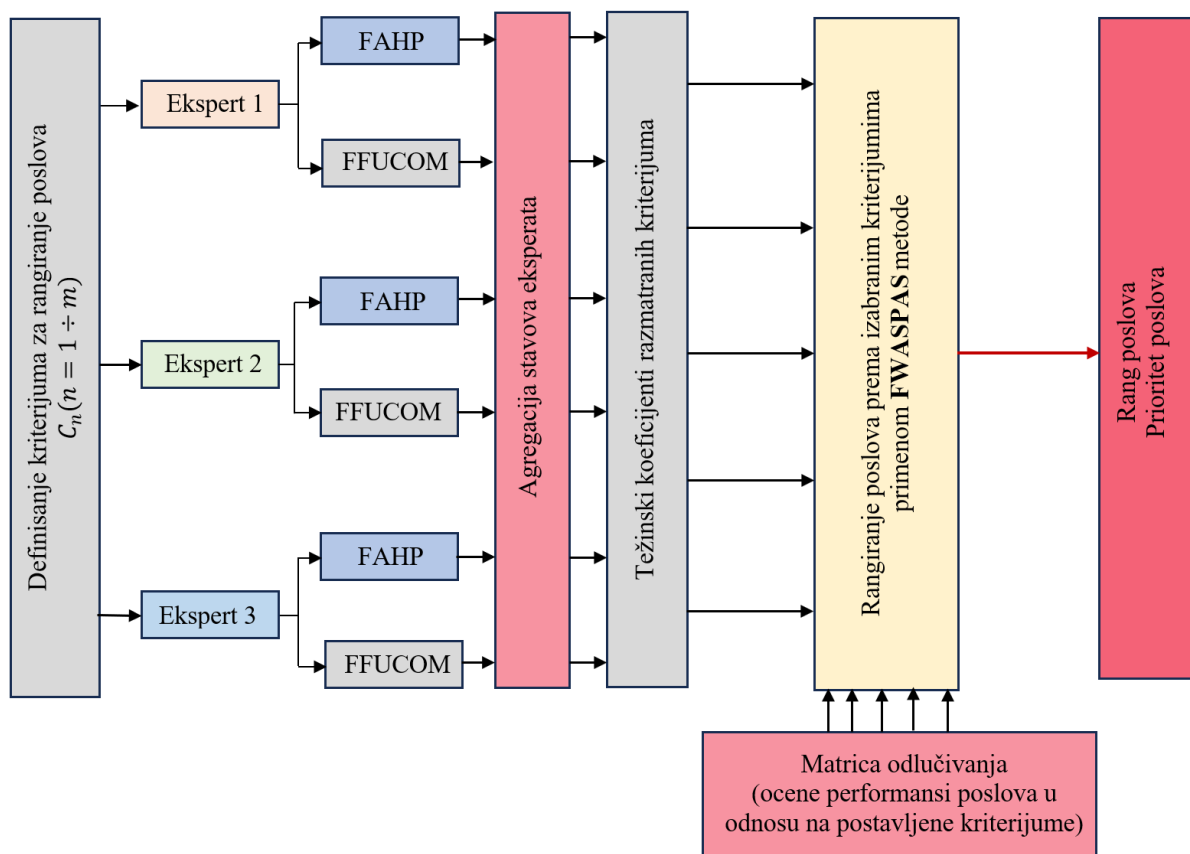


Slika 5.9 Grafički prikaz optimalnog sekvetnog rasporeda poslova

5.2.3 Pravila prioriteta poslova primenom fazi MCDM metoda

U slučaju složenih modela planiranja i raspoređivanja resursa problem određivanja prioriteta poslova je takođe relativno složen. Jedan od mogućih pristupa je primena fazi MCDM metoda u cilju rangiranja poslova po prioritetu. Implementacija fazi MCDM za određivanje prioriteta poslova ima za cilj uključivanje stavova eksperata i njihovih subjektivnih procena pri rangiranju poslova (Türkakin i sar., 2021), (Stanković i Petrović, 2025).

Detaljan postupak određivanja optimalnog plana i rasporeda poslova na mašinama, kod koga su poslovi rangirani prema svojim proritetima primenom fazi MCDM metoda, prezentovan je u radu (Stanković i Petrović, 2025). Zadatak je bio raspoređivanje dvanaest poslova $J = \{J_1, J_2, \dots, J_{12}\}$ na osam mašina $M = \{M_1, M_2, \dots, M_8\}$ prema prioritetima poslova koji se definišu njihovim rangiranjem primenom MCDM metoda. Osnovni koncept i šematski prikaz implementacije predložene metodologije grafički je predstavljen na slici 5.10, koja prikazuje ključne faze procesa odlučivanja i njihovu međusobnu povezanost (Stanković i Petrović, 2025).



Slika 5.10 Osnovi koncept i šematski prikaz implementacije MCDM metodologije

Ovaj metodološki okvir razvijen je sa ciljem optimizacije rasporeda poslova u složenim proizvodnim sistemima, uzimajući u obzir prioritete poslova kao ključne parametre koji utiču na

pravovremenost njihovog izvršenja. Cilj ovog pristupa je kreiranje preciznog i pouzdanog modela odlučivanja, koji omogućava optimalno raspoređivanje proizvodnih resursa na osnovu karakteristika poslova. Kombinovanjem naprednih fazi MCDM metoda, kao što su FAHP, FFUCOM i FWASPAS, omogućava se donošenje odluka koje uzimaju u obzir više međusobno zavisnih kriterijuma. Implementacija metodologije obuhvata definisanje kriterijuma, evaluaciju i agregaciju ekspertskih ocena, formiranje matrice odlučivanja i konačno rangiranje poslova.

Faza 1 (Definisanje kriterijuma za rangiranje poslova): Prva faza u ovom postupku je definisanje relevantnih kriterijuma, koji omogućavaju vrednovanje i rangiranje poslova u proizvodnom sistemu. Kriterijumi direktno utiču na proces odlučivanja i omogućavaju donošenje objektivnih odluka o raspoređivanju i prioritizaciji poslova. Cilj ove faze je da se odrede relevantni kriterijumi koji utiču na rangiranje poslova samim tim kasnije i na izbor prioriteta poslova. Kriterijumi koji direktno imaju uticaj na upravljanje procesom proizvodnje i povezani su sa karakteristikama svakog posla mogu se sagledati na sledeći način:

- C_1 : Ukupno vreme obrade posla (minimizacioni kriterijum – poželjna je alternativa sa kraćim vremenom obrade poslova na bilo kojoj mašini),
- C_2 : Broj operacija jednog posla (minimizacioni kriterijum - poželjna je alternativa sa manjim brojem operacija u okviru jednog posla),
- C_3 : Vremenski rok do kojeg je potrebno završiti posao (minimizacioni kriterijum - poželjna je alternativa sa ranijim rokom obrade posla ili do zadatog vremenskog roka),
- C_4 : Ukupno vreme podešavanja posla na izvršenje (minimizacioni kriterijum – poželjna je alternativa sa kraćim vremenom pripreme obrade posla na mašini),
- C_5 : Najraniji mogući datum početak obrade posla (maksimizacioni kriterijum – poželjna je alternativa sa kasnijim početkom obrade posla što pruža više opcija za raspored),
- C_6 : Fleksibilnost obrade posla na različitim mašinama (maksimizacioni kriterijum – poželjna je alternativa sa većom fleksibilnošću što olakšava planiranje proizvodnje),
- C_7 : Posao se može obraditi na istoj mašini više puta nezavisno od rute obrade poslova (maksimizacioni kriterijum – poželjna je alternativa sa većom nezavisnošću obrade poslova čime se smanjuje ograničenje rasporeda).

Faza 2 (Procena kriterijuma od strane više eksperata): Kako bi se obezbedila pouzdanost dodeljenih težinskih vrednosti, potrebno je sprovesti anketiranje eksperata, pri čemu su mišljenja stručnjaka analizirana primenom FAHP i FFUCOM metode. Svaki ekspert ima specijalizovano

znanje iz oblasti MCDM metoda, proizvodnih sistema, logistike i optimizacije, čime se osigurava validnost ocenjivanja. Procena kriterijuma od strane eksperata ključan je korak u procesu odlučivanja, jer omogućava subjektivnu ocenu i dodelu odgovarajuće težine svakom kriterijumu u skladu sa njegovim uticajem na rangiranje poslova.

Kombinovanjem individualnih ekspertskih ocena kroz proces agregacije, dobijaju se konačni težinski koeficijenti kriterijuma. Primenom opisane metodologije određuju se težinski koeficijenti u vidu fazi brojeva $\hat{W}_r = (Wr_1, Wr_2, Wr_3)$, koje predstavljaju donju, srednju i gornju granicu procene. Dobijeni rezultati prikazani su u tabeli 5.8.

Faza 3 (Agregacija stavova eksperata): Svaki ekspert individualno ocenjuje kriterijume koristeći FAHP i FFUCOM metode, prema tome neophodno je sprovesti agregaciju rezultata. Agregacija ekspertskih ocena je bitan korak u procesu višekriterijumskog odlučivanja, jer omogućava formiranje jedinstvenog skupa težinskih koeficijenata kriterijuma. U predloženoj metodologiji izabrana je metoda aritmetičke sredine. Rezultati su prikazani u tabeli 5.8 (Stanković i Petrović, 2025).

Tabela 5.8 Težinski koeficijenti razmatranih kriterijuma

Fazi MCDM	Eksperti	W_r	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
FAHP	Expert 1	Wr_{11}	0.045	0.006	0.554	0.000	0.395	0.000	0.000
		Wr_{21}	0.045	0.006	0.554	0.000	0.395	0.000	0.000
		Wr_{31}	0.045	0.006	0.554	0.000	0.395	0.000	0.000
	Expert 2	Wr_{12}	0.181	0.046	0.436	0.000	0.337	0.000	0.000
		Wr_{22}	0.181	0.046	0.436	0.000	0.337	0.000	0.000
		Wr_{32}	0.181	0.046	0.436	0.000	0.337	0.000	0.000
	Expert 3	Wr_{13}	0.208	0.131	0.390	0.000	0.271	0.000	0.000
		Wr_{23}	0.208	0.131	0.390	0.000	0.271	0.000	0.000
		Wr_{33}	0.208	0.131	0.390	0.000	0.271	0.000	0.000
FFUCOM	Expert 1	Wr_{11}	0.087	0.047	0.175	0.058	0.113	0.070	0.064
		Wr_{21}	0.150	0.121	0.322	0.122	0.143	0.121	0.098
		Wr_{31}	0.150	0.121	0.322	0.122	0.143	0.126	0.098
	Expert 2	Wr_{12}	0.057	0.035	0.133	0.054	0.151	0.070	0.060
		Wr_{22}	0.129	0.102	0.273	0.115	0.261	0.101	0.101
		Wr_{32}	0.129	0.104	0.273	0.115	0.261	0.130	0.101
	Expert 3	Wr_{13}	0.057	0.035	0.133	0.054	0.151	0.070	0.060
		Wr_{23}	0.129	0.102	0.273	0.115	0.261	0.101	0.101
		Wr_{33}	0.129	0.104	0.273	0.115	0.261	0.130	0.101
Aritmetička sredina	Ukupno	Wr_1	0.106	0.050	0.303	0.028	0.236	0.035	0.031
		Wr_2	0.140	0.085	0.375	0.059	0.278	0.054	0.050
		Wr_3	0.140	0.085	0.375	0.059	0.278	0.064	0.050

Faza 4: (Formiranje matrice odlučivanja): Matrica odlučivanja predstavlja objektivnu analizu alternativa u procesu rangiranja poslova. Formira se na način da omogući strukturirano poređenje različitih alternativa na osnovu više kriterijuma. Njena glavna svrha je omogućiti donošenje objektivnih odluka uzimajući u obzir različite faktore koji utiču na izbor najbolje opcije. U slučaju kada postoji neizvesnost, subjektivnost ili nepreciznost u ocenjivanju alternativa i kriterijuma u višekriterijumskom odlučivanju koriste se fazi brojevi (u ovom slučaju trougaoni fazi broj) sa ciljem preciznijeg modeliranja realnih situacija.

Matrica odlučivanja sa jedne strane i vektor težinskih koeficijenata sa druge strane služe kao ulazni parametri FWASPAS metode, omogućavajući donošenje optimalnih odluka. Jasno definisani minimizacioni i maksimizacioni kriterijumi garantuju tačnost rangiranja.

Svaki element matrice odlučivanja kvantitativno izražava performansu alternative (posla) prema jednom kriterijumu, što se i može videti u tabeli 5.9 (Stanković i Petrović, 2025).

Tabela 5.9 Ocene karakteristika poslova - matrica odlučivanja

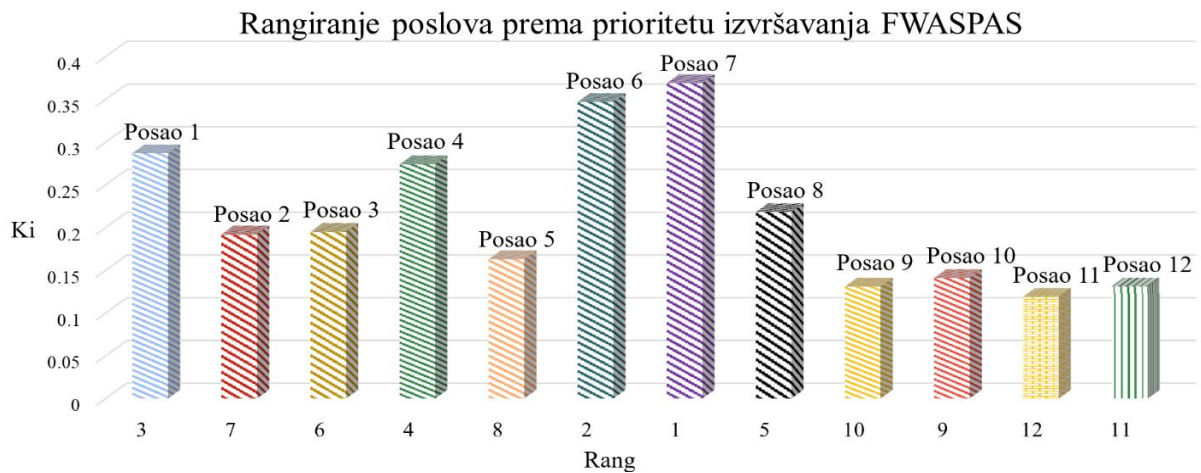
C_n	C_1 [vreme]	C_2 [-]	C_3 [-]	...	C_6 [-]	C_7 [-]
J_n	<i>min</i>	<i>min</i>	<i>min</i>	...	<i>max</i>	<i>max</i>
J_1	(14, 16.5, 18.6)	8	(2, 8, 10)	...	(0.25, 0.5, 0.75)	(0, 0, 0.25)
J_2	(16, 18.5, 20)	8	(7, 15, 19)	...	(0.5, 0.75, 1.0)	(0, 0.25, 0.5)
J_3	(7.5, 8.5, 9.6)	4	(9, 15, 23)	...	(0.25, 0.5, 0.75)	(0, 0.25, 0.5)
J_4	(6.5, 7.5, 8.7)	5	(3, 12, 16)	...	(0.5, 0.75, 1.0)	(0.25, 0.5, 0.75)
J_5	(16, 17.5, 21.5)	9	(15, 16, 18)	...	(0.5, 0.75, 1.0)	(0.25, 0.5, 0.75)
J_6	(7.5, 8.5, 9)	6	(15, 17, 25)	...	(0.75, 1.0, 1.0)	(0.5, 0.75, 1.0)
J_7	(3.5, 6.5, 7.8)	3	(17, 21, 29)	...	(0.75, 1.0, 1.0)	(0.5, 0.75, 1.0)
J_8	(6.5, 7.5, 8.6)	3	(18, 22, 28)	...	(0.25, 0.5, 0.75)	(0, 0.25, 0.5)
J_9	(7.5, 8.5, 9.6)	3	(19, 23, 29)	...	(0, 0.25, 0.5)	(0, 0, 0.25)
J_{10}	(15.5, 17.5, 19)	8	(22, 25, 32)	...	(0.25, 0.5, 0.75)	(0.25, 0.5, 0.75)
J_{11}	(12.5, 13.5, 15)	7	(23, 25, 33)	...	(0, 0.25, 0.5)	(0.25, 0.5, 0.75)
J_{12}	(18.5, 19.5, 22)	9	(26, 27, 37)	...	(0.75, 1.0, 1.0)	(0.25, 0.5, 0.75)

Faza 5 (Rangiranje poslova prema prioritetu obrade): Nakon definisanja kriterijuma, određivanja težinskih koeficijenata i formiranja matrice odlučivanja, poslovi se rangiraju primenom FWASPAS metode. Rezultati rangiranih poslova prema FWASPAS metodi prikazani su u tabeli 5.10 (Stanković i Petrović, 2025).

Tabela 5.10 Rangiranje poslova prema prioritetu izvršavanja FWASPAS

J_n	1	2	3	4	...	7	8	9	10	11	12
K_i	0.287	0.192	0.195	0.274	...	0.369	0.218	0.131	0.141	0.119	0.131
Rang	3	7	6	4	...	1	5	10	9	12	11

Grafički prikaz rangiranih poslova prema FWASPAS metodi predstavljen je na slici 5.11.



Slika 5.11 Grafički prikaz rangiranja poslova prema prioritetu izvršavanja

5.3 MATEMATIČKI PRISTUP IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE CILJA

Funkcije Ct_{max} , W_{max} , TM_{max} , LM_{max} u optimizaciji i upravljanju resursima su matematički izrazi ili kriterijumi čija je uloga kvantitativno iskazivanje ciljnih funkcija. Svaka funkcija ima svoju primenu a izbor odgovarajuće funkcije cilja zavisi od specifičnih ciljeva i problema optimizacije.

Kako bi se matematički prikazao pristup izračunavanja funkcije cilja, korišćen je primer definisan u tabeli 5.3, prema kojem su poslovi raspoređeni u sledećem sekvenom planu: **2 – 1 – 3 – 5 – 4 – 6**. Ovakav sekventni raspored poslova iskorišćen je za dalji tok izračunavanja ciljnih funkcija (Alharkan, 2005). Pre toga neophodno je za svaki posao sračunati ranije definisane veličine:

$$C_j = (Sd_j + pt_{ijk}) \quad (5.1)$$

$$Sd_j = Wt_j \quad (5.2)$$

$$LM_j = (C_j - dd_j) \quad (5.3)$$

$$TM_j = \max (LM_j, 0) \quad (5.4)$$

gde C_j predstavlja vreme trajanja posla j , Sd_j vreme početka obrade posla j , LM_j ukupno kašnjenje posla j na izvršenje, TM_j prosečno kašnjenje poslova na obradu. U tabeli 5.11 prikazani su dobijeni rezultati.

Tabela 5.11 Numeričke vrednosti veličina C_j , Sd_j , LM_j , TM_j .

Poslovi	pt_{ijk}	Sd_j	Ct_j	dd_j	Wt_j	LM_j	TM_j
2	9	0	9	10	0	-1	0
1	6	9	15	15	9	0	0
3	7	15	22	16	15	6	6
5	11	22	33	19	22	14	14
4	3	33	36	26	33	10	10
6	4	36	40	35	36	5	5

Konačno izračunavanja funkcija cilja Ct_{max} , W_{max} , TM_{max} , LM_{max} , prikazano je izrazima 5.5 – 5.8 (Alharkan, 2005), (Pinedo, 2008):

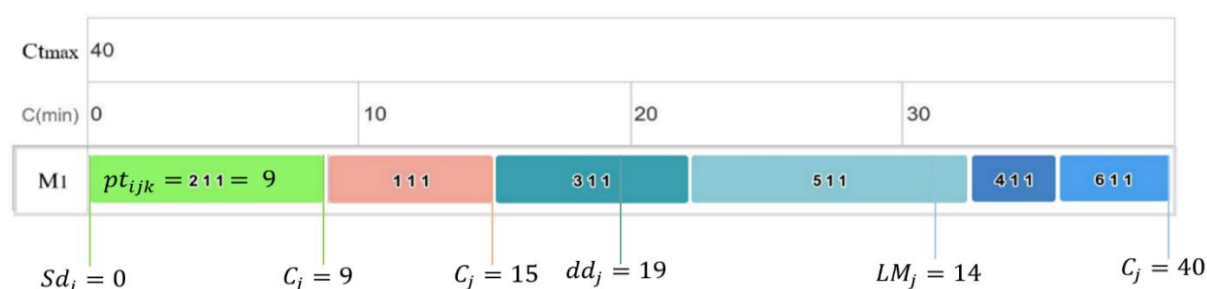
$$Ct_{max} = \sum_{j=1}^{j=6} pt_{ijk} = 40 \quad (5.5)$$

$$W_{max} = \frac{\sum_{j=1}^6 Wt_j}{6} = \frac{115}{6} = 19,166 \quad (5.6)$$

$$TM_{max} = \frac{\sum_{j=1}^6 TM_j}{6} = \frac{35}{6} = 5,833 \quad (5.7)$$

$$LM_{max} = 14 \quad (5.8)$$

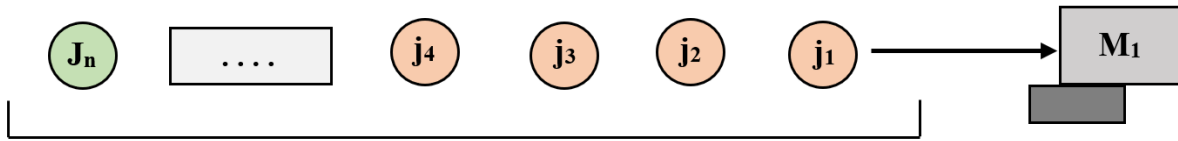
gde Ct_{max} predstavlja ukupno vreme trajanja svih poslova, W_{max} predstavlja prosečno čekanje svih poslova na izvršenje, TM_{max} prosečno kašnjenje poslova, LM_{max} maksimalno kašnjenje j tog posla. Grafički prikaz vrednosti funkcije cilja prikazan je na slici 5.12.

**Slika 5.12** Grafički prikaz rasporeda poslova i izračunavanja funkcije cilja

5.4 MODEL PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA POSLOVA NA POJEDINAČNOJ MAŠINI S_m

Model planiranja i raspoređivanja poslova na pojedinačnoj mašini predstavlja prvi i osnovni model u jednom proizvodnom okruženju. U razmatranom slučaju mašinsko okruženje

sastoji se od jedne mašine na kojoj je potrebno rasporediti n poslova u skladu sa funkcijom cilja. Opisani model grafički je prikazan na slici 5.13.



Slika 5.13 Grafički prikaz modela na pojedinačnoj mašini S_m

Model planiranja i raspoređivanja poslova na pojedinačnoj mašini potrebno je da zadovolji sledeće pretpostavke (Pinedo, 2001), (Brucker, 2007):

- mašina obrađuje poslove jedan po jedan a vreme obrade na mašini je unapred poznato,
- mašina je dostupna u svakom trenutku dok traje proces raspoređivanja poslova,

5.4.1 Matematička formulacija determinističkog modela raspoređivanja poslova na pojedinačnoj mašini $S_m \mid rd_j, dd_j \mid \Sigma Ct_j$

Model sa jednom mašinom predstavlja osnovni oblik raspoređivanja poslova u proizvodnim sistemima, gde se svi poslovi obavljaju sekvencijalno na jednoj dostupnoj mašini. Za definisanje matematičke formulacije modela sa jednom mašinom korišćena je sledeća notacija:

J - skup poslova, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$,

pt_j - potrebno vreme obrade za posao j ,

rd_j - obrada posla j nije moguća pre datuma izdavanja naloga za obradu,

Sd_j - početno vreme svakog posla j ,

dd_j - poslednji rok završetka svakog posla j ,

Ct_j - vreme završetka posla j ,

Ct_{max} - ukupno vreme završetka svih poslova.

Promenljive odlučivanja u ovom slučaju mogu se definisati na sledeći način:

$$x_{jj'} = \begin{cases} 1, & \text{ako je posao } j \text{ ispred posla } j' \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

Funkcija cilja, odnosno kriterijum optimalnosti ima oblik:

$$\min Ct_{max} \tag{5.9}$$

pri čemu važe sledeća ograničenja:

$$Ct_j + pt_j \leq Ct_{j'} + K(1 - x_{jj'}), \quad \forall j, j' \in J, j \neq j' \tag{5.10}$$

$$x_{jj'} + x_{j'j} = 1, \forall j, j' \in J, j \neq j' \quad (5.11)$$

$$Sd_j \geq rd_j, \quad \forall j \in J \quad (5.12)$$

$$Ct_j \geq Sd_j + pt_j, \quad \forall j \in J \quad (5.13)$$

$$Ct_j \geq 0, \quad \forall j \in J \quad (5.14)$$

$$Ct_j \leq Ct_{max}, \forall j \in J \quad (5.15)$$

$$x_{jj'} \in \{0,1\}, \forall j, j' \in J, j \neq j' \quad (5.16)$$

Ograničenja (5.10) i (5.11) osiguravaju da svaki posao bude obrađen u definisanom redosledu, sprečavajući na taj način preklapanja u rasporedu. Ograničenje (5.12) predstavlja uslov da posao ne može početi da se obrađuje pre nego što je dostupan za obradu, dok ograničenje (5.13) definiše vreme završetka posla. Ograničenje (5.14) osigurava da vremena obrade budu pozitivna, dok ograničenje (5.15) postavlja maksimalno vreme završetka svih poslova u rasporedu. Konačno, ograničenje (5.16) opisuje promenljivu odlučivanja $x_{jj'}$ koja može biti 0 ili 1, čime se jasno određuje redosled poslova.

5.4.2 Matematička formulacija stohastičkog modela raspoređivanja poslova na pojedinačnoj mašini $S_m \mid stohpt_j \mid \Sigma Ct_j$

U nastavku je prikazana model raspoređivanja poslova na jednoj mašini sa stohastičkim vremenima obrade. Primer stohastičkog modela kod koga su vremena obrade slučajne promenljive detaljno je predstavljen u poglavlju 4.2.1. U ovom modelu, deterministička vremena obrade pt_j , zamenjena su slučajnim promenljivama $stohpt_j$, koje slede normalnu raspodelu $stohpt_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$ sa srednjom vrednošću μ_j i standardnom devijacijom σ_j . Kako bi se obezbedila sigurnost u rasporedu poslova, ograničenja su prilagođena tako da zadovolje uslov verovatnoće 95%. Proširenjem determinističkog modela, omogućava se optimizacija rasporeda u uslovima neizvesnosti gde ograničenja (5.11), (5.12), (5.14) i (5.16) ostaju ista kao u slučaju determinističkog modela. Ograničenja koja se dodaju stohastičkom modelu predstavljena su izrazima 5.17 – 5.20:

$$Ct_j + stohpt_j \leq Ct_{j'} + K(1 - x_{jj'}), \quad \forall j, j' \in J, j \neq j' \quad (5.17)$$

$$P(Ct_j + stohpt_j \leq Ct_{j'}) \geq 0,95\%, \quad \forall j' \in J, j \neq j' \quad (5.18)$$

$$P(Ct_j \geq Sd_j + stohpt_j) = 0,95\%, \quad \forall j \in J \quad (5.19)$$

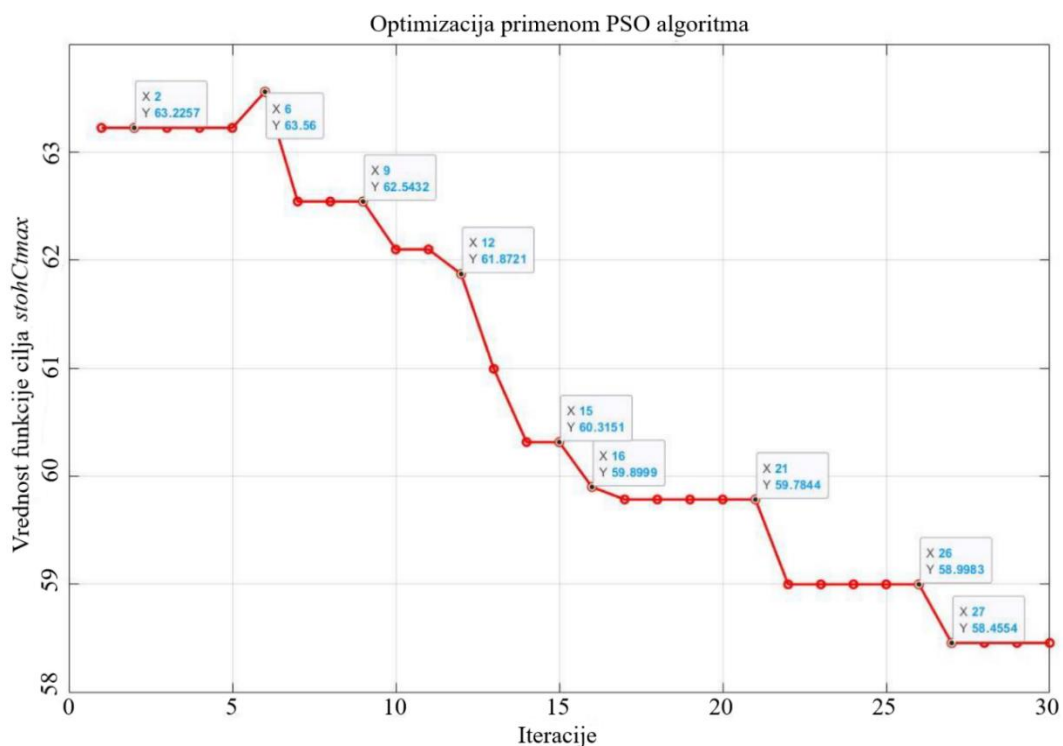
$$P(Ct_j \leq stohCt_{max}) \geq 0,95\%, \quad \forall j \in J \quad (5.20)$$

5.4.2.1 Primer optimizacije stohastičkog modela raspoređivanja poslova na pojedinačnoj mašini primenom PSO algoritma

Model raspoređivanja poslova na jednoj mašini, kod koga su vremena obrade poslova slučajne veličine sa normalnim zakonom raspodele, prema usvojenoj notaciji, ima oblik $S_m | stohpt_j | stohCt_{max}$. Primenom PSO algoritma optimizacije na ovako definisan model predstavljena je u nastavku. U tabeli 5.12 prikazani su ulazni parametri i rezultati optimizacije.

Tabela 5.12 Stohastička vremena obrade poslova na mašinama

Poslovi	Vreme obrade $stohpt_j$	Sekventni raspored poslova
1	9.266	3
2	11.442	10
3	10.353	5
4	9.884	4
5	11.094	8
6	7.723	2
7	10.431	6
8	7.236	1
9	11.438	9
10	11.005	7
$stohCt_{max}$	58.455 minuti	

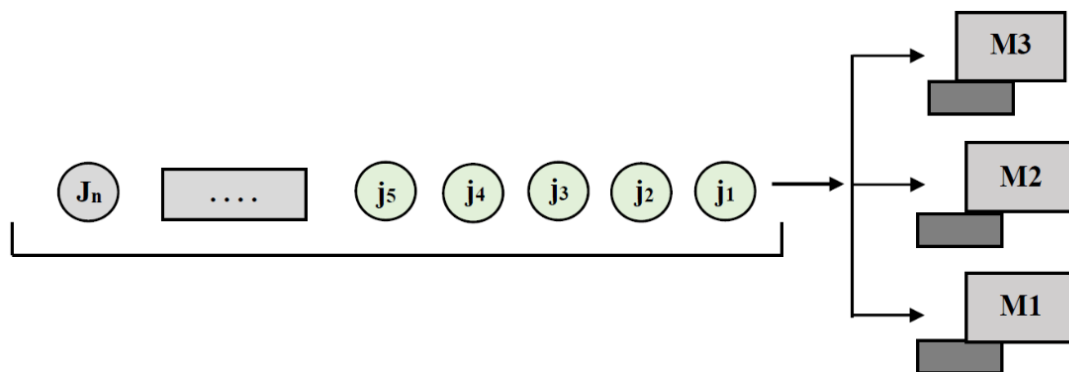


Slika 5.14 Grafički prikaz vrednosti funkcije cilja $stohCt_{max}$ u odnosu na broj iteracija

5.5 MODEL PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA POSLOVA NA MAŠINAMA U PARALELNOJ VEZI P_m

Model planiranja i raspoređivanja poslova na mašinama u paralelnoj vezi fokusira se na istovremenu obradu zadataka radi povećanja efikasnosti proizvodnje. Paralelna struktura omogućava ravnomerno raspoređivanje opterećenja, čime se smanjuju uska grla i optimizuje vreme izvršenja. Ključni izazov je sinhronizacija poslova kako bi se postigla maksimalna iskorišćenost svih mašina bez zastoja. Optimizacija modela raspoređivanja omogućava dinamičko prilagođavanje promenljivim uslovima rada i povećava produktivnost sistema.

Zadatak je postavka modela planiranja i raspoređivanja n poslova na skupu m mašina u međusobnoj paralelnoj vezi. Na slici 5.15 predstavljen je grafički prikaz modela u paralelnoj vezi mašina.



Slika 5.15 Grafički prikaz modela u paralelnoj vezi mašina P_m

Formulacija modela u paralelnoj vezi najčešće se koristi u sledećim formama:

- Paralelna veza sa identičnim mašinama sa oznakom - PI_m ,
- Paralelna veza mašina sa različitim brzinama obrade sa oznakom - QP_m ,
- Paralelna veza mašina sa različitim karakteristikama - RU_m .

5.5.1 Matematička formulacija determinističkog modela raspoređivanja poslova na mašinama u paralelnoj vezi $PI_m | pprmp | Ct_{max}$

Prema formulaciji determinističkog modela $PI_m | pprmp | Ct_{max}$ može se zaključiti da se radi o paralelnoj vezi mašina. U polju α : predstavljena oznaka PI_m označava da se radi o paralelnoj vezi sa identičnim mašinama. U polju β : predstavljena oznaka $pprmp$ predstavlja mogućnost prekida posla koji je u tom trenutku bio na raspolaganju za izvršavanje i pokretanje obrade novog posla koji možda do tada nije bio dostupan na izvršenje. U polju γ : predstavljena je funkcija cilja Ct_{max} koja označava kriterijum minimizacije ukupnog vremena. Za model u

paralelnoj vezi sa identičnim mašinama korišćena je sledeća notacija (Naderi i sar., 2011), (Stanković i sar., 2021):

M – mašina na kojoj se vrši raspoređivanje poslova,

m – broj mašina,

J - skup poslova, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$,

n – ukupan broj poslova,

p_{tjk} - potrebno vreme obrade posla j na mašini k ,

x_{jk} – promenljiva odlučivanja,

Ct_{max} – ukupno vreme završetka svih poslova.

Promenljive odlučivanja u ovom slučaju mogu se definisati na sledeći način:

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{ako je posao } j \text{ dodeljen mašini } k \\ 0, & \text{ako posao } j \text{ nije dodeljen mašini } k \end{cases}$$

Kriterijum optimalnosti:

$$\min Ct_{max} \quad (5.20)$$

pri čemu važe sledeća ograničenja (Stanković i sar., 2021):

$$\sum_j^n p_{tjk} x_{jk} \leq Ct_{max} \quad k = 1, \dots, m \quad (5.21)$$

$$p_{tjk} \leq Ct_{max} \quad j = 1, \dots, n \quad (5.22)$$

$$\sum_{k=1}^m x_{jk} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.23)$$

$$x_{jk} \geq 0 \quad k = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \quad (5.24)$$

$$Ct_{max} \geq 0 \quad (5.25)$$

Funkcija cilja (5.20) predstavlja kriterijum minimizacije ukupnog vremena i optimalan raspored poslova na mašinama. Ograničenje (5.21) obezbeđuje i osigurava da je ukupno vreme obrada na bilo kojoj mašini manje ili jednako od ukupne funkcije cilja Ct_{max} . Ograničenje (5.22) obezbeđuje uslov da je vreme bilo koje pojedinačne obrade kraće od funkcije cilja. Ograničenje (5.23) definiše uslov da svaki posao mora biti dodeljen tačno jednoj mašini u tom

trenutku. Ograničenje (5.24) definiše tip promenljive, dok ograničenje (5.25) uslovljava da ciljna funkcija mora biti veća od nule.

5.5.1.1 Primer optimizacije determinističkog modela raspoređivanja sa vremenima obrade poslova i vremenima podešavanja mašina primenom SA i GA algoritma

Optimizacija problema opisanog primenom determinističkog modela raspoređivanja poslova na paralelnim mašinama sa vremenima obrade poslova i vremenima podešavanja mašina prikazana je u tekstu koji sledi. U svrhu optimizacije prikazana je primena SA i GA algoritma za slučajeve obrade deset, odnosno dvadeset, poslova na osam paralelnih mašina. U tabeli 5.13 data su vremena obrade poslova na mašinama, dok su tabeli 5.14 prikazana vremena podešavanja poslova pri obradi na pojedinačnim mašinama (Stanković i sar., 2021).

Tabela 5.13 Vremena obrade poslova na mašinama

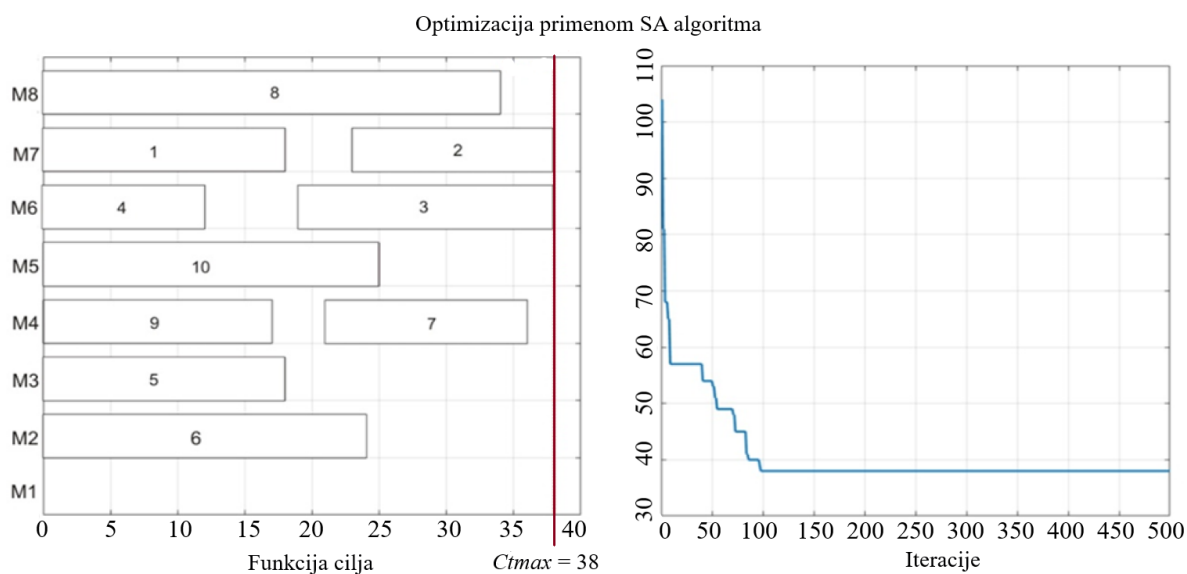
Poslovi	Vremena obrade poslova na mašinama							
J_n	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
J_1	29	17	18	25	38	27	18	35
J_2	23	52	50	59	55	30	15	17
J_3	25	39	55	10	42	19	23	25
J_4	45	38	36	49	22	12	33	35
J_5	55	56	18	51	12	30	43	25
J_6	48	24	40	54	32	40	33	45
J_7	48	27	18	15	42	50	53	27
J_8	23	52	50	59	58	24	45	34
J_9	25	39	35	17	28	34	49	64
J_{10}	45	38	36	49	25	44	40	44

Tabela 5.14 Vremena podešavanja mašina pri obradi poslova

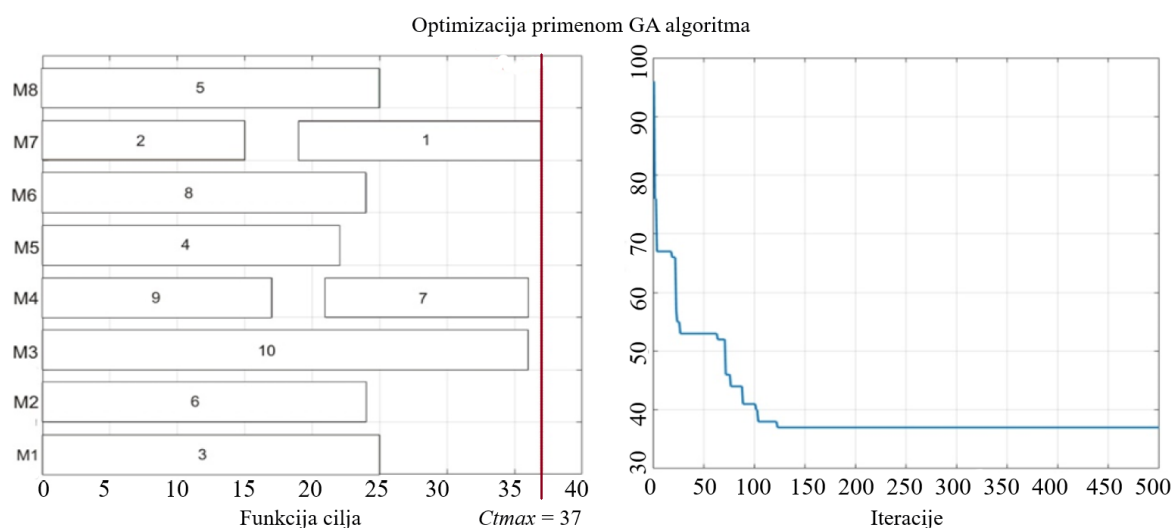
M_1	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	M_2	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
J_1	5	7	5	7	7	5	2	4	3	8	J_1	7	7	7	6	3	2	4	7	2	5
J_2	3	5	8	5	6	6	5	2	7	4	J_2	7	7	3	4	4	3	3	6	6	3
J_3	6	8	6	8	3	2	7	8	4	2	J_3	7	2	2	8	2	5	3	7	2	2
J_4	3	4	3	6	6	6	8	8	5	5	J_4	2	5	7	3	6	3	2	6	7	5
J_5	2	7	3	6	2	4	3	8	3	4	J_5	6	4	6	6	3	7	2	5	8	3
J_6	7	4	4	7	6	2	3	8	3	3	J_6	5	5	7	6	2	8	6	6	7	8
J_7	3	7	7	8	3	5	5	7	6	3	J_7	3	4	6	4	7	2	8	5	2	2
J_8	5	7	7	8	7	3	6	5	4	8	J_8	2	4	4	2	4	5	2	4	2	4
J_9	6	4	7	2	8	2	4	3	8	6	J_9	7	3	4	2	6	2	4	7	6	5
J_{10}	4	3	4	8	8	3	3	4	2	5	J_{10}	3	3	7	4	4	7	8	8	7	7
M_3	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	M_4	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}

J_1	6	5	8	5	4	6	3	8	2	3	J_1	7	7	8	3	8	2	5	2	3	8
J_2	4	6	5	6	5	5	5	6	3	2	J_2	8	5	2	3	6	7	6	4	7	6
J_3	5	8	5	7	4	3	2	5	2	6	J_3	3	3	2	4	4	4	8	8	4	6
J_4	6	7	4	5	7	6	7	7	5	8	J_4	7	5	4	8	7	7	3	5	4	7
J_5	8	4	5	3	7	2	7	5	3	8	J_5	3	5	6	5	8	5	7	4	3	2
J_6	7	7	5	5	5	6	8	5	4	3	J_6	8	8	5	4	5	5	6	3	7	8
J_7	2	2	2	4	6	6	8	6	4	5	J_7	7	7	8	3	5	2	5	5	6	4
J_8	6	2	8	8	8	2	5	4	2	4	J_8	4	8	5	8	4	2	8	8	7	2
J_9	5	2	2	6	7	2	3	3	5	5	J_9	7	6	5	4	2	2	4	2	7	7
J_{10}	5	3	5	6	6	3	2	6	6	3	J_{10}	5	4	5	7	3	6	3	5	2	7
M_5	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	M_6	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
J_1	4	7	5	7	7	2	2	7	5	3	J_1	7	7	7	6	3	3	2	4	7	2
J_2	3	5	8	5	6	6	5	2	7	4	J_2	7	7	3	4	4	3	3	6	6	3
J_3	6	8	6	8	3	2	7	8	4	2	J_3	7	2	2	8	2	5	3	7	2	2
J_4	3	4	3	6	6	6	8	8	5	5	J_4	2	5	7	3	6	3	2	6	7	5
J_5	2	7	3	6	2	4	3	8	2	4	J_5	6	4	6	6	3	7	2	5	8	3
J_6	7	4	4	7	6	2	3	8	3	3	J_6	5	5	7	6	2	8	6	6	7	8
J_7	3	7	7	8	6	5	5	7	6	3	J_7	3	4	6	4	7	2	8	5	2	2
J_8	5	7	7	8	7	3	6	5	4	8	J_8	2	4	4	2	4	5	2	4	2	4
J_9	6	4	7	2	8	2	4	3	8	6	J_9	7	3	4	2	6	2	4	7	6	5
J_{10}	4	3	4	8	8	3	3	4	2	5	J_{10}	3	3	7	4	4	7	8	8	7	7
M_7	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	M_8	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
J_1	6	5	8	5	4	6	3	8	2	3	J_1	7	7	8	3	8	2	5	2	3	8
J_2	4	6	5	6	5	5	5	6	3	2	J_2	8	5	2	3	6	7	6	4	7	6
J_3	5	8	5	7	4	3	2	5	2	6	J_3	3	3	2	4	4	4	8	8	4	6
J_4	6	7	4	5	7	6	7	7	5	8	J_4	7	5	4	8	7	7	3	5	4	7
J_5	8	4	5	3	7	2	7	5	3	8	J_5	3	5	6	5	8	5	7	4	3	2
J_6	7	7	5	5	5	6	8	5	4	3	J_6	8	8	5	4	5	5	6	3	7	8
J_7	2	2	2	4	6	6	8	6	4	5	J_7	7	7	8	3	5	2	5	5	6	4
J_8	6	2	8	8	8	2	5	4	2	4	J_8	4	8	5	8	4	2	8	8	7	2
J_9	5	2	2	6	7	2	3	3	5	5	J_9	7	6	5	4	2	2	4	2	7	7
J_{10}	5	3	5	6	6	3	2	6	6	3	J_{10}	8	4	5	7	3	6	3	5	2	7

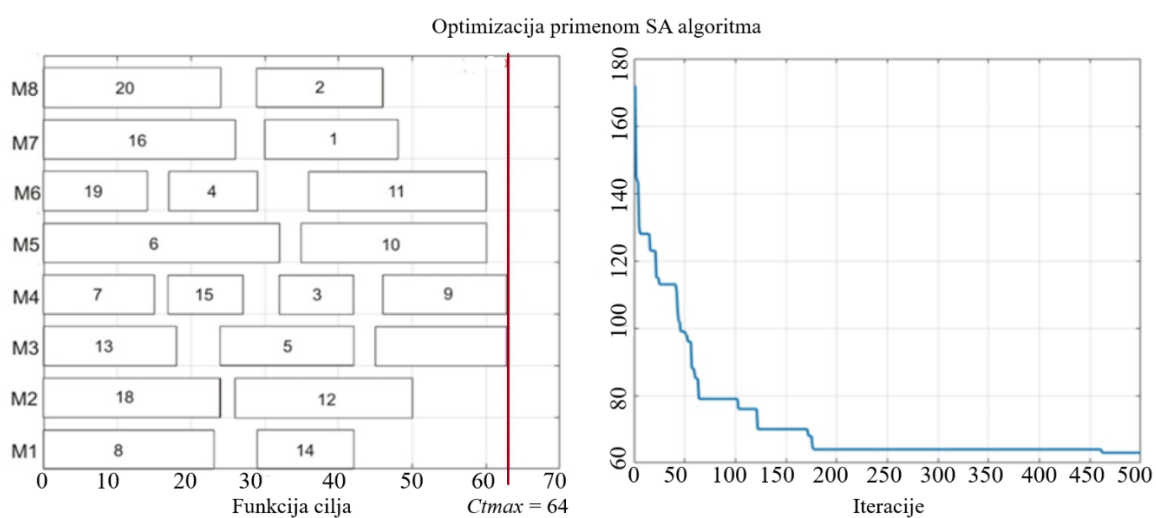
Rezultati optimizacije imaju za cilj da prikažu performanse SA i GA algoritama. U nastavku su grafički predstavljeni dobijeni rezultati na slici 5.16 i 5.17, za skup podataka koji obuhvata deset poslova i osam paralelnih mašina. Takođe, na slikama 5.18 i 5.19 prikazani su rezultati optimizacije za skup podataka koji sadrži dvadeset poslova i osam paralelnih mašina. U oba slučaja, grafički su prikazani optimizovani rasporedi poslova na paralelnim mašinama, kao i konvergencija rešenja u zavisnosti od broja iteracija potrebnih za postizanje optimalne vrednosti posmatrane funkcije cilja.



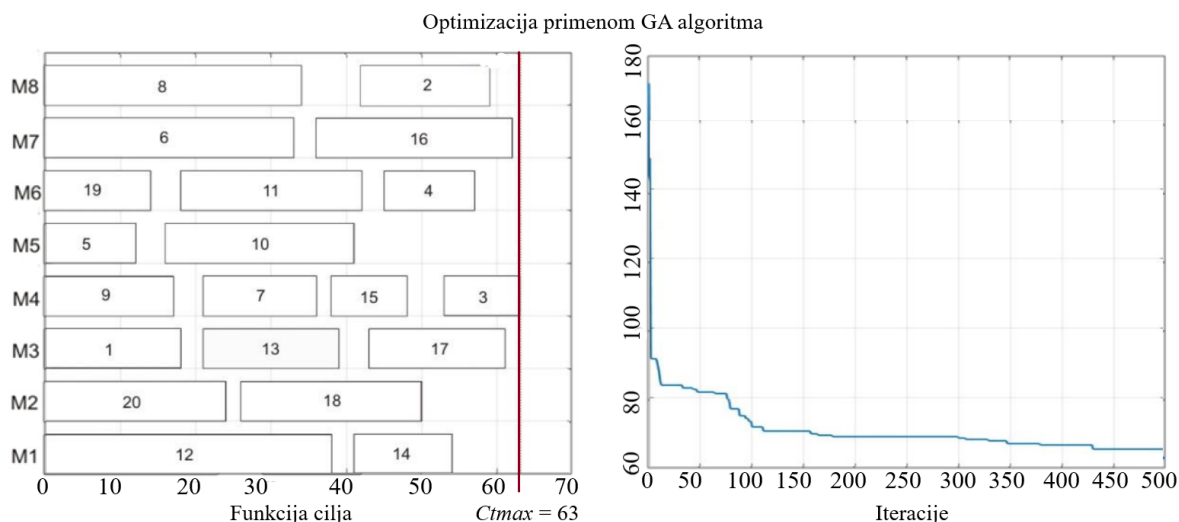
Slika 5.16 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom SA: problem $n = 10$ i $m = 8$



Slika 5.17 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom GA: problem $n = 10$ i $m = 8$



5.18 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom SA: problem $n = 20$ i $m = 8$

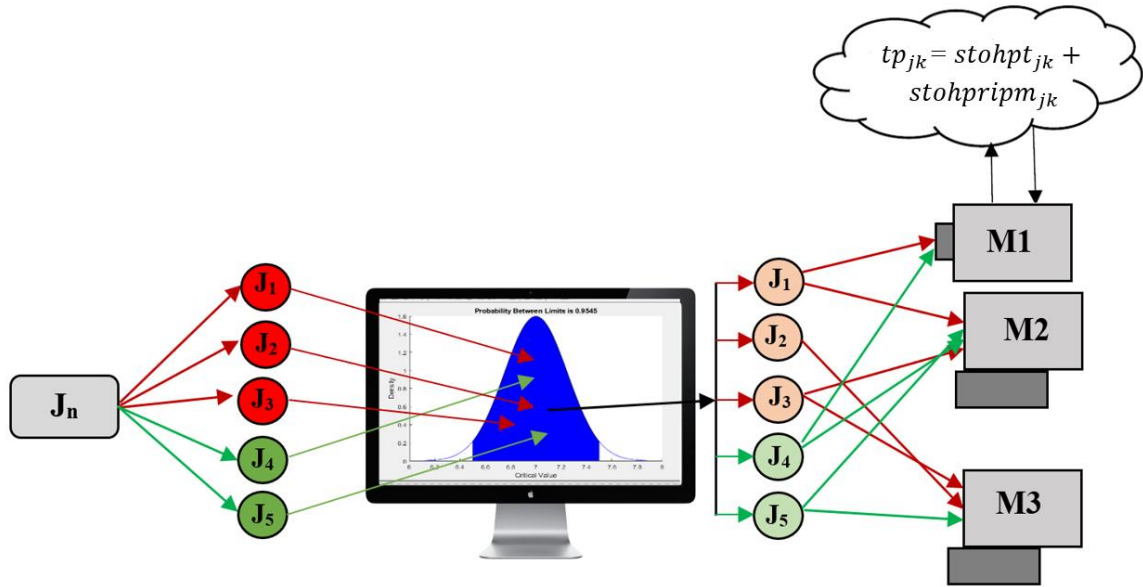


Slika 5.19 Grafički prikaz rasporeda poslova primenom GA: problem $n = 20$ i $m = 8$

Nakon grafičkog prikaza rezultata optimizacije za prvi skup podataka, sprovedeno je dodatno poređenje algoritama na većem skupu podataka kako bi se detaljnije uporedile performanse SA i GA algoritama. Ulazni podaci za skup podataka od dvadeset poslova i osam paralelnih mašina detaljno je predstavljen u autorskom radu (Stanković i sar., 2021). Nakon dodatnog poređenja SA i GA na većem skupu podataka može se zaključiti da i jedan i drugi algoritam efikasno rešavaju problem planiranja i raspoređivanja resursa u paralelnog vezi mašina, pri čemu GA algoritam ostvaruje prednost sa nešto nižim vrednostima funkcije cilja Ct_{max} . Konkretno, vrednosti funkcije cilja za GA iznose: $Ct_{max} = 63$ i $Ct_{max} = 37$ dok za SA iznose: $Ct_{max} = 64$ i $Ct_{max} = 38$, što potvrđuje da oba pristupa pružaju uporedive rezultate, dok izbor metode zavisi od specifičnih zahteva problema i podešavanja ulaznih parametara.

5.5.2 Matematička formulacija stohastičkog modela raspoređivanja poslova na mašinama u paralelnoj vezi $PI_m | stohpt_{jk}, stohpripm_{jk} | stohCt_{max}$

Stohastički model u paralelnoj vezi mašina sa stohastičkim vremenima obrade poslova i stohastičkim vremenima pripreme alata na mašinama može se primenom definisane notacije $\alpha | \beta | \gamma$ označiti kao $PI_m | stohpt_{jk}, stohpripm_{jk} | stohCt_{max}$. U ovom modelu vremena obrade i vremena podešavanja alata mogu se posmatrati objedinjeno $tp_{jk} = stohpt_{jk} + stohpripm_{jk}$, tako da ukupno vreme obrade posla na mašini, uključujući i vreme podešavanja alata, ima normalni zakon raspodele u obliku $tp_{jk} \sim N(\mu p_{jk}, \sigma p_{jk}^2)$. Grafički prikaz rasporeda poslova u paralelnoj vezi mašina sa stohastičkim vremenima obrade prikazan je na slici 5.20 (Stanković i sar., 2025).



Slika 5.20 Grafički prikaz rasporeda poslova u paralelnoj vezi mašina sa stohastičkim vremenom obrade

Formulacija modela u paralelnoj vezi mašina sa stohastičkim vremenom obrade predstavljena je u nastavku uvođenjem sledećih promenjiva (Ranjbar, 2012), (Stanković i sar., 2025):

M – mašina na kojoj se vrši raspoređivanje poslova,

J – skup poslova,

$stohpt_{jk}$ - stohastičko vreme obrade posla j na mašini k ,

$stohprimp_{jk}$ – stohastičko vreme pripreme mašine k pre izvršenja posla j ,

tp_{jk} – ukupno stohastičko vreme posla j na jednoj mašini k ,

$stohCt_{max}$ – ukupno stohastičko vreme završetka svih poslova.

Promenljiva odlučivanja u ovom slučaju može se definisati na sledeći način:

$$z_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{ako je posao } j \text{ dodeljen mašini } k \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

Funkcija cilja ima sledeći oblik:

$$\min stohCt_{max} = \max \prod F_{ms} \left(\frac{stohCt_{max}^1 - \mu p_{ms}}{\sqrt{\sigma p_{ms}^2}} \right) \quad (5.26)$$

pri čemu važe sledeća ograničenja (Stanković i sar., 2025):

$$\sum_{k \in M} z_{jk} = 1, \quad \forall j \in J \quad (5.27)$$

$$\mu p_{ms} = \sum_{n \in J} \mu p_{jk} \cdot z_{jk}, \quad \forall k \in M \quad (5.28)$$

$$\sigma p_{ms}^2 = \sum_{n \in J} \sigma p_{jk}^2 \cdot z_{jk}, \quad \forall k \in M \quad (5.29)$$

$$P\left(\sum_{n \in J} \mu p_{jk} \cdot z_{jk} \leq stohCt_{max}\right) \geq \alpha \quad (5.30)$$

$$z_{jk} \in \{0,1\}, \quad \forall j \in J, \forall k \in M \quad (5.31)$$

Jednačina (5.26) predstavlja kriterijum minimizacije ukupnog vremena i optimalan raspored poslova na mašinama. Ograničenje (5.27) definiše uslov da svaki posao mora biti dodeljen tačno jednoj mašini u tom trenutku. Ograničenja (5.28) i (5.29) određuju očekivano ukupno vreme obrade μp_{ms} i varijansu ukupnog vremena obrade σp_{ms}^2 za svaku mašinu $k \in M$. Ograničenje (5.30) predstavlja verovatnoću da vreme obrade poslova neće trajati duže od ukupnog vremena ciljne funkcije $stohCt_{max}$ sa verovatnoćom α . Ograničenje (5.31) predstavlja promenljivu koja može imati vrednost 0 ili 1 u zavisnosti od ostvarenih uslova promenljive z_{jk} .

5.5.2.1 Primer optimizacije stohastičkog modela raspoređivanja sa vremenima obrade poslova i vremenima podešavanja mašina primenom SA i GA algoritma

Optimizacija modela raspoređivanja poslova na mašinama koje su u paralelnoj vezi sa stohastičkim vremenima obrade poslova tp_{jk} primenom GA i SA algoritma predstavlja deo istraživanja čiji je cilj utvrđivanje uticaja ulaznih parametara optimizacionih algoritama na konačnu vrednost razmatrane funkciju cilja $stohCt_{max}$. U tabeli 5.15 prikazana su vremena obrade poslova na mašinama koja imaju normalni zakon raspodele.

Tabela 5.15. Vremena obrade poslova na mašinama prema zakonu normalne raspodele

Poslovi	Mašine				
J_n	M_1	M_2	...	M_5	M_6
J_1	$N(48, 2.5)$	$N(27, 1.8)$	...	$N(35, 2.2)$	$N(25, 2.0)$
J_2	$N(23, 3.0)$	$N(52, 2.5)$	...	$N(45, 2.0)$	$N(35, 1.9)$
J_3	$N(35, 1.8)$	$N(39, 2.0)$	...	$N(23, 1.4)$	$N(55, 2.1)$
J_4	$N(45, 2.2)$	$N(38, 2.4)$	...	$N(25, 2.0)$	$N(55, 2.3)$
J_5	$N(58, 2.0)$	$N(24, 1.7)$	...	$N(15, 1.8)$	$N(75, 2.5)$

J_6	$N(37, 2.8)$	$N(48, 3.1)$	...	$N(23, 1.9)$	$N(69, 2.4)$
J_7	$N(17, 3.5)$	$N(48, 2.7)$	...	$N(56, 2.2)$	$N(98, 3.1)$
J_8	$N(17, 1.5)$	$N(29, 1.2)$	...	$N(25, 1.6)$	$N(34, 2.0)$
J_9	$N(23, 2.4)$	$N(38, 2.1)$	...	$N(17, 1.7)$	$N(67, 2.6)$
J_{10}	$N(48, 2.5)$	$N(27, 1.8)$	...	$N(35, 2.2)$	$N(25, 2.0)$
J_{11}	$N(23, 3.0)$	$N(52, 2.5)$	...	$N(45, 2.0)$	$N(35, 1.9)$
J_{12}	$N(35, 1.8)$	$N(39, 2.0)$	...	$N(23, 1.4)$	$N(55, 2.1)$
J_{13}	$N(45, 2.2)$	$N(38, 2.4)$	...	$N(25, 2.0)$	$N(55, 2.3)$
J_{14}	$N(58, 2.0)$	$N(24, 1.7)$	...	$N(15, 1.8)$	$N(75, 2.5)$
J_{15}	$N(37, 2.8)$	$N(48, 3.1)$	...	$N(23, 1.9)$	$N(69, 2.4)$
J_{16}	$N(17, 3.5)$	$N(48, 2.7)$	...	$N(56, 2.2)$	$N(98, 3.1)$
J_{17}	$N(17, 1.5)$	$N(29, 1.2)$	...	$N(25, 1.6)$	$N(34, 2.0)$
J_{18}	$N(23, 2.3)$	$N(38, 2.1)$	...	$N(17, 1.7)$	$N(67, 2.6)$

U narednoj tabeli 5.16 prikazane su vrednosti vremena obrade poslova na mašinama generisane prema izrazu 4.13, odnosno procedure detaljno opisane u poglavlju 4.2.1, na osnovu normalno raspodeljenih veličina prikazanih u tabeli 5.15 i za verovatnoću realizacije 0.95%.

U tabelama 5.17 i 5.18 prikazani su ulazni parametri i konačni rezultati optimizacije primenom GA i SA algoritma respektivno. Rezultati optimizacije omogućavaju ocenu efikasnosti algoritma i kvaliteta konvergencije rešenja.

Tabela 5.16 Stohastička vremena obrade poslova na mašinama tp_{jk}

Poslovi	Mašine					
J_n	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
J_1	52.115	29.963	21.292	17.469	38.621	28.292
J_2	27.938	56.115	55.267	63.609	48.292	38.127
J_3	37.963	42.292	27.634	11.975	25.304	58.457
J_4	48.621	41.950	39.457	53.115	28.292	58.786
J_5	61.292	26.798	43.786	58.773	17.963	79.115
J_6	41.609	53.103	26.292	16.469	26.127	72.950
J_7	22.761	52.444	47.938	34.115	59.621	103.103
J_8	19.469	30.975	48.292	25.963	27.634	37.292
J_9	26.786	41.457	52.609	54.938	19.798	71.280
J_{10}	52.115	29.963	21.292	17.469	38.621	28.292
J_{11}	27.938	56.115	55.267	63.609	48.292	38.127
J_{12}	37.963	42.292	27.634	11.975	25.304	58.457
J_{13}	48.621	41.950	39.457	53.115	28.292	58.786
J_{14}	61.292	26.798	43.786	58.773	17.963	79.115
J_{15}	41.609	53.103	26.292	16.469	26.127	72.950

J_{16}	22.761	52.444	47.938	34.115	59.621	103.103
J_{17}	19.469	30.975	48.292	25.963	27.634	37.292
J_{18}	26.786	41.457	52.609	54.938	19.798	71.280

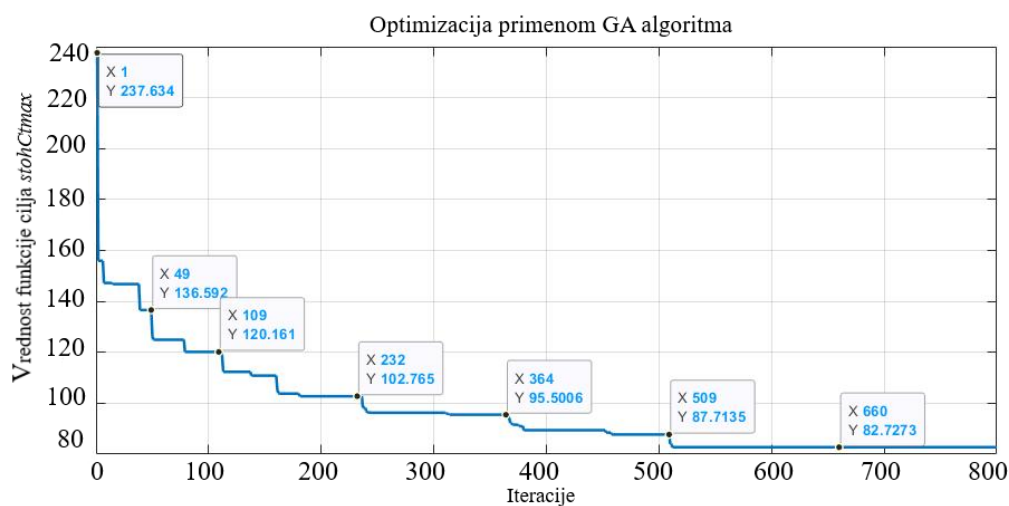
Tabela 5.17 Ulazni parametri optimizacije primenom GA algoritma

Ulazni parametri GA algoritma						
GA	n	$Iter$	Pop	M_u	X_{over}	$stohCt_{max}$
	1	100	50	0.01	0.10	94.954
	2	100	525	0.06	0.30	86.612
	3	100	1000	0.01	0.70	84.672
	4	350	287	0.06	0.70	80.442
	5	550	525	0.10	0.30	83.810
	6	800	1000	0.01	0.50	82.727
	7	700	50	0.10	0.30	94.524
	8	2550	762	0.06	0.70	82.727
	9	500	1000	0.01	0.90	85.534
	10	2550	1000	0.03	0.90	82.727

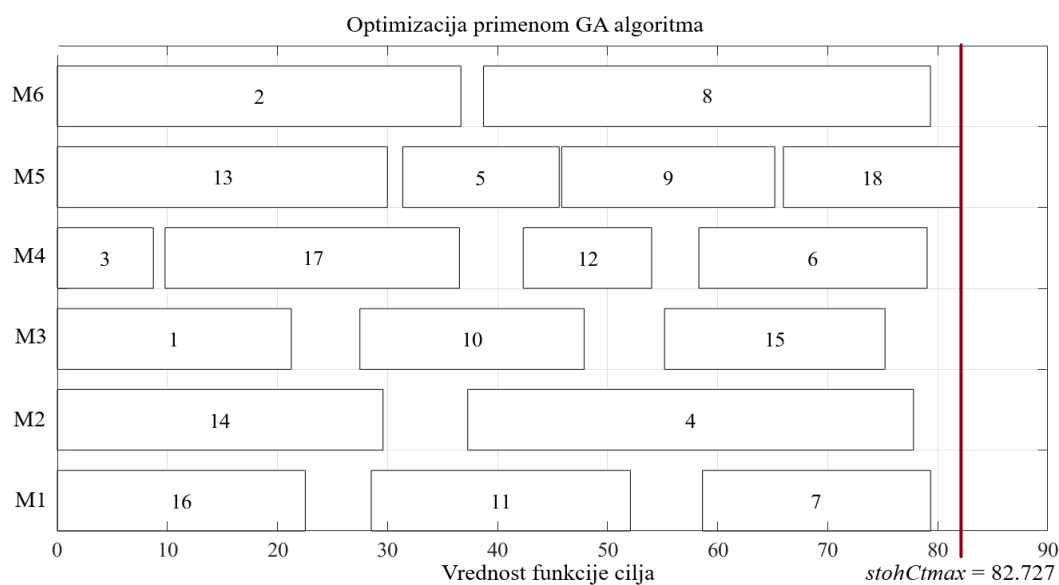
Tabela 5.18 Ulazni parametri optimizacije primenom SA algoritma

Ulazni parametri SA algoritma						
SA	n	$Iter$	$MaxIter$	T_0	$alpha$	$stohCt_{max}$
	1	100	20	5	0.5	93.638
	2	200	20	5	0.5	88.028
	3	200	25	10	0.65	90.913
	4	500	25	12	0.75	87.724
	5	500	25	15	0.85	82.727
	6	600	30	18	0.95	86.614
	7	650	33	23	0.99	85.448
	8	700	36	26	1	127.760
	9	600	32	24	0.99	84.672
	10	800	35	25	0.99	92.403

Na osnovu rezultata optimizacije može se zaključiti da GA pokazuje veću tačnost rešenja u pojedinim slučajevima u poređenju sa SA algoritmom. Takođe, važno je istaći da ulazni parametri metahurističkih algoritama predstavljaju bitne faktore u optimizaciji problema planiranja i raspoređivanja poslova i u slučaju pogrešno izabranih vrednosti mogu značajno da utiču na vrednost funkcije cilja $stohCt_{max}$.



Slika 5.21 Vrednost funkcije cilja u odnosu na broj iteracija

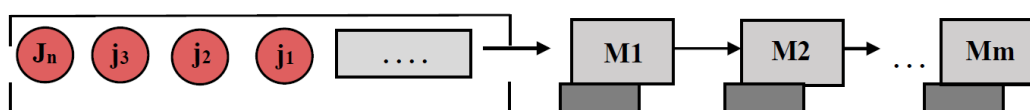


Slika 5.22 Grafički prikaz optimalnog rasporeda primenom GA algoritma

5.6 MODEL PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA POSLOVA – *FLOW SHOP*

PROBLEM - FS_m

Model planiranja i raspoređivanja poslova na mašinama sa unapred definisanom rutom FS_m predstavlja problem u kojem skup od n poslova mora biti obrađen na m mašina, prateći unapred definisan sekventni redosled poslova. Grafički prikaz modela predstavljen je na slici 5.23.

Slika 5.23 Grafički prikaz obrade poslova po modelu FS_m

Raspored obrade poslova na mašinama, funkcioniše po principu FIFO strategije, odnosno svaki posao mora proći kroz sve mašine istim redosledom. Ciljevi modela mogu biti minimizacija ukupnog vremena obrade poslova, smanjenje vremena neaktivnosti mašina i optimizacija drugih performansi kao što su ukupno vreme protoka ili kašnjenja poslova na izvršenje.

Takođe, karakteristika *Flow Shop* modela planiranja i raspoređivanja poslova jeste da posao koji započne obradu na mašini, ne može biti prekinut sve dok se ta obrada ne završi. Vremena obrade svakog posla na svakoj mašini su poznata unapred i ne menjaju se.

5.6.1 Matematička formulacija stohastičkog *Flow Shop* modela raspoređivanja poslova $FS_m \mid dd_j \mid wc_j \mid stohCt_{max}, TM_{max}$

Stohastički model FS_m planiranja i raspoređivanja poslova može se predstaviti kao $FS_m \mid dd_j \mid wc_j \mid Ct_{max}, TM_{max}$. Ovaj model se bavi stohastičkim problemom raspoređivanja poslova, gde je cilj minimizacija ukupnog vremena obrade poslova i minimizacija ukupnog vremena kašnjenja poslova na izvršenje. Za definisanje matematičke formulacije stohastičkog modela planiranja i raspoređivanja poslova korišćena je sledeća notacija:

- M – skup mašina na kojima se vrši raspoređivanje poslova,
- m – broj mašina,
- J - skup poslova, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$,
- n - broj poslova,
- wc_j – težinski koeficijent koji označava prioritet posla,
- $stohpt_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, stohastičko vreme obrade posla j ,
- $stohdd_j \sim N(\mu_{kj}, \sigma_{kj}^2)$, stohastičko vremensko ograničenje obrade posla j ,
- $stohCt_{max}$ – ukupno vreme obrade poslednjeg posla na bilo kojoj mašini.
- $stohTM_{max}$ – ukupno kašnjenje poslova na izvršenje.

Promenljiva odlučivanja u ovom slučaju može se definisati na sledeći način:

$$y_j \begin{cases} 1, & \text{ako je posao } j \text{ završen tačno na vreme,} \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

Funkcija cilja ima sledeći oblik:

$$\min stohCt_{max} = \sum_{j=1}^n wc_j \min(Ct_j - stohdd_j) \quad (5.32)$$

$$\max stohTM_{max} = \sum_{j=1}^n y_j \quad (5.33)$$

pri čemu važe sledeća ograničenja:

$$\sum_{j=1}^i \mu_j y_j \leq \mu_{kj} \quad (5.34)$$

$$P\left(\sum_{j=1}^n \mu_j y_j \leq \rho_{kj}^2\right) \geq \alpha \quad (5.35)$$

$$y_j \in \{0,1\}, \forall j \in J \quad (5.36)$$

Jednačina (5.32) predstavlja kriterijum optimalnosti ukupnog stohastičkog vremena, odnosno optimalanosti rasporeda poslova na mašinama, pri čemu važe uslovi prioriteta posla wc_j . Jednačina (5.33) definiše kriterijum kašnjenja poslova u odnosu na pravovremeno izvršenje. Ograničenja (5.34) i (5.35) definišu uslov da se svi poslovi, čija su vremena obrade $stohpt_j$ moraju završiti do definisanog vremenskog roka $stohdd_j$ sa zadatom verovatnoćom α . Ograničenje (5.36) definiše tip promenljive.

5.6.1.1 Primer optimizacije stohastičkog FS_m modela planiranja i raspoređivanja poslova primenom ACO algoritma

Optimizacija stohastičkog *Flow Shop* modela planiranja i raspoređivanja poslova na mašinama sa unapred definisanom sekventnom rutom primenom ACO algoritma sastoji se od $n = 20$ poslova sa stohastičkim vremenima obrade poslova $stohpt_j$ i stohastičkim vremenskim rokom obrade poslova $stohdd_j$, definisanim u oba slučaja premenom normalnog zakona raspodele. Ulazni parametri posmatranog problema predstavljeni su u tabeli 5.19.

Tabela 5.19 Stohastička vremena obrade i stohastički vremenski rok obrade poslova

J_n	J_1	J_2	J_3	...	J_9	J_{10}
$stohpt_j$	$N(6.38, 2.5)$	$N(7.12, 1.9)$	$N(13.50, 2.2)$	...	$N(4.16, 2.0)$	$N(7.79, 2.1)$
$stohdd_j$	$N(3.66, 1.2)$	$N(6.86, 1.66)$	$N(12.83, 3.6)$	...	$N(7.21, 1.7)$	$N(9.45, 3.6)$
wc_j	30	18	15	...	9	12
J_n	J_{11}	J_{12}	J_{13}	...	J_{19}	J_{20}
$stohpt_j$	$N(11.59, 2.5)$	$N(7.11, 2.0)$	$N(10.18, 2.70)$	...	$N(14.31, 3.0)$	$N(16.81, 3.2)$
$stohdd_j$	$N(9.92, 2.15)$	$N(12, 3.8)$	$N(10.83, 3.25)$	...	$N(10.58, 2.35)$	$N(8.18, 1.56)$
wc_j	16	25	7	...	14	45

Za optimizaciju stohastičkog modela planiranja i raspoređivanja poslova na mašinama sa unapred definisanom rutom primenom ACO algoritma, korišćeni su sledeći ulazni parametri: broj iteracija $Iter = 500$, značaj feromona $\alpha = 1.5$, parametar $\beta = 3$ koji obezbeđuje odgovarajuću ravnotežu između istraživanja prostora rešenja i izbora najkraćih putanja, koeficijent isparavanja feromonskog traga $\rho = 0.5$, $Ant\ Num = 40$ (broj mrava) i parametar $Q = 100$ koji definiše količinu ostavljenog feromona.

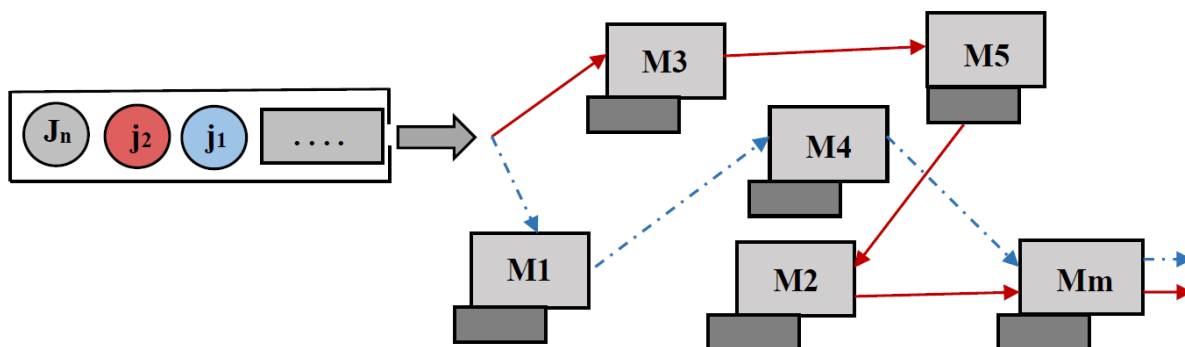
Nakon primene ACO algoritma dobija se vrednost funkcije cilja $stohCt_{max} = 158.540$, dok je ukupan broj zakasnelih poslova na pravovremeno izvršenje $TM_{max} = 4$. Zakasnelost poslova se javlja u slučajevima kada poslovi ne budu izvršeni do unapred zadatog vremenskog roka. Optimalan sekventni raspored poslova prikazan je u tabeli 5.20.

Tabela 5.20 Optimalan sekventni raspored poslova primenom ACO metode

Rezultati optimizacije primenom ACO metode										
J_n	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
	2	4	10	6	11	19	20	9	12	3
J_n	J_{11}	J_{12}	J_{13}	J_{14}	J_{15}	J_{16}	J_{17}	J_{18}	J_{19}	J_{20}
	5	8	1	18	17	13	15	14	7	16

5.7 MODEL PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA POSLOVA – *JOB SHOP PROBLEM - JSP_m*

Model planiranja i raspoređivanja poslova sa unapred poznatim sekvenčnim rasporedom - JSP_m predstavlja problem raspoređivanja n poslova $J_1, J_2, \dots, J_n$ sa različitim vremenima obrade p_{ijk} na m mašina. Svaki posao koji se obrađuje na mašinama sastoji se od skupa operacija $O_{1j}, O_{2j}, \dots, O_{ij}$ koje je potrebno obraditi na mašinama na osnovu unapred definisanog sekvenčnog rasporeda poslova. Grafički prikaz modela planiranja i raspoređivanja poslova JSP_m predstavljen je na slici 5.24.



Slika 5.24 Grafički prikaz JSP_m modela planiranja i raspoređivanja poslova

Model planiranja i raspoređivanja poslova JSP_m potrebno je da zadovolji sledeće pretpostavke (Bruker i sar., 1994):

- mašina obrađuje poslove jedan po jedan,
- jedna mašina može obrađivati samo jedan posao u tom trenutku,
- posao koji je započet na mašini mora se završiti,
- sekventni raspored poslova je unapred poznat,
- vreme obavljanja operacija je poznato za svaku mašinu posebno.

5.7.1 Matematička formulacija stohastičkog *Job Shop Problem* modela raspoređivanja poslova $JSP_m | stohpt_{ijk} | stohCt_{max}$

Stohastički model JSP_m planiranja i raspoređivanja poslova, može se definisati na sledeći način $JSP_m | stohpt_{ijk} | stohCt_{max}$. Za definisanje matematičke formulacije modela planiranja i raspoređivanja poslova JSP_m korišćena je sledeća notacija:

M - skup mašina na kojoj se vrši raspoređivanje poslova, gde je m ukupan broj mašina,

J - skup poslova, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$, gde n predstavlja ukupan broj poslova,

j - indeks koji označava posao,

k - indeks koji označava mašinu,

i - indeks koji označava operaciju nekog posla,

$stohp_{ijk} \sim N(\mu_{ijk}, \sigma_{ijk}^2)$ stohastičko vreme obrade operacije i posla j na mašini k ,

sd_{ijk} - početno vreme obrade operacije i posla j na mašini k ,

K - dovoljno veliki pozitivan broj,

$stohCt_{max}$ - ukupno stohastičko vreme obrade poslova.

Promenljive odlučivanja u ovom slučaju mogu se definisati na sledeći način:

$$x_{ijk} \begin{cases} 1, & \text{ako se operacija } i \text{ posla } j \text{ obrađuje na mašini } k \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

$$x_{ijki'j'}$$

$$\begin{cases} 1, & \text{ako operacija } i \text{ posla } j \text{ na mašini } k \text{ završi pre operacije } i' \text{ posla } j' \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

Kriterijum optimalnosti (Pinedo, 2009), (Rakićević, 2018):

$$\min stohCt_{max} \tag{5.37}$$

pri čemu važe sledeća ograničenja:

$$sd_{ijk} + stohpt_{ijk} \leq sd_{(i+1)jk}, \quad \forall j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, O_j - 1 \quad (5.38)$$

$$sd_{ijk} + stohpt_{ijk} \leq stohCt_{max}, \quad \forall j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, O_j \quad (5.39)$$

$$K \cdot (1 - x_{ijk i' j'}) + sd_{ijk} \geq sd_{ijk} + stohpt_{ijk}, \quad \forall j, j', i, i', k; j \neq j' \quad (5.40)$$

$$K \cdot x_{ijk i' j'} + sd_{ijk} \geq sd_{i' j' k} + stohpt_{i' j' k}, \quad \forall j, j', i, i', k; j \neq j' \quad (5.41)$$

$$sd_{ijk} \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, O_j \quad (5.42)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad (5.43)$$

Jednačina (5.37) predstavlja kriterijum minimizacije ukupnog stohastičkog vremena, odnosno optimalan raspored poslova na mašinama. Ograničenje (5.38) osigurava sekvencijalni redosled poslova (operacija), pri čemu svaka naredna operacija može da započne obradu tek nakon završetka prethodne. Ograničenje (5.39) definiše uslov da vreme bilo koje operacije ne može biti veće od funkcije cilja $stohCt_{max}$. Ograničenja (5.40) i (5.41) definišu redosled obavljanja operacija na mašinama pri čemu obrade poslova (operacija) na mašinama moraju biti u skladu sa unapred definisanim promenljivama. Ograničenje (5.42) osigurava pozitivne vrednosti vremena početka obrade operacija, dok (5.43) definiše binarnu promenljivu.

5.7.1.1 Primer optimizacije stohastičkog JSP_m modela planiranja i raspoređivanja poslova primenom SA algoritma i modela mašinskog učenja

Optimizacija stohastičkog JSP_m modela planiranja i raspoređivanja poslova primenom SA algoritma i modela mašinskog učenja sastoji se od tri faze. Prva faza posmatranog problema sastoji se od prikupljanja podataka na osnovu optimizacije SA algoritma. Optimizacija se sprovodi na konkretnom primeru razvijenog stohastičkog modela kako bi se napravila adekvatna baza podataka koja će kasnije u narednim fazama biti korišćena kao ulazni parametar kod modela mašinskog učenja. Druga faza predstavlja primenu modela mašinskog učenja u cilju izbora optimalnih parametara optimizacije kao i predikovanje optimalne funkcije cilja za posmatrani proizvodni proces. Konačno, treća faza koristi preporučene ulazne optimizacione parametre i optimizuje proizvodni proces. U nastavku, detaljno su predstavljene faze opisanog hibridnog modela.

Prva faza (Formiranje baze podataka): Polazna tačka istraživanja polazi od pretpostavke da ulazni parametri metaheurističkih algoritama imaju značajan uticaj na funkciju cilja. Shodno tome, u ovoj fazi modela korišćeni su rezultati optimizacije SA algoritma, pri čemu su ključni ulazni parametri: broj iteracija $Iter$, maksimalni broj iteracija $MaxIter$, temperatura T_0 , faktor promene temperature $alpha$ i izlazni parametar optimizacije funkcija cilja $stohCt_{max}$. Eksperiment obuhvata 625 različitih kombinacija parametara za problem planiranja i raspoređivanja poslova, čime se obezbeđuje sveobuhvatna analiza njihovog uticaja na posmatranu funkciju cilja. U tabeli 5.21 predstavljeni su ulazni parametri i dobijeni rezultati optimizacije u prvoj fazi primenom SA algoritma (Stanković i sar., 2025).

Tabela 5.21 Dobijeni rezultati optimizacije u prvoj fazi primenom SA algoritma

Broj eksperimenata	Ulazni optimizacioni parametri SA algoritma				Funkcija cilja
n	$Iter$	$MaxIter$	T_0	$alpha$	$stohCt_{max}$
1	100.00	3	9	0.4	89.608
2	100.00	4	13	0.5	95.399
...	...	...	...	...	...
250	200.00	10	30	0.1	78.168
251	200.00	20	30	0.1	83.462
...	...	...	...	...	...
350	500.00	105	50	0.3	75.407
365	750.00	25	80	0.1	79.819
...	...	...	...	...	...
450	1325.00	5	7	0.1	95.135
451	1325.00	5	8	0.1	91.304
452	1325.00	5	9	0.1	88.822
...	...	...	...	...	...
500	2000.00	80	50	2	125.719
550	2550.00	30	80	1.7	147.776
...	...	...	...	...	...
625	5000.00	90	50	0.3	75.407

Formiranje baze podataka primenom SA algoritma predstavlja prvu fazu optimizacije, koja je od suštinskog značaja za kasnije analize i donošenje odluka. Pouzdanost i tačnost ovih podataka direktno utiču na efikasnost i kvalitet optimizacionih modela u kasnijim fazama istraživanja.

Druga faza (Primena modela mašinskog učenja): U drugoj fazi istraživanja primenjuju se modeli mašinskog učenja sa ciljem predikovanja optimizovane funkcije cilja $stohCt_{max}$ na osnovu ulaznih parametara SA algoritma. Ova faza koristi bazu podataka generisanu u prvoj fazi (tabela 5.19), omogućavajući analizu odnosa između ulaznih parametara

i izlazne funkcije cilja. Glavni cilj primene modela mašinskog učenja je, ne samo da se postigne tačna predikcija funkcije cilja, već i da se identifikuju ključni ulazni parametri koji imaju najveći uticaj na izlaznu funkciju. Ova analiza omogućava dublje razumevanje procesa optimizacije i pomaže u identifikaciji najznačajnijih faktora koji utiču na performanse algoritma. U okviru ovog istraživanja korišćen je model stabla odluke i Bajesova optimizacija (*eng. Bayesian optimization*), što omogućava međusobno poređenje prediktivne sposobnosti ovih metoda. Modeli koriste iste ulazne parametre posmatranog eksperimenta, čime se omogućava direktno poređenje njihovih performansi. Nakon primene modela mašinskog učenja, dobijeni rezultati su predstavljeni u tabeli 5.22, gde se analizira preciznost predikcije i značajnost pojedinačnih parametara u modeliranju funkcije cilja.

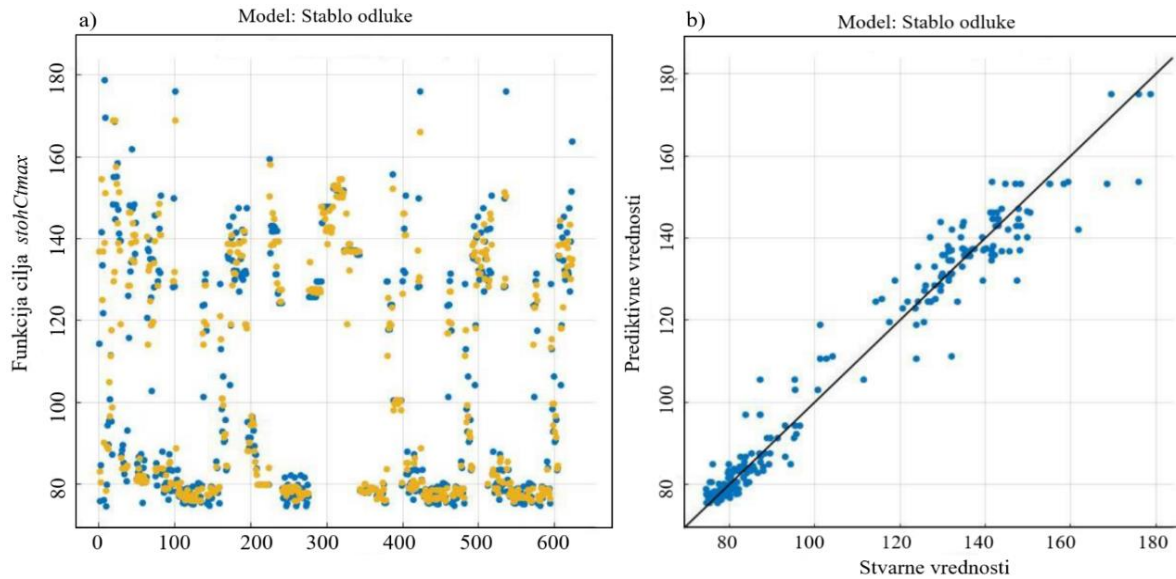
Tabela 5.22 Performanse modela mašinskog učenja za SA algoritam

Modeli mašinskog učenja	<i>RMSE</i>	R^2	<i>MSE</i>	<i>MAE</i>	Vreme treninga (obs/sec)	Brzina predikovanja (sec)
Stablo odluke	Trening rezultati					
	7.1108	0.94	50.563	3.9479	~7100 obs/sec	4.2942 sec
	Rezultati nakon testa					
	4.5568	0.97	20.765	2.8323	~7100 obs/sec	4.2942 sec
Bajesova optimizacija	Training rezultati					
	6.6428	0.95	44.127	3.921	~28000 obs/sec	60.238 sec
	Rezultati nakon testa					
	5.1799	0.97	26.832	3.1333	~28000 obs/sec	60.238 sec

Analiza rezultata na osnovu posmatranih metrika pokazala je da primenjeni modeli daju dobre rezultate. Međutim, u nastavku istraživanja zbog nešto boljih karakteristika koristiće se model stabla odlučivanja, koji je odabran za dalju primenu u optimizaciji. Stablo odluke je metoda nadgledanog učenja koja koristi grafičku strukturu nalik stablu za donošenje odluka ili predviđanje vrednosti na osnovu ulaznih podataka. Prednosti stabala odlučivanja su jednostavna interpretacija, transparentnost, primena na različite vrste podataka (numeričke i kategoričke) i mogućnost vizuelne reprezentacije (Stanković i sar., 2025).

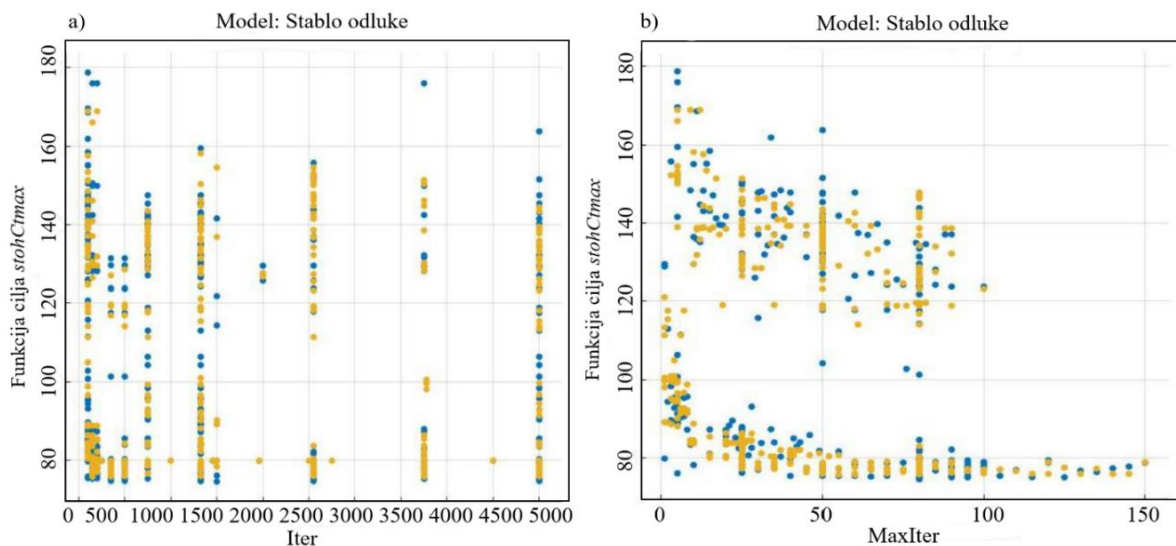
Na osnovu rezultata dobijenih u drugoj fazi istraživanja, model stabla odluke se nameće kao optimalno sredstvo za dalju primenu. Rezultati ukazuju na visoku preciznost modela u predviđanju metrika performansi kao što su *RMSE*: 4.5568, R^2 : 0.97, *MSE*: 20.765, *MAE*: 2.8323. S obzirom da stopa tačnosti i predviđanje funkcije cilja $stohC_{max}$ korišćenjem modela mašinskog učenja dostižu i do 97%, evidentno je da model stabla odluke daje pouzdane rezultate. Grafička analiza dodatno potvrđuje ovu pouzdanost, pri čemu plava boja na grafikonima označava stvarne

vrednosti funkcije cilja $stohC_{max}$, dok žute tačke predstavljaju predviđene vrednosti što se može videti na slici 5.25.

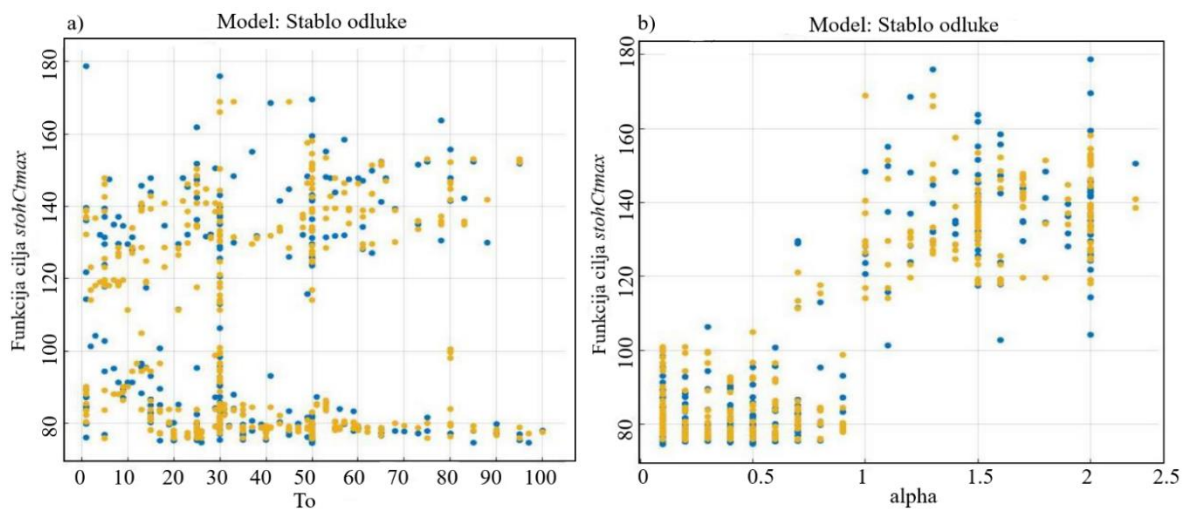


Slika 5.25 Grafički prikaz rezultata korišćenjem modela stabla odluke

U nastavku, prikazan je uticaj ulaznih parametara optimizacije SA algoritma na vrednost funkcije cilja $stohC_{max}$. Grafički rezultati i uticaj ulaznih parametara SA algoritma na posmatranu ciljnu funkciju sa stopom tačnosti od 97%, ilustrovani su na slici 5.26 i 5.27. Predstavljani rezultati pružaju dublji uvid u proces optimizacije i potvrđuju efikasnost primenjenog modela u analizi složenih podataka i predviđanju ciljnih funkcija.



Slika 5.26 a) Uticaj broja iteracija $Iter$ na vrednost funkcije cilja $stohC_{max}$,
b) Uticaj maksimalnog broja unutrašnjih iteracija $MaxIter$ na vrednost funkcije cilja $stohC_{max}$



Slika 5.27 a) Uticaj količine temperature T_0 na vrednost funkcije cilja $stohCt_{max}$,

b) Uticaj faktora promene temperature $alpha$ na vrednost funkcije cilja $stohCt_{max}$

Analiza uticaja ulaznih optimizacionih parametara SA algoritma pokazuje da broj iteracija $Iter$ i maksimalan broj iteracija $MaxIter$ značajno utiču na stabilnost i konvergenciju funkcije cilja, pri čemu veći broj iteracija doprinosi smanjenju varijabilnosti rešenja. Početna temperatura T_0 i stopa hlađenja $alpha$ utiču na pretragu prostora rešenja, gde veće vrednosti T_0 omogućavaju širu pretragu, dok vrednosti $alpha$ određuju brzinu konvergencije algoritma. Pravilno podešavanje ovih parametara ključno je za postizanje optimalne stabilnosti i preciznosti modela, jer neadekvatne vrednosti mogu dovesti do sporije konvergencije ili zaglavljivanja u lokalnim minimumima.

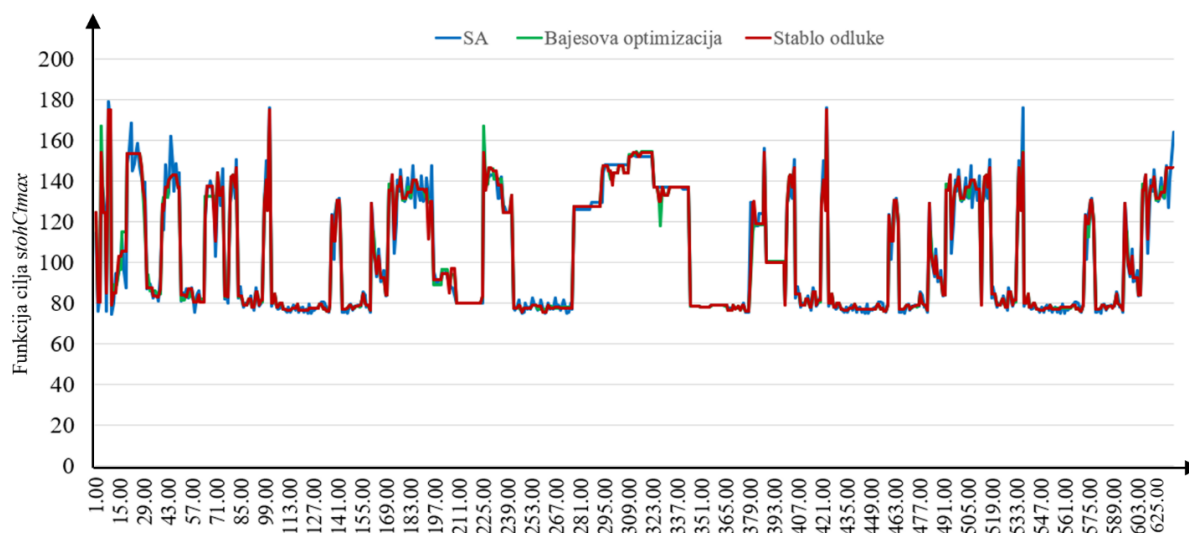
Na osnovu dobijenih rezultata primenom modela mašinskog učenja (stabla odluke) u tabeli 5.23 predstavljeni su preporučeni ulazni paramteri optimizacije SA algoritma za stohastički model planiranja i raspoređivanja poslova JSP_m .

Tabela 5.23 Preporučeni optimalni ulazni parametri optimizacije SA algoritma

Ulazni parametri optimizacije SA algoritma			
$Iter$	$MaxIter$	T_0	$alpha$
500 ~ 700	50 ~ 90	30 ~ 60	0.7~ 0.9

Treća faza (Optimizacija proizvodnog procesa): U trećoj fazi koriste se preporučeni ulazni optimizacioni parametri, identifikovani u prethodnim fazama, kako bi se izvršila optimizacija procesa planiranja i raspoređivanja resursa. Primenom ovih parametara cilj je poboljšati i uravnotežiti efikasnost sistema, smanjiti ukupno vreme obrade i poboljšati performanse ciljne funkcije, čime se postiže optimalno upravljanje proizvodnim resursima.

Korišćenjem preporučenih ulaznih parametara optimizacije i primenom modela mašinskog učenja postignuto je predviđanje funkcije cilja s visokom tačnošću od čak 97%, što ukazuje na izuzetnu preciznost modela u aproksimaciji optimalnih vrednosti funkcije cilja $stohCt_{max}$. Grafički prikaz dobijenih rezultata predstavljen je na slici 5.28.



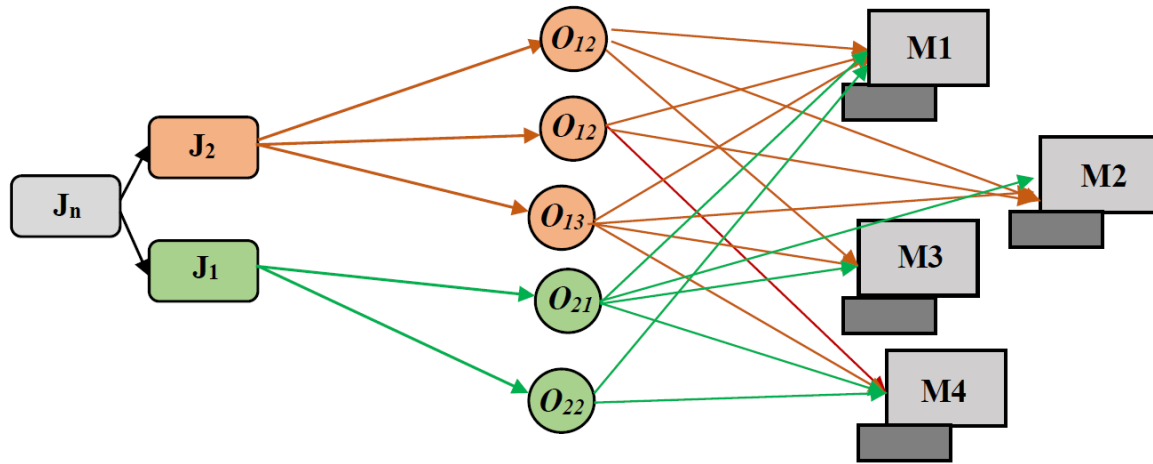
Slika 5.28 Uporedna analiza rezultata SA algoritma i predikovanih vrednosti funkcije cilja $stohCt_{max}$ primenom modela mašinskog učenja (97% tačnost)

Grafik prikazuje uporednu analizu SA algoritma (plava linija) i predikciju dobijenih vrednosti funkcije cilja primenom modela mašinskog učenja: stabla odluke (crvena linija) i Bajesove optimizacije (zelena linija). Na x -osi je prikazan broj eksperimenata, dok y -osa predstavlja vrednosti funkcije cilja ($stohC_{max}$). Rezultati analize pokazuju da modeli mašinskog učenja efikasno prediktivno modeliraju vrednosti funkcije cilja generisane SA algoritmom, pri čemu se stablo odluke ističe kao najprecizniji model sa visokom tačnošću sa realnim ulaznim paramterima optimizacije (Stanković i sar., 2025).

5.8 MODEL FLEKSIBILNOG PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA POSLOVA - $FJSP_c$

Model fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova $FJSP_c$, predstavlja nadogradnju klasičnog problema raspoređivanja poslova JSP_m . U svakom mašinskom centru nalaze se mašine koje mogu izvršiti bilo koju nadolazeću operaciju. Ono što karakteriše model fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova jeste to što sekvencijalni redosled obrade poslova nije unapred definisan, što ovaj model čini značajno složenijim u odnosu na klasične modele. Upravo zbog toga, ovaj model je često primenjivan u realnim proizvodnim uslovima,

gde je neophodna fleksibilnost u raspoređivanju resursa i optimizaciji proizvodnih procesa. Model fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova grafički je predstavljen na slici 5.29.



Slika 5.29 Grafički prikaz modela fleksibilnog raspoređivanja poslova $FJSP_c$

5.8.1 Matematička formulacija determinističkog modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova $FJSP_c \mid pt_{ijk} \mid Ct_{max}$

Deterministički model $FJSP_c$ planiranja i raspoređivanja poslova može se definisati na sledeći način $FJSP_c \mid pt_{ijk} \mid Ct_{max}$. Potrebno je rasporediti n poslova $J_1, J_2, \dots, J_n$, pri čemu svaki posao ima određen redosled operacija $O_{1j}, O_{2j}, \dots, O_{ij}$, koje je potrebno obraditi na skupu mašina $M_1, M_2, \dots, M_m$. Za model koji je potpuno fleksibilan važi da svaka mašina može da obradi samo jednu operaciju u datom trenutku a vremena obrade operacija zavise od raspoloživih mašina. Za definisanje matematičke formulacije modela fleksibilnog raspoređivanja poslova korišćena je sledeća notacija (Marković, 2024):

M - skup mašina na kojoj se vrši raspoređivanje poslova, gde je m ukupan broj mašina,

J - skup poslova, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$, gde n predstavlja ukupan broj poslova,

j - indeks koji označava posao,

k - indeks koji označava mašinu,

i - indeks koji označava operaciju nekog posla,

pt_{ijk} - vreme obrade posla j operacije i na mašini k ,

K - dovoljno veliki broj,

sd_{ijk} - vreme početka posla j operacije i na mašini k ,

Ct_{ijk} - vreme završetka posla j operacije i na mašini k ,

Ct_{max} - ukupno vreme obrade poslova.

Promenljive odlučivanja u ovom slučaju mogu se definisati na sledeći način:

$$x_{ijk} \begin{cases} 1, & \text{ako je mašina } k \text{ izabrana za rad operacije } O_{ij}, \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

$$y_{ijk'j'k} \begin{cases} 1, & \text{ako operacija } O_{ij} \text{ prethodi operaciji } O_{i'j'} \text{ na mašini } k, \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

Kriterijum optimalnosti (Özgüven, 2010), (Marković, 2024):

$$\min Ct_{max} \quad (5.44)$$

pri čemu važe sledeća ograničenja:

$$\sum_{k \in M_j} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in J, \forall j \in O_i, \quad (5.45)$$

$$sd_{ijk} + Ct_{ijk} \leq (x_{ijk}) \cdot K, \quad \forall i \in J, \forall j \in O_i, \forall k \in M_j, \quad (5.46)$$

$$Ct_{ijk} \geq sd_{ijk} + pt_{ijk} - (1 - x_{ijk}) \cdot K, \quad \forall i \in J, \forall j \in O_i, \forall k \in M_j, \quad (5.47)$$

$$sd_{ijk} \geq Ct_{i'j'k} - (y_{iji'j'k}) \cdot K, \quad \forall i < i', \forall j \in O_i, \forall j' \in O_{i'}, \forall k \in M_j \cap M_{j'}, \quad (5.48)$$

$$sd_{i'j'k} \geq Ct_{ijk} - (1 - y_{iji'j'k}) \cdot K, \quad \forall i < i', \forall j \in O_i, \forall j' \in O_{i'}, \forall k \in M_j \cap M_{j'}, \quad (5.49)$$

$$\sum_{k \in M_j} sd_{ijk} \geq \sum_{k \in M_j} Ct_{i,j-1,k} \quad \forall i \in J \quad (5.50)$$

$$Ct_{max} \geq Ct_{ijk} \quad \forall ij \in J, \forall k \in M_j \quad (5.51)$$

Jednačina (5.44) predstavlja kriterijum minimizacije ukupnog vremena, tj. optimalan raspored poslova na mašinama. Ograničenje (5.45) definiše uslov da svaki posao mora biti dodeljen tačno jednoj mašini u tom trenutku. Ograničenje (5.46) definiše vremensko ograničenje obavljanja posla j operacije i na mašini k . Ograničenje (5.47) definiše razliku između početka obavljanja operacija i i završetka. Ovo ograničenje osigurava da operacija može početi tek nakon završetka prethodne operacije uzimajući u obzir vremena obrade. Ograničenja (5.48) i (5.49) osiguravaju nemogućnost istovremenog obavljanja operacija O_{ij} i $O_{i'j'}$ na istom skupu mašina $M_j \cap M_{j'}$. Definisana ograničenja sprečavaju preklapanje poslova na istim mašinama. Ograničenje (5.50) predstavlja ograničenje redosleda i osigurava pravovremeno obavljanje

operacija. Jednačina (5.51) osigurava da ukupno vreme poslednjeg posla bude veće ili jednako od ukupnog vremena svakog posla.

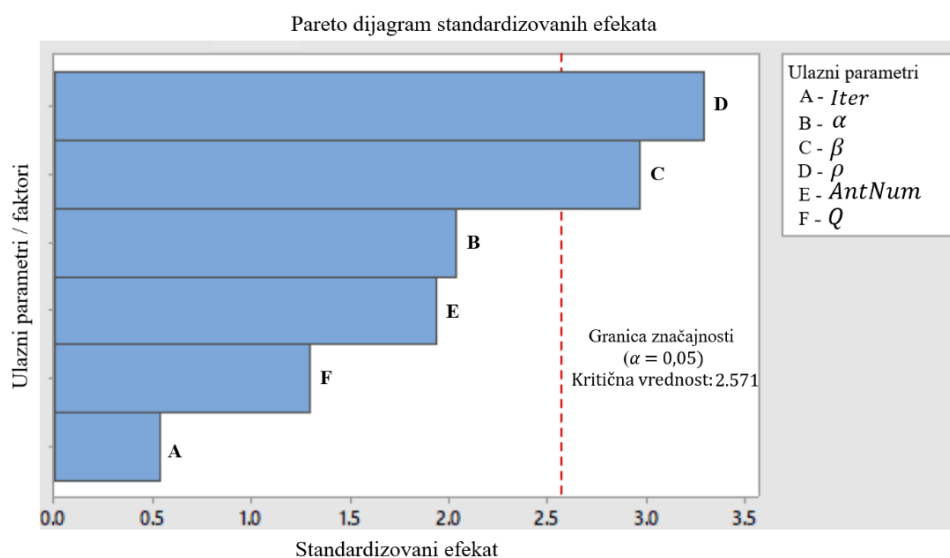
5.8.1.1 Primer optimizacije $FJSP_c$ modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova primenom ACO i GA algoritama

Na osnovu prethodnih iskustava u primeni metaheurističkih algoritama, jasno se može zaključiti da ulazni optimizacioni parametri imaju značajan uticaj na vrednost funkcije cilja. Kako bi se osigurala pouzdanost i stabilnost algoritama u procesu optimizacije modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova, neophodno je sprovesti detaljnu analizu izbora ulaznih parametara optimizacije. U tom cilju, sproveden je eksperiment primenom statističkog alata ANOVA (*eng. Analysis of Variance*), koji omogućava kvantifikaciju uticaja pojedinačnih parametara i identifikaciju njihove optimalne kombinacije. Ispitani su ključni ulazni parametri optimizacije za dva metaheuristička algoritma: ACO i GA. Kod ACO algoritma analizirani su parametri: *Iter* - broj iteracija, α - uticaj feromona, β - informacije o udaljenosti između čvorova, ρ - količina isparavanja feromona na putu, *AntNum* - broj mrava i *Q* - količina feromona koja se dodaje na putanji kada mravi pronađu optimalno rešenje. Sa druge strane, kod GA algoritma analizirani su parametri: *Iter* - broj iteracija, *Pop* - broj populacija, *Mu* - mutacija i *Cross* - ukrštanje.

ACO algoritam: Analiza varijanse sprovedena u svrhu optimizacije ACO algoritma pokazala je da model obuhvata 86.91% ukupne varijanse, što ukazuje na visok stepen uticaja optimizacionih parametara na vrednost funkcije cilja. Među pojedinačnim parametrima, najznačajniji uticaj imaju parametar ρ sa 28.38% i parametar β sa 23.03%, pri čemu su oba parametra statistički značajna sa *P* - vrednostima 0.022 i 0.031, respektivno. Parametar α pokazuje umeren uticaj od 10.88%, ali sa *P* - vrednošću 0.097, što nagoveštava da uticaj ovog parametra nije dominantan. S druge strane, parametar *AntNum* i *Q* doprinose sa 9.83% i 4.41%, ali nisu statistički značajni ($P > 0.05$). Parametar broj iteracija *Iter* pokazuje zanemarljiv uticaj od 0.76%, sa visokom *P* - vrednošću 0.613, što ukazuje na njegovu ograničenu važnost u kontekstu optimizacije algoritma. Greška u modelu iznosi 13.09%, što se nalazi u prihvatljivim granicama, dok je ukupna varijansa analize 100%, potvrđujući dobru preciznost modela u predikciji optimalnih parametara. Ovi rezultati omogućavaju selekciju ključnih optimizacionih parametara, pri čemu je najvažnije pravilno podešavanje parametara ρ i β , dok ostali parametri imaju ograničen uticaj na performanse ACO algoritma u kontekstu rešavanja problema fleksibilnog raspoređivanja poslova. Rezultati analize predstavljeni su u tabeli 5.24 i grafički na slici 5.30.

Tabela 5.24 Analiza varijanse i uticaj ulaznih parametara optimizacije ACO algoritma

Ulaz	Stepeni slobode	Sekvencijalna suma kvadrata	Uticaj parametra na funkciju cilja	Prilagođena suma kvadrata R^2	Prilagođeni srednji kvadrat R^2	F -Vrednost	P - Vrednost
Model	7	6104383	86.91%	6104383	872055	4.74	0.053
<i>Iter</i>	1	53312	0.76%	53312	53312	0.29	0.613
α	1	764459	10.88%	764459	764459	4.16	0.097
β	1	1617222	23.03%	1617222	1617222	8.80	0.031
ρ	1	1993604	28.38%	1993604	1993604	10.84	0.022
<i>AntNum</i>	1	690490	9.83%	690490	11667.3	3.76	0.110
Q	1	309495	4.41%	690490	690490	1.68	0.251
Kriva efekta	1	675800	9.62%	675800	675800	3.68	0.113
Greška	5	919379	13.09%	919379	183876		
Ukupno	12	7023762	100.00%				

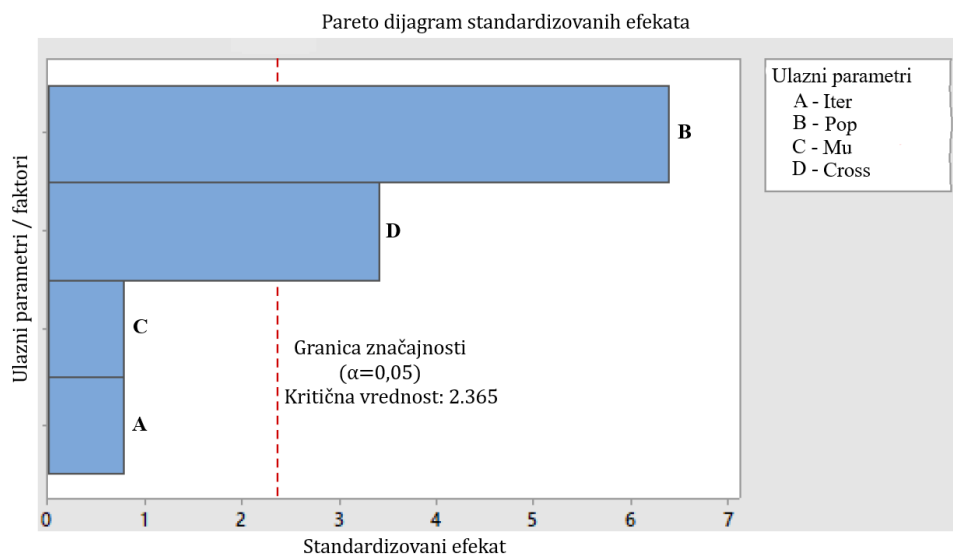
**Slika 5.30** Rangiranje ulaznih parametara ACO algoritma prema uticaju na funkciju cilja Ct_{max}

GA algoritam: Analiza varijanse GA algoritma pokazala je da model obuhvata značajan deo ukupne varijanse, sa F - vrednošću 13.43 i P - vrednošću 0.002, potvrđujući statističku značajnost u optimizaciji funkcije cilja. Među pojedinačnim parametrima, najveći uticaj ima veličina populacije *Pop* sa F - vrednošću 40.94 i P - vrednošću 0.000, dok parametar ukrštanja *Cross* takođe pokazuje značajan efekat sa F - vrednošću 11.58 i P - vrednošću 0.011. Nasuprot tome, broj iteracija *Iter* i mutacija *Mu* imaju znatno manji uticaj sa F - vrednošću

0.60 i P - vrednošću 0.466, što pokazuje njihovu ograničenu važnost. Greška modela je relativno mala 283.25, što ukazuje na stabilnost modela. Ovi rezultati potvrđuju da su veličina populacije i ukrštanje ključni faktori za optimizaciju GA algoritma, dok broj iteracija i mutacija imaju ograničenu važnost. Rezultati analize predstavljeni su u tabeli 5.25 i grafički na slici 5.31.

Tabela 5.25 Analiza varijanse i uticaj ulaznih parametara optimizacije GA algoritma

Ulaz	Stepeni slobode	Prilagođena suma kvadrata R^2	Prilagođeni srednji kvadrat R^2	F -Vrednost	P - Vrednost
Model	4	2173.67	543.42	13.43	0.002
<i>Iter</i>	1	24.08	24.08	0.60	0.466
<i>Pop</i>	1	1656.75	1656.75	40.94	0.000
<i>Mu</i>	1	24.08	24.08	0.60	0.466
<i>Cross</i>	1	468.75	468.75	11.58	0.011
Greška	7	283.25	40.46		
Adaptacija	6	283.25	47.21		
Ukupno	11	7023762			



Slika 5.31 Rangiranje parametra GA algoritma prema uticaju na funkciju cilja Ct_{max}

Na slici 5.31 i 5.32 prikazan je uticaj ulaznih parametara na vrednost funkcije cilja. Na x -osi prikazane su vrednosti standardizovanih efekata, koje predstavljaju apsolutnu meru uticaja pojedinačnih parametara, dok se na y -osi nalaze se oznake faktora, rangiranih po jačini njihovog efekta. Isprekidana crvena linija predstavlja kritičnu granicu statističke značajnosti pri nivou $\alpha = 0.05$, pri čemu se svi efekti koji se nalaze desno od linije smatraju statistički značajnim.

Nakon analize uticaja ulaznih optimizacionih parametara na vrednost funkcije cilja i rangiranja uticaja ulaznih parametara optimizacije za svaki algoritam posebno, sprovedeno je testiranje ACO i GA algoritama na primeru optimizacije modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova. Ulazni parametri i rezultati optimizacije za posmatrani skup podataka od $n = 20$ poslova i $m = 10$ mašina primenom ACO i GA algoritma predstavljeni su u tabeli 5.26, dok je detaljni opis razmatranog problema dat u radu (Stanković i sar., 2020).

Tabela 5.26 Rezultati optimizacije za posmatrani skup podataka

Ulazni optimizacioni parametri ACO algoritma					
<i>Iter</i>	α	β	ρ	<i>AntNum</i>	<i>Q</i>
500	1.5	3	0.5	30	100
Rezultati optimizacije primenom ACO algoritma					
Kriterijum optimalnosti - Ct_{max}			182		
Ulazni optimizacioni parametri GA algoritma					
<i>Iter</i>	<i>Pop</i>		<i>Mu</i>	<i>Cross</i>	
500	1000		0.03	0.6	
Rezultati optimizacije primenom GA algoritma					
Kriterijum optimalnosti - Ct_{max}			176		

Na osnovu dobijenih rezultata iz tabele 5.26, za potrebe optimizacije modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova, izabran je GA algoritam. Razmatrani model fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova dodatno se može razvrstati prema stepenu fleksibilnosti dostupnih mašina (Stanković i sar., 2020):

- Delimična fleksibilnost predstavlja problem kod koga samo određene operacije mogu biti dodeljene ograničenom skupu raspoloživih mašina;
- Potpuna fleksibilnost podrazumeva da svaka operacija može biti izvršena na bilo kojoj od dostupnih alternativnih mašina, omogućavajući maksimalnu prilagodljivost u procesu raspoređivanja.

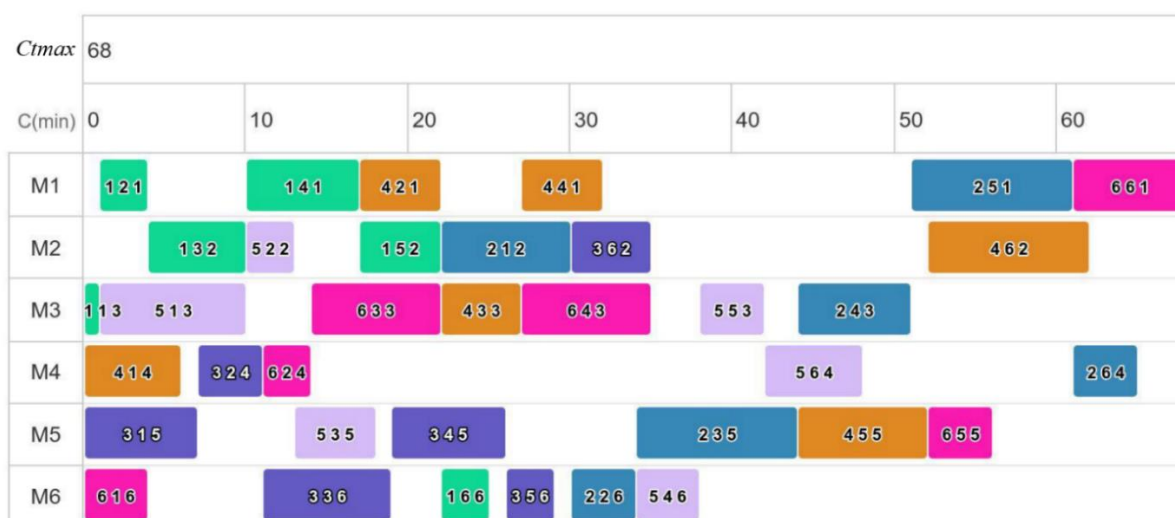
Potrebno je napomenuti da su ulazni podaci korišćeni za optimizaciju, predstavljeni u tabelama 5.27 i 5.28, preuzeti iz autorskog rada (Stanković i sar., 2020). Primer ulaznih podataka za problem delimične fleksibilnosti predstavljen je u tabeli 5.27.

Tabela 5.27 Delimična fleksibilnost: vremena obrade poslova na mašinama

Poslovi	Operacije	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
J_1	O_{11}	7	-	1	5	-	-
	O_{21}	3	-	-	5	-	8
	O_{31}	-	6	-	7	-	10

	O_{41}	7	-	5	7	-	-
	O_{51}	-	5	-	-	6	3
	O_{61}	7	-	-	-	6	3
J_2	O_{12}	-	8	-	8	-	9
	O_{22}	5	-	5	-	-	4
	O_{32}	10	-	11	-	10	-
	O_{42}	8	-	7	-	-	10
	O_{52}	10	-	-	10	-	12
	O_{62}	-	7	15	4	-	-
J_3	O_{13}	8	-	5	-	7	-
	O_{23}	-	4	-	4	6	-
	O_{33}	-	-	-	-	-	8
	O_{43}	9	-	8	-	7	-
	O_{53}	-	3	-	5	-	3
	O_{63}	-	5	6	-	7	-
J_4	O_{14}	-	5	-	6	-	9
	O_{24}	5	-	4	-	8	-
	O_{34}	9	-	5	-	-	10
	O_{44}	5	11	-	3	-	-
	O_{54}	15	-	9	-	8	-
	O_{64}	-	10	-	11	-	9
J_5	O_{15}	9	-	9	-	9	-
	O_{25}	-	3	6	-	8	-
	O_{35}	-	6	7	-	5	-
	O_{45}	-	6	-	5	-	4
	O_{55}	3	-	4	-	4	-
	O_{65}	-	8	-	6	-	9
J_6	O_{16}	-	3	-	5	-	4
	O_{26}	8	-	-	3	6	-
	O_{36}	7	-	8	-	-	9
	O_{46}	10	-	8	9	-	-
	O_{56}	-	9	-	10	4	-
	O_{66}	7	-	6	-	8	-

Na primer, posao J_1 sastoji se od šest operacija, pri čemu prvu operaciju O_{11} mogu obraditi mašine M_1, M_3 i M_4 . Ova ograničenja utiču na formiranje optimalnog rasporeda poslova i planiranje i raspoređivanje poslova. Na slici 5.32 grafički su predstavljeni rezultati dobijeni optimizacijom delimično fleksibilnog problema planiranja poslova primenom GA algoritma.



Slika 5.32 Grafički prikaz delimične fleksibilnosti i rasporeda proizvodnog procesa

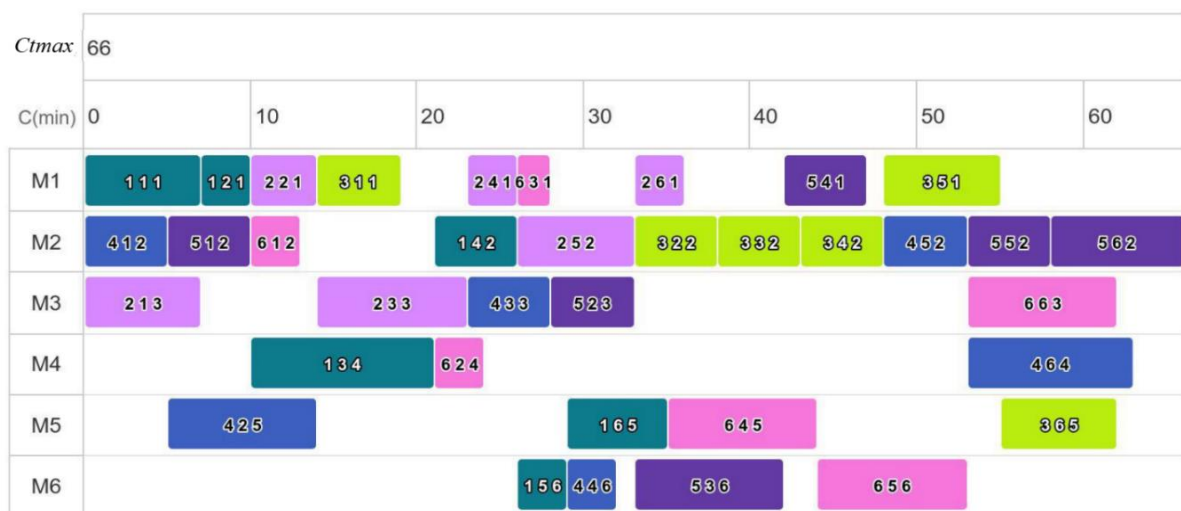
U nastavku rada predstavljen je primer potpune fleksibilnosti, gde svaki posao može biti obrađen na bilo kojoj mašini. Primer ulaznih podataka za problem potpune fleksibilnosti predstavljen je u tabeli 5.28 (Stanković i sar., 2020).

Tabela 5.28 Potpuna fleksibilnost: vremena obrade poslova na mašinama

Poslovi	Operacije	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
J_1	O_{11}	7	11	9	7	8	9
	O_{21}	3	6	12	10	5	7
	O_{31}	5	6	6	11	7	10
	O_{41}	5	5	7	7	8	7
	O_{51}	9	5	10	9	6	3
	O_{61}	10	3	11	8	6	7
J_2	O_{12}	7	8	7	5	7	7
	O_{22}	4	7	5	10	9	8
	O_{32}	5	7	9	10	10	9
	O_{42}	3	5	11	10	9	10
	O_{52}	10	7	9	9	6	6
	O_{62}	3	9	5	4	11	10
J_3	O_{13}	5	6	5	7	8	9
	O_{23}	2	5	9	4	8	9
	O_{33}	8	5	9	10	10	8
	O_{43}	9	5	9	10	11	8
	O_{53}	7	8	7	10	7	9
	O_{63}	7	9	9	10	7	11
J_4	O_{14}	7	5	7	8	9	10
	O_{24}	5	5	7	9	9	9
	O_{34}	5	9	5	10	6	10

	O_{44}	6	7	8	3	9	3
	O_{54}	2	5	9	9	8	10
	O_{64}	7	9	9	10	11	9
J_5	O_{15}	9	5	9	8	10	11
	O_{25}	6	5	5	8	10	6
	O_{35}	9	5	9	10	5	9
	O_{45}	5	9	10	11	12	4
	O_{55}	3	5	5	6	9	11
	O_{65}	9	8	9	8	10	7
J_6	O_{16}	2	3	9	8	10	7
	O_{26}	2	5	9	3	9	7
	O_{36}	2	5	9	9	10	9
	O_{46}	10	9	10	9	9	10
	O_{56}	9	5	10	6	4	9
	O_{66}	10	5	9	4	9	8

Na slici 5.33 grafički su predstavljeni rezultati dobijeni optimizacijom potpuno fleksibilnog problema planiranja i raspoređivanja poslova primenom GA algoritma.



Slika 5.33 Grafički prikaz potpune fleksibilnosti i rasporeda proizvodnog procesa

Kao zaključak potrebno je napomenuti da, iako potpuna fleksibilnost može doneti bolje rezultate u optimizaciji, delimična fleksibilnost predstavlja realniji i primenljiviji scenario u praksi, posebno u okruženjima sa ograničenim resursima i strukturom proizvodnje.

5.8.2 Model fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova sa dodatnim transportnim vremenom $TransTimes_{kk'}$ između mašina

Deterministički model $FJSP_c$ planiranja i raspoređivanja poslova sa dodatnim transportnim vremenom može se definisati na sledeći način $FJSP_c | TransTimes_{kk'} | C_{t_{max}}$.

Potrebno je rasporediti n poslova $J_1, J_2, \dots, J_j, \dots, J_n$, pri čemu svaki posao J_j ima određen redosled operacija $O_{1j}, O_{2j}, \dots, O_{ij}$, koje je potrebno obraditi na skupu mašina $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots, M_m$ sa dodatnim transportnim vremenom $TransTimes_{kk'}$ između mašina. $TransTimes_{kk'}$ označava vreme transporta posla između mašine M_k i mašine $M_{k'}$, i zavisi od međusobne udaljenosti između mašina. Model sa dodatnim transportnim vremenom između mašina treba da zadovolji sledeće pretpostavke (Guohui i sar., 2019), (Stanković i sar., 2022):

- isti posao može biti obrađivan samo na jednoj mašini u datom trenutku,
- posao se ne može zaustaviti nakon što obrada započne,
- svi poslovi mogu započeti obradu u početnom trenutku 0,
- redosled operacija unutar posla je unapred definisan, tj. operacija se šalje na narednu mašinu čim se prethodna obradi,
- vreme trajanja svake operacije se razlikuje u zavisnosti od izabrane mašine za njenu obradu,
- operacije koje pripadaju različitim poslovima mogu se obrađivati u istom trenutku ali na drugoj mašini,
- ukupno vreme obrade svake operacije na određenoj mašini je poznato,
- razdaljina između dve različite mašine prilikom transporta operacije naziva se vremenom transporta.

Za definisanje matematičke formulacije modela sa dodatnim transportnim vremenom između mašina korišćena je sledeća notacija (Stanković i sar., 2022):

J - skup poslova,

O - skup operacija, pri čemu $O_{i(j-1)}$ označava prethodnu operaciju posla j , dok O'_{ij} označava prethodnu operaciju na istoj mašini na kojoj se obrađuje operacija O_{ij} .

M – skup mašina na kojoj se vrši raspoređivanje poslova,

j – indeks poslova,

i – indeks operacija,

k – indeks mašina,

pt_{ijk} - vreme obrade operacije i posla j na mašini k ,

sd_{ijk} - vreme početka obrade operacije i posla j na mašini k ,

T_{ijk} - vreme trajanja operacije i posla j na mašini k ,

Ct_{ijk} – vreme završetka operacije i posla j na mašini k ,

Ct_j – vreme završetka posla j ,

Ct'_{ij} - vreme završetka prethodne operacije posla j koja se izvršavala na istoj mašini na kojoj će se sada obraditi operacija O_{ij} ,

$Ct_{k(j-1)}$ - vreme završetka prethodne operacije posla j na bilo kojoj mašini k , pre nego što posao pređe na sledeću operaciju O_{ij} ,

Ct_{max} - ukupno vreme obrade svih poslova,

Kriterijum optimalnosti:

$$Ct_{max} = \min \left(\max_{1 \leq j \leq n} (Ct_j) \right) \quad (5.52)$$

pri čemu važe sledeća ograničenja (Stanković i sar., 2022):

$$Ct_{ijk} = sd_{ijk} + T_{ijk} \quad (5.53)$$

$$Ct_{ijk} - Ct'_{i'j} \geq T_{ijk} \quad (5.54)$$

$$\begin{cases} Ct_{k(j-1)} + TransTime_{kk'} & Ct'_{i'j} < Ct_{k(j-1)} + TransTime_{kk'} \\ Ct'_{i'j} & Ct'_{i'j} > Ct_{k(j-1)} + TransTime_{kk'} \end{cases} \quad (5.55)$$

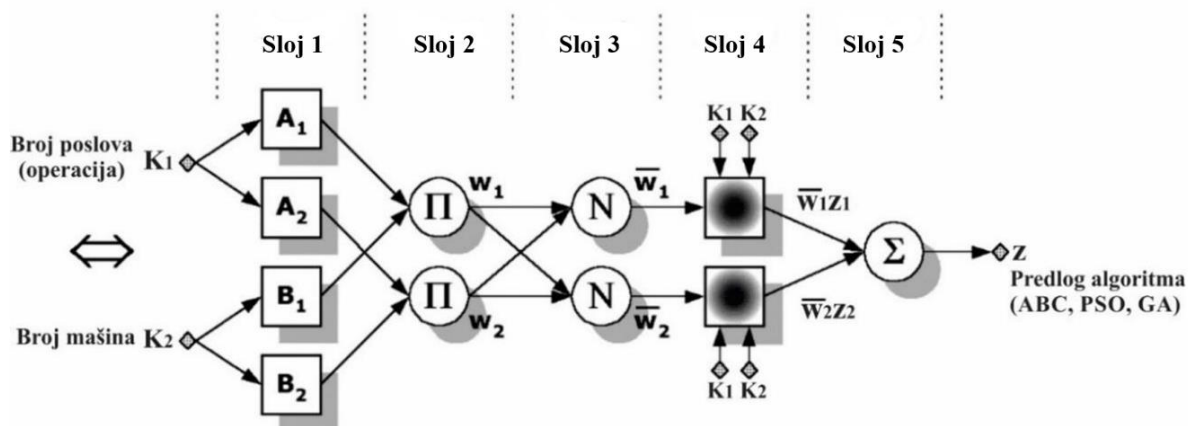
Jednačina (5.52) predstavlja kriterijum optimalnosti odnosno ukupno vreme obrade poslova. Ograničenje (5.53) definiše uslov da se vreme završetka operacije i posla j na mašini k sastoji od vremena njenog početka i vremena obrade na dodeljenoj mašini. Ograničenje (5.54) osigurava da svaka operacija na određenom poslu ne može započeti pre nego što se završi prethodna operacija tog posla na istoj ili drugoj mašini, uzimajući u obzir neophodno vreme obrade. Ograničenje (5.55) uzima u obzir transportno vreme između mašina, pri čemu operacija može započeti tek nakon završetka prethodne operacije i dolaska posla na novu mašinu. Ako vreme završetka prethodne operacije plus transportno vreme nije završeno, operacija mora sačekati da transport bude završen, u suprotnom, može odmah početi sa obradom.

5.8.2.1 Primer optimizacije modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova sa transportnim vremenom $TransTimes_{kk'}$ i primenom ANFIS sistema

Primena ANFIS sistema za izbor optimalne metaheurističke metode za optimizaciju modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova sa dodatnim transportnim vremenom $TransTimes_{kk'}$ između mašina, predstavlja veliki izazov. Kako bi se odabrala optimalna

metoda, razvijen je ANFIS sistem koji je detaljno opisan u poglavlju 4.6, čija je osnovna uloga izbor odgovarajućeg algoritma optimizacije ABC, PSO ili GA.

Kombinacijom parametara razmatranih metoda dobijeni su rezultati optimizacije, koji su potom korišćeni kao baza podataka za obuku ANFIS sistema, čime je omogućeno modeliranje odnosa između ulaznih i izlaznih vrednosti procesa. Na taj način, razvijeni ANFIS model može se dalje koristiti za predlaganje metaheurističkog algoritma koji daje najbolje rezultate. Sistemski ulazi su dve karakteristike posla, odnosno broj poslova i broj mašina, dok je jedan izlaz predloženi algoritam optimizacije koji je jedna od tri klase (ABC, PSO ili GA). Za svaku kombinaciju optimizacionih parametara, jedan metod optimizacije je označen kao preferiran na osnovu dobijenih rezultata u pogledu CPU vremena i vrednosti funkcije cilja Ct_{max} . Osnovna ANFIS arhitektura, prilagođena razmatranom problemu, sastoji se od dva ulaza, jednog izlaza, dva pravila i pet slojeva, što se može grafički videti na slici 5.34 (Ćojbašić, 2002), (Stanković i sar., 2022).



Slika 5.34 ANFIS arhitektura za izbor optimalne optimizacione metode

U prvom sloju razvoja ANFIS modela potrebno je obezbediti veliku bazu podata kako bi izlazni parametri posmatranog modela bili relevantni pri izboru odgovarajuće optimizacione metode. Sprovedena su 109 eksperimenata za svaki metaheuristički algoritam posebno. ANFIS ima zadatak da analizira rezultate i ukaze na to koji algoritam najefikasnije optimizuje ključne izlazne parametre kao što su Ct_{max} i CPU vreme, omogućavajući tako izbor najbolje metode za postizanje optimalnih rezultata. Primenom ANFIS sistema, zaključeno je da GA algoritam predstavlja najprikladniju metodu za optimizaciju modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova sa transportnim vremenom $TransTimes_{kk'}$. U tabeli 5.29 prikazani su rezultati proračuna i performansi upoređivanih metaheurističkih algoritama ABC, PSO i GA (Stanković i sar., 2022).

Tabela 5.29 Rezultati proračuna korišćenjem ABC, PSO i GA algoritma

Broj ulaza	Veličina problema	ABC		PSO		GA	
		CPU	Ct_{max}	CPU	Ct_{max}	CPU	Ct_{max}
FJSP _{T1}	06 · 06	3	55	3	55	1	55
FJSP _{T2}	10 · 05	31	665	30	666	10	666
FJSP _{T3}	10 · 10	290	905	280	893	282	890
...	...	...	...	...	...	...	...
FJSP _{T18}	15 · 10	625	1153	627	1147	670	1147
FJSP _{T19}	20 · 10	725	1362	664	1362	937	1359
...	...	...	...	...	...	...	...
FJSP _{T35}	10 · 10	120	916	108	912	98	913
FJSP _{T36}	10 · 10	125	891	122	875	125	876
FJSP _{T37}	15 · 05	392	937	370	926	385	926
...	...	...	...	...	...	...	...
FJSP _{T55}	15 · 15	906	1592	910	1566	900	1554
FJSP _{T56}	20 · 05	537	1242	600	1238	588	1228
FJSP _{T57}	20 · 10	1218	1352	1200	1307	1259	1308
...	...	...	...	...	...	...	...
FJSP _{T78}	20 · 15	1350	756	1336	750	1361	750
FJSP _{T80}	20 · 20	2189	1075	2179	1165	2168	1072
...	...	...	...	...	...	...	...
FJSP _{T108}	30 · 10	1788	1927	1685	1922	1784	1918
FJSP _{T109}	50 · 10	2868	3693	2746	3659	2747	3658

U prethodnoj fazi korišćen je ANFIS sistem kako bi se odabrao najpogodniji algoritam za optimizaciju modela raspoređivanja resursa. U daljem tekstu biće razmatrana studija koja se zasniva na realnom slučaju u fabrici obuće, detaljno predstavljenom u autorskom radu (Stanković i sar., 2022). Ulazni parametri, kao što su vremena obrade poslova na mašinama i vremena transporta između mašina, predstavljeni su u tabelama 5.30 i 5.31 (Stanković i sar., 2022).

Tabela 5.30 Vremena obrade poslova na mašinama

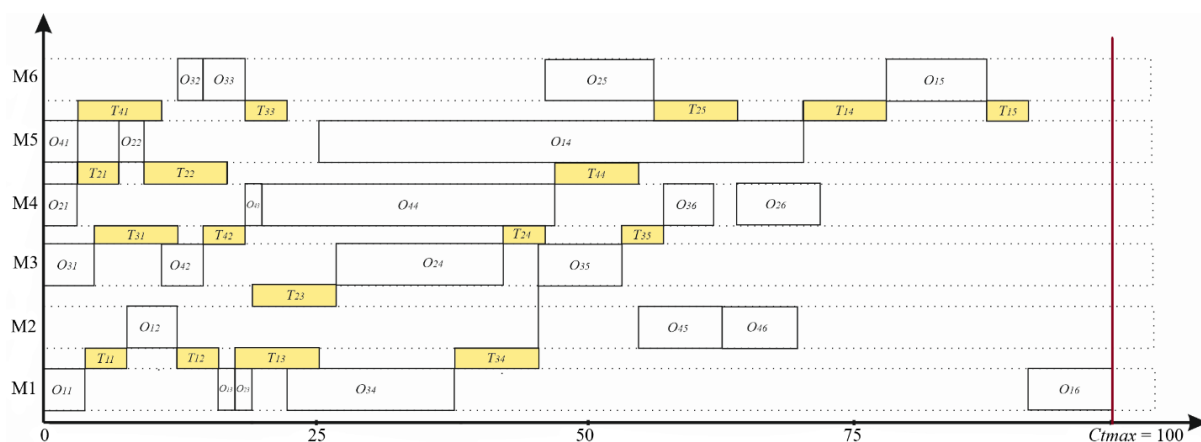
Poslovi	Operacije	Vreme obrade operacija na mašinama					
		M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
J_1	O_{11}	5	8	9	6	6	7
	O_{21}	5	6	6	-	8	9
	O_{31}	2	3	2	4	5	3
	O_{41}	62	63	-	70	58	67
	O_{51}	14	16	17	15	-	12
	O_{61}	10	11	13	12	13	15
J_2	O_{12}	6	7	5	4	3	7
	O_{22}	2	-	4	6	3	5
	O_{32}	2	5	3	4	7	9

	O_{42}	26	24	20	28	30	-
	O_{52}	14	15	16	18	17	13
	O_{62}	9	7	8	10	10	8
J_3	O_{13}	7	8	6	9	10	11
	O_{23}	6	7	-	2	8	3
	O_{33}	5	7	6	9	4	5
	O_{43}	20	-	23	27	24	-
	O_{53}	13	15	10	11	13	16
	O_{63}	7	8	12	6	9	10
J_4	O_{14}	9	8	8	6	4	7
	O_{24}	7	-	5	-	6	-
	O_{34}	4	3	5	2	4	6
	O_{44}	40	42	-	35	37	41
	O_{54}	15	10	12	11	16	14
	O_{64}	10	9	7	12	14	11

Tabela 5.31 Vremena transporta između različitih mašina

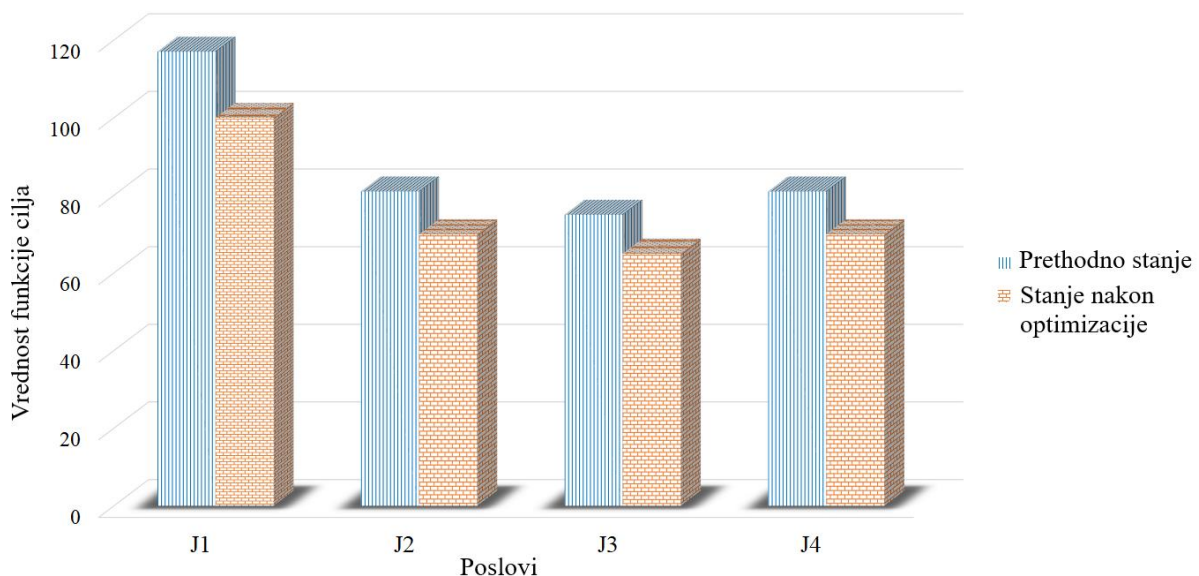
Mašine	Vreme transporta između različitih mašina					
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
M_1	0	1	2	3	2	1
M_2	1	0	4	2	3	1
M_3	2	4	0	1	2	2
M_4	3	2	1	0	1	2
M_5	2	3	2	1	0	2
M_6	1	1	2	2	2	0

Grafički prikaz optimalnog rasporeda poslova na mašinama, uzimajući i dodatna transportna vremena, kao i poređenje rezultata pre i nakon optimizacije sistema, dat je na slikama 5.35 i 5.36.



Slika 5.35 Grafički prikaz optimalnog proizvodnog procesa sa dodatnim transportnim vremenom između mašina $TransTimes_{kk'}$ (Stanković i sar., 2022)

Na osnovu dosadašnjih rezultata kompanije i vremena obrade poslova, vrednost funkcije cilja iznosila je $Ct_{max} = 117$ minuta, dok je nakon primene optimizacije smanjena na $Ct_{max} = 100$ minuta, što je prikazano na slici 5.36. Analiza ovih rezultata pokazuje da je optimizacijom procesa planiranja ostvareno povećanje proizvodne produktivnosti od 14,5%, čime se potvrđuje opravdanost primene ANFIS sistema i izbora GA algoritma za dalju optimizaciju (Stanković i sar., 2022).



Slika 5.36 Graficki prikaz vremena obrade pojedinačnih poslova pre i nakon optimizacije

5.8.3 Matematička formulacija stohastičkog modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova $FJSP_c | stohpt_{ijk} | sthCt_{max}$

Stohastički model $FJSP_c$ planiranja i raspoređivanja poslova može se definisati na sledeći način $FJSP_c | stohpt_{ijk} | sthCt_{max}$. Potrebno je rasporediti n poslova $J_1, J_2, \dots, J_j, \dots, J_n$, pri čemu svaki posao J_j ima redosled operacija $O_{1j}, O_{2j}, \dots, O_{ij}$, koje je potrebno obraditi na skupu mašina $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots, M_m$. Za definisanje matematičke formulacije stohastičkog modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova korišćena je sledeća notacija:

M - skup mašina na kojoj se vrši raspoređivanje poslova, gde je m ukupan broj mašina,

J - skup poslova, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$, gde n predstavlja ukupan broj poslova,

j - indeks koji označava posao,

k - indeks koji označava mašinu,

i - indeks koji označava operaciju nekog posla,

$stohp_{ijk}$ - stohastičko vreme obrade operacije i posla j na mašini k ,

sd_{ijk} - početno vreme obrade operacije i posla j na mašini k ,

K - dovoljno veliki pozitivan broj,

$stohCt_{max}$ - ukupno stohastičko vreme obrade poslova.

Promenljive odlučivanja u ovom slučaju mogu se definisati na sledeći način:

$$x_{ii'k} = \begin{cases} 1, & \text{ako operacija } i \text{ prethodni operaciji } i' \text{ na mašini } k \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

$$z_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ako se operacija } i \text{ posla } j \text{ obrađuje na mašini } k \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

Kriterijum optimalnosti:

$$\min stohCt_{max} \quad (5.56)$$

pri čemu važe sledeća ograničenja (Ghaedy-Heidary i sar., 2024):

$$\sum_{k=1}^M z_{ijk} \leq 1, \quad \forall i, j \quad (5.57)$$

$$\sum_{k=1}^M x_{ii'k} z_{ijk} = 1 \quad \forall i, j, k \quad (5.58)$$

$$\sum_{k=1}^M (sd_{ijk} + stohpt_{ijk} z_{ijk}) \leq \sum_{k=1}^M sd_{(i+1)jk}, \quad \forall i, j \quad (5.59)$$

$$\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^O (sd_{ijk} + stohpt_{ijk} z_{ijk}) \leq \sum_{i=1}^J \sum_{i'=1}^O (sd_{i'jk} x_{ii'k} + K(1 - x_{ii'k})), \quad \forall k \quad (5.60)$$

$$P \left(\sum_{i=1}^J \sum_{i'=1}^J \sum_{k=1}^M stohpt_{ijk} x_{ii'k} \leq stohCt_{max} \right) \geq \alpha \quad (5.61)$$

$$sd_{ijk} \geq 0, stohpt_{ijk} \geq 0, \quad x_{ii'k}, y_{ijk} \in \{0,1\}, \quad \forall i, i', j, k \quad (5.62)$$

Jednačina (5.56) predstavlja kriterijum optimalnosti odnosno ukupno vreme obrade poslova. Ograničenje (5.57) predstavlja uslov da se samo jedna operacije jednog posla dodeli jednoj mašini u sekvetnom rasporedu poslova. Ograničenje (5.58) definiše sekvencijalni redosled izvršavanja operacija na istoj mašini, omogućavajući formiranje sekvetnog rasporeda obrade poslova. Ograničenje (5.59) obezbeđuje da naredna operacija u okviru istog posla može započeti tek nakon završetka prethodne. Ograničenje (5.60) sprečava preklapanje u izvršavanju operacija na istoj mašini. Ograničenje (5.61) predstavlja verovatnosni uslov koji ograničava vrednost funkcije cilja, osiguravajući da ukupno vreme obrade ostane ispod zadate granice sa definisanom verovatnoćom. Ograničenje (6.62) predstavlja tip promenljive.

5.8.3.1 Primer optimizacije stohastičkog $FJSP_c$ modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova sa parametrima normalne raspodele primenom GA algoritma

Optimizacija stohastičkog $FJSP_c$ modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova primenom GA algoritma čija vremena obrade poslova na mašinama imaju normalni zakon raspodele može se zapisati u sledećem obliku $FJSP_c | stohpt_{ijk} \sim N(\mu p_{ijk}, \sigma p_{ijk}^2) | stohCt_{max}$. U tabeli 5.32 prikazana su ulazne veličine, tj. vremena obrade poslova na mašinama koja imaju normalni zakon raspodele.

Tabela 5.32 Vremena obrade poslova na mašinama prema zakonu normalne raspodele

Poslovi	Mašine				
J_n	M_1	M_2	...	M_5	M_6
J_1	$N(2.923, 1.375)$	$N(4.780, 1.951)$	...	$N(4.172, 1.156)$	$N(5.198, 1.156)$
	$N(3.026, 1.058)$	$N(3.063, 1.866)$	...	$N(6.634, 1.021)$	$N(5.913, 1.970)$
	$N(1.100, 1.100)$	$N(1.349, 1.212)$	...	$N(3.041, 1.304)$	$N(0.779, 1.525)$
	$N(59.343, 1.432)$	$N(60.487, 1.291)$	...	$N(56.325, 1.292)$	$N(64.811, 1.366)$
	$N(11.061, 1.456)$	$N(12.773, 1.785)$	...	$N(13.480, 1.592)$	$N(9.667, 1.046)$
	$N(7.218, 1.608)$	$N(9.001, 1.171)$	...	$N(9.829, 1.966)$	$N(12.330, 1.808)$
J_2	$N(3.600, 1.305)$	$N(5.129, 1.098)$	...	$N(1.037, 1.122)$	$N(4.462, 1.495)$
	$N(0.424, 1.034)$	$N(5.336, 1.909)$	...	$N(0.84, 1.312)$	$N(4.444, 1.520)$
	$N(1.000, 1.500)$	$N(3.241, 1.185)$	...	$N(3.650, 1.939)$	$N(6.066, 1.895)$
	$N(23.577, 1.598)$	$N(20.734, 1.922)$	...	$N(28.168, 1.045)$	$N(29.312, 1.325)$
	$N(11.853, 1.389)$	$N(12.537, 1.271)$	...	$N(14.665, 1.281)$	$N(10.461, 1.543)$
	$N(7.071, 1.141)$	$N(3.630, 1.802)$	...	$N(7.180, 1.772)$	$N(5.425, 1.199)$
J_3	$N(4.901, 1.006)$	$N(4.906, 1.815)$	...	$N(7.838, 1.771)$	$N(9.324, 1.074)$
	$N(3.318, 1.116)$	$N(5.006, 1.863)$	...	$N(5.865, 1.064)$	$N(1.403, 1.311)$
	$N(3.084, 1.325)$	$N(4.564, 1.730)$	...	$N(1.065, 1.472)$	$N(2.487, 1.120)$
	$N(18.187, 1.713)$	$N(17.989, 1.761)$	...	$N(21.074, 1.494)$	$N(23.598, 1.523)$
	$N(10.416, 1.428)$	$N(12.890, 1.025)$	...	$N(11.455, 1.636)$	$N(13.174, 1.314)$
	$N(4.689, 1.509)$	$N(5.183, 1.908)$	...	$N(6.700, 1.756)$	$N(7.206, 1.229)$
J_4	$N(6.708, 1.077)$	$N(6.381, 1.290)$	...	$N(0.747, 1.808)$	$N(4.195, 1.633)$
	$N(4.052, 1.871)$	$N(4.044, 1.804)$	...	$N(2.955, 1.539)$	$N(3.032, 1.807)$
	$N(1.054, 1.896)$	$N(1.200, 1.318)$	...	$N(2.178, 1.427)$	$N(3.776, 1.818)$
	$N(37.301, 1.861)$	$N(39.117, 1.007)$	...	$N(34.475, 1.222)$	$N(39.089, 1.120)$
	$N(12.857, 1.338)$	$N(7.744, 1.943)$	...	$N(13.436, 1.703)$	$N(11.236, 1.364)$
	$N(2.923, 1.375)$	$N(4.780, 1.951)$	...	$N(4.172, 1.156)$	$N(5.198, 1.156)$

U narednoj tabeli 5.33 prikazane su vrednosti vremena obrade poslova na mašinama generisane prema izrazu 4.13, odnosno procedure detaljno opisane u poglavlju 4.2.1, na osnovu normalno raspodeljenih veličina prikazanih u tabeli 5.32 i za verovatnoću realizacije 0.95%.

Tabela 5.28 Stohastička vremena obrade poslova na mašinama $stohpt_{ijk}$

Poslovi	Operacije	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
J_1	O_{11}	5.186	7.991	9.046	5.849	6.075	7.101
	O_{21}	4.767	6.134	6.157	4.940	8.315	9.156
	O_{31}	2.9106	3.344	5.954	3.799	5.187	3.289
	O_{41}	61.700	62.612	65.172	69.937	58.452	67.059
	O_{51}	13.458	15.711	17.539	15.083	16.100	11.389
	O_{61}	9.865	10.928	13.199	12.012	13.065	15.306
J_2	O_{12}	5.748	6.936	4.970	3.846	2.884	6.923
	O_{22}	2.126	8.478	3.494	6.074	3.000	6.946
	O_{32}	4.469	5.192	2.873	4.366	6.842	9.185
	O_{42}	26.207	23.898	19.783	28.062	29.888	31.493
	O_{52}	14.139	14.629	15.829	18.076	16.774	13.001
	O_{62}	8.949	6.596	7.888	9.852	10.097	7.399
J_3	O_{13}	6.557	7.893	6.005	8.910	10.753	11.092
	O_{23}	5.553	6.843	7.496	1.476	8.056	3.154
	O_{33}	5.242	6.745	5.934	8.550	4.171	4.910
	O_{43}	20.031	20.809	22.949	27.067	23.989	26.057
	O_{53}	12.923	15.240	10.232	11.086	13.152	15.867
	O_{63}	6.852	7.667	11.834	6.100	9.021	10.096
J_4	O_{14}	8.731	8.154	8.023	6.139	3.924	7.171
	O_{24}	6.740	7.124	5.165	2.925	6.071	5.565
	O_{34}	4.028	3.369	4.682	2.254	4.199	6.125
	O_{44}	40.293	42.180	41.446	34.647	36.807	41.100
	O_{54}	14.701	9.946	11.928	11.303	15.936	14.039
	O_{64}	9.964	16.323	10.887	12.139	14.135	10.662

Primenom ANFIS sistema, razvijenog u prethodnom poglavlju (5.8.2.1), izabran je GA kao najpogodniji za rešavanje optimizacionog problema. Takođe, na osnovu prethodno sprovedene analize uticaja ulaznih parametara GA algoritma primenom ANOVA testa (poglavlje 5.8.1.1), definisani su optimalni ulazni parametri (tabela 5.34) koji su zatim korišćeni u daljoj optimizaciji stohastičkog modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova.

Tabela 5.34 Ulaznih parametri GA za optimizaciju $FJSP_c$ modela

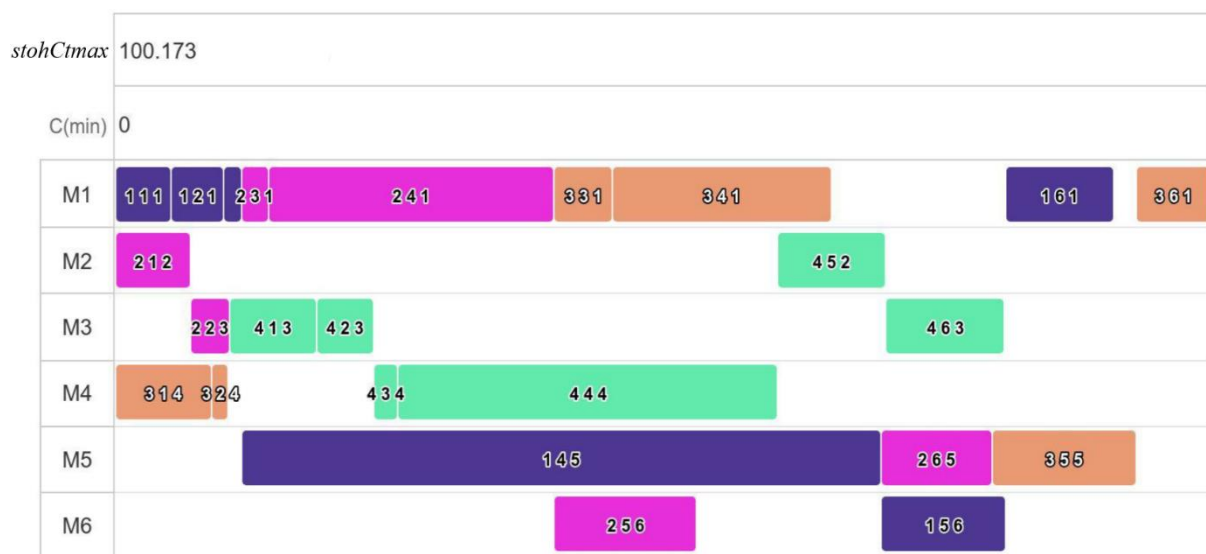
Preporučeni ulazni optimizacioni parametri GA			
Pop	$Cross$	Mu	$Iter$
850	0.75	0.05	1000

U naredoj tabeli 5.35 prikazani su rezultati optimizacije primenom GA algoritma. Rezultati optimizacije predstavljaju optimalan raspored poslova na setu mašina u sekvetnom obliku kao i ukupno vreme izvršavanja svakog posla pojedinačno na mašini.

Tabela 5.35 Rezultati optimizacije $FJSP_c$ modela primenom GA algoritma

Optimalan sekvetni raspored poslova na setu mašina							Funkcija cilja
J_1	1 1 1	1 2 1	1 3 1	1 4 5	1 5 6	1 6 1	$stohCt_{max} =$ 100, 173 minuta
$stohpt_{ijk}$	5.1861	4.7674	2.9106	58.4516	11.3888	9.8648	
J_2	2 1 2	2 2 3	2 3 1	2 4 1	2 5 6	2 6 5	
$stohpt_{ijk}$	6.936	3.494	4.469	26.207	13.0012	10.097	
J_3	3 1 4	3 2 4	3 3 1	3 4 1	3 5 5	3 6 1	
$stohpt_{ijk}$	8.910	1.4762	5.242	20.0312	13.152	6.852	
J_4	4 1 3	4 2 3	4 3 4	4 4 4	4 5 2	4 6 3	
$stohpt_{ijk}$	8.023	5.165	2.2541	34.6466	9.9457	10.887	

Na slici 5.37 u grafičkom obliku prikazan je optimalan raspored poslova i ukupno optimalno vreme funkcije cilja $stohCt_{max} = 100, 173$ minuta.

**Slika 5.37** Grafički prikaz rasporeda poslova i ukupno vreme funkcije cilja $stohCt_{max}$

5.8.3.2 Primer optimizacije stohastičkog $FJSP_c$ modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova sa parametrima eksponencijalne raspodele primenom GA algoritma

Optimizacija stohastičkog $FJSP_c$ modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova primenom GA algoritma čija vremena obrade poslova na mašinama imaju eksponencijalni zakon raspodele može se modelirati kao $FJSP_c | stohpt_{ijk} \sim Exp(\lambda_{ijk}) | stohCt_{max}$, gde je $\lambda_{ijk} = \frac{1}{stohpt_{ijk}}$. U tabeli 5.36 prikazana su vremena obrade poslova na mašinama koja imaju eksponencijalni zakon raspodele.

Tabela 5.36 Vremena obrade poslova na mašinama prema zakonu eksponencijalne raspodele

Poslovi	Operacije	M_1	M_2	...	M_5	M_6
J_1	O_{11}	$Exp(0.028)$	$Exp(0.067)$	...	$Exp(0.098)$	$Exp(0.117)$
	O_{21}	$Exp(0.067)$	$Exp(0.047)$	...	$Exp(0.004)$	$Exp(0.122)$
	O_{31}	$Exp(0.108)$	$Exp(0.018)$	...	$Exp(0.086)$	$Exp(0.004)$
	O_{41}	$Exp(0.043)$	$Exp(0.052)$	...	$Exp(0.093)$	$Exp(0.022)$
	O_{51}	$Exp(0.264)$	$Exp(0.090)$	...	-	$Exp(0.130)$
	O_{61}	$Exp(0.009)$	$Exp(0.063)$	...	$Exp(0.145)$	$Exp(0.015)$
J_2	O_{12}	$Exp(0.153)$	$Exp(0.017)$	...	$Exp(0.040)$	$Exp(0.003)$
	O_{22}	$Exp(0.112)$	-	...	$Exp(0.052)$	$Exp(0.110)$
	O_{32}	$Exp(0.003)$	$Exp(0.034)$	...	$Exp(0.016)$	$Exp(0.147)$
	O_{42}	$Exp(0.082)$	$Exp(0.025)$	...	$Exp(0.015)$	-
	O_{52}	$Exp(0.079)$	$Exp(0.077)$	...	$Exp(0.035)$	$Exp(0.242)$
	O_{62}	$Exp(0.008)$	$Exp(0.091)$	...	$Exp(0.019)$	$Exp(0.022)$
J_3	O_{13}	$Exp(0.154)$	$Exp(0.122)$	...	$Exp(0.036)$	$Exp(0.053)$
	O_{23}	$Exp(0.008)$	$Exp(0.035)$	...	$Exp(0.026)$	$Exp(0.043)$
	O_{33}	$Exp(0.165)$	$Exp(0.113)$	...	$Exp(0.005)$	$Exp(0.052)$
	O_{43}	$Exp(0.115)$	-	...	$Exp(0.173)$	-
	O_{53}	$Exp(0.139)$	$Exp(0.075)$	...	$Exp(0.407)$	$Exp(0.106)$
	O_{63}	$Exp(0.060)$	$Exp(0.063)$	...	$Exp(0.154)$	$Exp(0.206)$
J_4	O_{14}	$Exp(0.022)$	$Exp(0.185)$	...	$Exp(0.053)$	$Exp(0.161)$
	O_{24}	$Exp(0.059)$	-	...	$Exp(0.235)$	-
	O_{34}	$Exp(0.001)$	-	...	$Exp(0.055)$	$Exp(0.056)$
	O_{44}	$Exp(0.075)$	$Exp(0.087)$	...	$Exp(0.102)$	$Exp(0.062)$
	O_{54}	$Exp(0.158)$	$Exp(0.023)$	...	$Exp(0.053)$	$Exp(0.037)$
	O_{64}	$Exp(0.060)$	$Exp(0.195)$	...	$Exp(0.025)$	$Exp(0.076)$

U narednoj tabeli 5.37 prikazane su vrednosti vremena obrade poslova na mašinama generisane prema proceduri koja je detaljno opisana u poglavlju 4.2.2, na osnovu eksponencijalno raspodeljenih veličina prikazanih u tabeli 5.36 i za verovatnoću realizacije 0.95%.

Tabela 5.37 Stohastička vremena obrade poslova na mašinama $stohpt_{ijk}$

Poslovi	Operacije	M_1	M_2	...	M_5	M_6
J_1	O_{11}	35.714	14.925	...	10.204	8.547
	O_{21}	14.925	21.277	...	250.000	8.197
	O_{31}	9.259	55.556	...	11.628	250.000
	O_{41}	23.256	19.231	...	10.753	45.455
	O_{51}	3.788	11.111	...		7.692
	O_{61}	111.111	15.873	...	6.897	66.667
J_2	O_{12}	6.536	58.824	...	25.000	333.333
	O_{22}	8.929	-	...	19.231	9.091
	O_{32}	333.333	29.412	...	62.500	6.803
	O_{42}	12.195	40.000	...	66.667	-
	O_{52}	12.658	12.987	...	28.571	4.132
	O_{62}	125.000	10.989	...	52.632	45.455
J_3	O_{13}	6.494	8.197	...	27.778	18.868
	O_{23}	125.000	28.571	...	38.462	23.256
	O_{33}	6.061	8.850	...	200.000	19.231
	O_{43}	8.696	-	...	5.780	-
	O_{53}	7.194	13.333	...	2.457	9.434
	O_{63}	16.667	15.873	...	6.494	4.854
J_4	O_{14}	45.455	5.405	...	18.868	6.211
	O_{24}	16.949	-	...	4.255	-
	O_{34}	100.000	-	...	18.182	17.857
	O_{44}	13.333	11.494	...	9.804	16.129
	O_{54}	6.329	43.478	...	18.868	27.027
	O_{64}	16.667	5.128	...	40.000	13.158

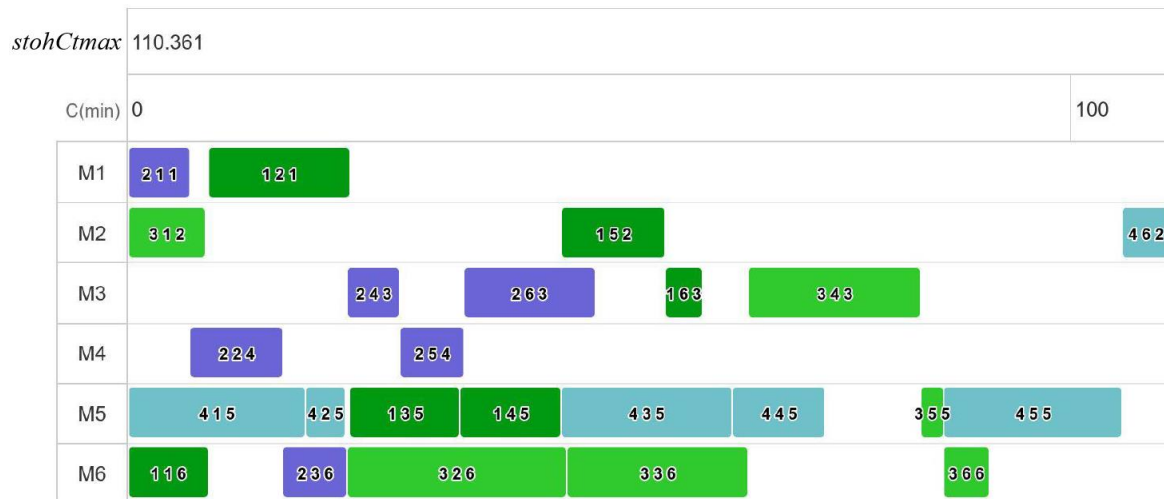
Optimizacioni ulazni paramteri GA algoritma korišeni su kao u prethodnom slučaju u poglavlju 5.8.3.1. U nastavku u tabeli 5.38 prikazan je optimalan raspored poslova na setu mašina u sekvetnom obliku kao i ukupno vreme izvršavanja svakog posla pojedinačno.

Tabela 5.38 Rezultati optimizacije $FJSP_c$ modela primenom GA algoritma

Optimalan sekvetni raspored poslova na setu mašina							Funkcija cilja
J_1	1 1 6	1 2 1	1 3 5	1 4 5	1 5 2	1 6 3	
$stohpt_{ijk}$	8.547	14.925	11.601	10.799	11.111	3.817	
J_2	2 1 1	2 2 4	2 3 6	2 4 3	2 5 4	2 6 3	

$stohpt_{ijk}$	6.536	9.059	6.803	5.525	6.849	13.889	$stohCt_{max} = 110,361$ minuta
J_3	3 1 2	3 2 6	3 3 6	3 4 3	3 5 5	3 6 1	
$stohpt_{ijk}$	8.197	23.256	19.231	18.182	2.457	16.667	
J_4	4 1 5	4 2 5	4 3 5	4 4 5	4 5 5	4 6 2	
$stohpt_{ijk}$	18.868	4.255	18.182	9.804	18.868	5.128	

Na slici 5.38 u grafičkom obliku prikazan je optimalan raspored poslova i ukupno optimalno vreme funkcije cilja $stohCt_{max} = 110,361$ minuta.



Slika 5.38 Grafički prikaz rasporeda poslova i ukupno vreme funkcije cilja $stohCt_{max}$

5.8.3.3 Primer optimizacije stohastičkog $FJSP_c$ modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova sa parametrima uniformne raspodele primenom GA algoritma

Optimizacija stohastičkog $FJSP_c$ modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova primenom GA algoritma čija vremena obrade poslova na mašinama imaju uniformni zakon raspodele može se modelirati kao $FJSP_c | stohpt_{ijk} \sim U(a_{ijk}, b_{ijk}) | stohCt_{max}$. U tabeli 5.39 prikazana su vremena obrade poslova na mašinama koja imaju uniformni zakon raspodele.

Tabela 5.39 Vremena obrade poslova na mašinama prema zakonu uniformne raspodele

Poslovi	O_{ij}	M_1	M_2	...	M_5	M_6
J_1	O_{11}	$U(3.79, 4.79)$	$U(1.247, 2.247)$	...	$U(24.43, 25.43)$	$U(21.35, 22.35)$
	O_{21}	$U(34.37, 35.37)$	-	...	$U(33.86, 34.86)$	$U(16.69, 17.69)$
	O_{31}	-	$U(12.71, 13.71)$	...	$U(15.768, 16.76)$	$U(2.353, 3.353)$
	O_{41}	$U(3.759, 4.759)$	$U(16.40, 17.40)$	...	$U(29.787, 30.78)$	$U(7.553, 8.553)$
	O_{51}	$U(37.84, 38.84)$	$U(30.22, 31.22)$	...	-	$U(16.16, 17.16)$

	O_{61}	$U(8.766, 9.76)$	$U(5.95, 6.957)$	...	$U(12.617, 13.61)$	$U(30.93, 31.93)$
J_2	O_{12}	-	-	...	$U(17.299, 18.29)$	$U(5.29, 6.29)$
	O_{22}	$U(18.31, 19.31)$	-	...	$U(7.131, 8.13)$	$U(34.87, 35.87)$
	O_{32}	$U(25.57, 26.578)$	$U(20.19, 21.19)$	...	$U(18.134, 19.13)$	$U(9.001, 10.00)$
	O_{42}	$U(34.014, 35.01)$	$U(5.11, 6.11)$	...	$U(37.618, 38.61)$	-
	O_{52}	$U(19.877, 20.87)$	$U(9.638, 10.63)$	...	$U(32.362, 33.36)$	$U(0.82, 1.82)$
	O_{62}	$U(7.47, 8.477)$	$U(2.618, 3.61)$	...	$U(18.618, 19.61)$	$U(3.548, 4.54)$
J_3	O_{13}	$U(20.51, 21.517)$	$U(30.321, 31.32)$	...	-	-
	O_{23}	$U(18.53, 19.535)$	$U(34.262, 35.26)$	...	$U(11.931, 12.93)$	$U(0.212, 0.788)$
	O_{33}	$U(17.2, 18.2)$	$U(9.806, 10.806)$	...	$U(33.42, 34.42)$	$U(26.73, 27.73)$
	O_{43}	$U(27.301, 28.30)$	$U(9.574, 10.574)$	...	$U(15.518, 16.51)$	$U(27.55, 28.55)$
	O_{53}	$U(22.408, 23.40)$	$U(0.295, 0.705)$	...	$U(1.145, 2.145)$	$U(32.84, 33.84)$
	O_{63}	$U(10.578, 11.57)$	$U(7.026, 8.026)$	...	$U(19.76, 20.716)$	$U(27.19, 28.19)$
J_4	O_{14}	$U(4.917, 5.917)$	$U(7.475, 8.475)$	...	$U(37.227, 38.22)$	$U(35.35, 36.35)$
	O_{24}	-	$U(18.647, 19.64)$	...	$U(23.261, 24.26)$	$U(24.58, 25.58)$
	O_{34}	$U(31.479, 32.47)$	$U(7.969, 8.969)$	...	$U(36.636, 37.63)$	$U(22.62, 23.62)$
	O_{44}	$U(27.216, 28.21)$	$U(38.898, 39.89)$	...	$U(8.933, 9.933)$	$U(9.24, 10.24)$
	O_{54}	$U(6.318, 7.318)$	-	...	$U(33.227, 34.22)$	$U(23.22, 24.22)$
	O_{64}	-	$U(23.897, 24.89)$	...	-	$U(28.19, 29.19)$

U narednoj tabeli 5.40 prikazane su vrednosti vremena obrade poslova na mašinama generisane prema proceduri koja je detaljno opisana u poglavlju 4.2.3, na osnovu uniformno raspodeljenih veličina prikazanih u tabeli 5.39 i za verovatnoću realizacije 0.95%.

Tabela 5.40 Stohastička vremena obrade poslova na mašinama $stohpt_{ijk}$

Poslovi	Operacije	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
J_1	O_{11}	4.290	1.747	19.972	-	24.938	21.850
	O_{21}	34.875	-	36.532	8.587	34.360	17.191
	O_{31}	-	13.211	4.948	1.558	16.268	2.853
	O_{41}	4.259	16.906	-	8.419	30.287	8.053
	O_{51}	38.345	30.726	6.495	2.449	-	16.666
	O_{61}	9.266	6.457	27.766	7.296	13.117	31.437
J_2	O_{12}	-	-	4.855	14.322	17.799	5.791
	O_{22}	18.819	-	29.029	23.898	7.631	35.374
	O_{32}	26.078	20.699	35.386	5.134	18.634	9.501
	O_{42}	34.514	5.619	35.929	-	38.118	-
	O_{52}	20.377	10.138	10.470	18.719	32.862	1.320
	O_{62}	7.977	3.118	28.212	0.725	19.118	4.048
	O_{13}	21.017	30.821	30.432	19.925	-	-

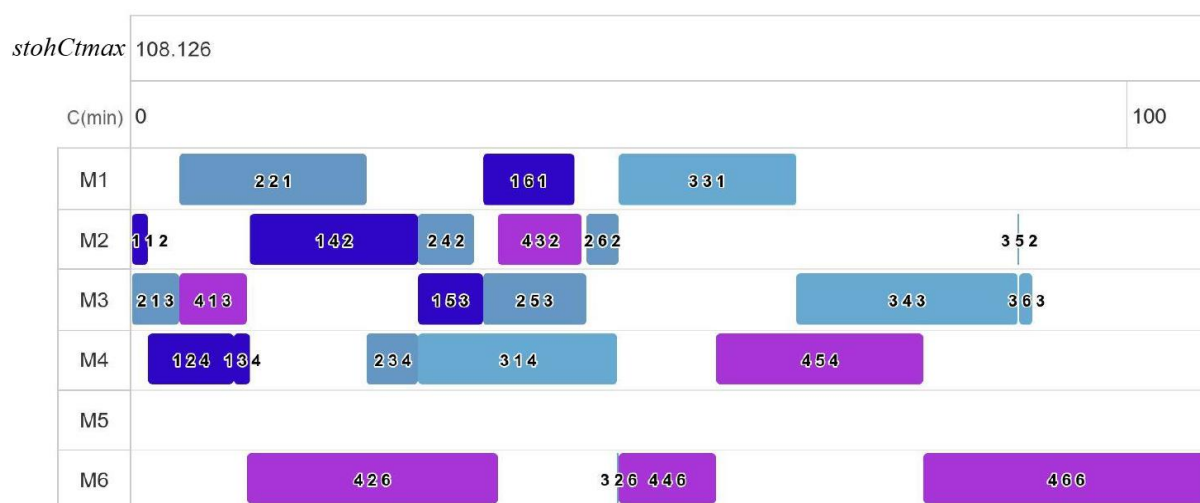
J_3	O_{23}	19.035	34.762	-	8.437	12.431	0.288
	O_{33}	17.700	10.306	-	20.672	33.920	27.230
	O_{43}	27.801	10.074	22.168	33.687	16.018	28.059
	O_{53}	22.908	0.205	-	-	1.645	33.345
	O_{63}	11.078	7.526	1.390	26.114	20.216	27.695
J_4	O_{14}	5.417	7.975	6.794	34.975	37.727	35.853
	O_{24}	-	19.147	0.296	26.624	23.761	25.085
	O_{34}	31.979	8.469	27.610	4.628	37.136	23.124
	O_{44}	27.716	39.398	-	21.539	9.433	9.741
	O_{54}	6.818	-	15.160	20.668	33.727	23.722
	O_{64}	-	24.397	26.481	21.938	-	28.696

U nastavku u tabeli 5.41 prikazan je optimalan raspored poslova na setu mašina u sekvetnom obliku kao i ukupno vreme izvršavanja svakog poslova pojedinačno.

Tabela 5.41 Rezultati optimizacije F/SP_c modela primenom GA algoritma

Optimalan raspored poslova na setu mašina							Ukupno vreme
J_1	1 1 2	1 2 4	1 3 4	1 4 2	1 5 3	1 6 1	$stohCt_{max} = 108,126$ minuta
$stohpt_{ijk}$	1.747	8.587	1.5577	16.906	6.495	9.266	
J_2	2 1 3	2 2 1	2 3 4	2 4 2	2 5 3	2 6 2	
$stohpt_{ijk}$	4.855	18.819	5.134	5.619	10.470	3.118	
J_3	3 1 4	3 2 4	3 3 1	3 4 3	3 5 2	3 6 3	
$stohpt_{ijk}$	19.925	8.437	17.7002	22.168	0.205	1.390	
J_4	4 1 3	4 2 6	4 3 2	4 4 6	4 5 4	4 6 6	
$stohpt_{ijk}$	6.794	25.085	8.469	9.741	20.668	28.696	

Na slici 5.39 u grafičkom obliku prikazan je optimalan raspored poslova i ukupno vreme funkcije cilja $Ct_{max} = 108,126$ minuta.



Slika 5.39 Grafički prikaz rasporeda poslova i ukupno vreme funkcije cilja $stohCt_{max}$

Na osnovu razvijenog stohastičkog modela $FJSP_c$ fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova, sprovedena je optimizacija pri različitim pretpostavkama o distribuciji ulaznih parametara (vremena obrade operacija na mašinama - $stohpt_{ijk}$). U radu su razmatrane tri raspodele: normalna, eksponencijalna i uniformna. Svaka od ovih raspodela ima različite karakteristike stohastičkog ponašanja proizvodnog procesa, što se direktno odražava na kvalitet i strukturu optimalnog rasporeda. Rezultati optimizacije pokazali su da vrednost ciljne funkcije $stohCt_{max}$ zavisi od vrste primenjene raspodele. Primenom normalne raspodele dobijena je vrednost $stohCt_{max} = 100,173$ minuta, primenom eksponencijalne raspodele $stohCt_{max} = 110,361$ minuta, dok primenom uniformne raspodele vrednost funkcije cilja je $stohCt_{max} = 108,126$ minuta. Ove razlike ukazuju na to da izbor raspodele ima značajan uticaj na performanse sistema i neophodno ga je uskladiti sa realnim karakteristikama.

Na osnovu prethodnih zaključaka izbor odgovarajuće raspodele predstavlja ključni element u modeliranju stohastičkih sistema. Kao preporuka za buduća istraživanja, ističe se potreba za statističkom validacijom raspodele na osnovu realnih proizvodnih podataka, kako bi se povećala tačnost modela i relevantnost optimizacionih rezultata, što se i može videti u šestom poglavlju doktorske disertacija gde je posmatran realan primer u firmi na proizvodnju nameštaja.

5.9.4 Matematička formulacija fazi modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova $FFJSP_c | fpt_{ijk} | Cft_{max}$

Fazi model $FFJSP_c$ planiranja i raspoređivanja poslova može se definisati na sledeći način $FFJSP_c | fpt_{ijk} | Cft_{max}$. Potrebno je rasporediti n poslova $J_1, J_2, \dots, J_j, \dots, J_n$, pri čemu svaki posao J_j ima redosled operacija $O_{1j}, O_{2j}, \dots, O_{ij}$, koje je potrebno obraditi na skupu mašina $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots, M_m$. Vreme obrade posla J_j operacije O_{ij} na mašini M_k predstavljeno je kao trougaoni fazi broj $fpt_{ijk} = (r_1, r_2, r_3)$, gde je r_1 - najkraće vreme obrade, r_2 - predstavlja najverovatnije vreme obrade, dok r_3 - najduže vreme obrade (poglavlje 4.4). Slično tome može se predstaviti i fazi funkcija cilja Cft_{max} koja zavisi od vremena završetka poslednje operacije O_{ij} na bilo kojoj mašini M_k , dakle $Cft_{max} = (Cft_{r1}, Cft_{r2}, Cft_{r3})$, gde je Cft_{r1} - najkraće ukupno vreme obrade prema funkciji cilja, Cft_{r2} - najverovatnije ukupno vreme obrade i Cft_{r3} - najduže ukupno vreme obrade poslednje operacije na bilo kojoj mašini. Matematički fazi model treba da ispuni sledeće uslove (Wang i sar., 2013):

- svi poslovi su nezavisni i dostupni za obradu u početnom trenutku 0,
- jedna mašina može da obradi samo jednu operaciju i jedan posao može da se obradi na samo jednoj mašini istovremeno,
- vreme transporta između različitih mašina je uključeno u vreme obrade fpt_{ijk} ,
- jednom kada se operacija pokrene, ne može se prekinuti.

Za definisanje matematičke formulacije fazi modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova korišćena je sledeća notacija (Yang i Xu, 2022), (Zhang i sar., 2023):

M - skup mašina na kojoj se vrši raspoređivanje poslova, gde je m ukupan broj mašina,

J - skup poslova, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$, gde n predstavlja ukupan broj poslova,

j - indeks koji označava posao,

k - indeks koji označava mašinu,

i - indeks koji označava operaciju nekog posla,

sd_{ijk} – početno vreme obrade operacije i posla j na mašini k ,

$fpt_{ijk} = (r_1, r_2, r_3)$ – trougaono fazi vreme obrade operacije i posla j na mašini k ,

Cft_{ij} – vreme obrade operacije i posla j ,

$Cft_{max} = (Cft_{r1}, Cft_{r2}, Cft_{r3})$ - trougaono fazi ukupno vreme obrade poslova.

Promenljiva odlučivanja u ovom slučaju mogu se definisati na sledeći način:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ako je operacija } i \text{ posla } j \text{ dodeljena mašini } k, \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

Funkcija cilja ili kriterijum optimalnosti:

$$\min Cft_{max} \quad (5.63)$$

pri čemu važe sledeća ograničenja:

$$\sum_{k=1}^m x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in J, \forall i \quad (5.64)$$

$$Cft_{max} \geq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{k=1}^m (fpt_{ijk} sd_{ijk}) x_{ijk}, \quad (5.65)$$

$$sd_{ijk} + fpt_{ijk} \leq sdf_{i+1,j,k}, \quad \forall i < n_j, \forall j, k \quad (5.66)$$

$$sd_{ijk} \geq \max \left(sd_{i-1,j,k} + fpt_{i-1,j,k}, sd_{n_j,j-1,k} + fpt_{n_j,j-1,k} \right), \forall j > 1, i, k \quad (5.67)$$

$$Cft_{ij} = sd_{ijk} + fpt_{ijk} \quad (5.68)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad sd_{ijk} + fpt_{ijk} \geq 0, \quad Cft_{max} \geq 0 \quad (5.69)$$

dodatna ograničenja - međusobno poređenje fazi brojeva:

Kriterijum 1 (K_1):

$$K_1(fpt_{ijk}) = \frac{r_1 + 2r_2 + r_3}{4}, \quad K_1(fpt_{i'j'k'}) = \frac{r_4 + 2r_5 + r_6}{4} \quad (5.70)$$

Ako je $K_1(fpt_{ijk}) > K_1(fpt_{i'j'k'}) \rightarrow$ onda je $fpt_{ijk} > fpt_{i'j'k'}$

Kriterijum 2 (K_2):

Ako je $K_1(fpt_{ijk}) = K_1(fpt_{i'j'k'})$, onda uporedi prema K_2 :

$$K_2(fpt_{ijk}) = r_2, \quad K_2(fpt_{i'j'k'}) = r_5, \quad (5.71)$$

Ako je $r_2 > r_5$, onda je $fpt_{ijk} > fpt_{i'j'k'}$

Kriterijum 3 (K_3):

Ako je $r_2 = r_5$, onda uporediti prema K_3 :

$$K_3(fpt_{ijk}) = r_3 - r_1, \quad K_3(fpt_{i'j'k'}) = r_6 - r_4, \quad (5.72)$$

Ako je $K_3(fpt_{ijk}) > K_3(fpt_{i'j'k'})$, onda je $fpt_{ijk} > fpt_{i'j'k'}$

Jednačina (5.63) predstavlja kriterijum optimalnosti odnosno ukupno fazi vreme obrade poslova. Ograničenje (5.64) definiše uslov obrade jedne operacije jednog posla na jednoj mašini u sekvetnom rasporedu poslova. Ograničenje (6.65) definiše uslov da je ukupno fazi vreme obrade veće ili jednako zbiru vremena obrade i početnih vremena. Ograničenja (5.66) i (5.67) definišu sekvencijalno izvršavanje operacija na mašini, uzimajući u obzir završetak prethodnih operacija na istoj mašini i završetak poslednje operacije prethodnog posla na bilo kojoj mašini. Ograničenja (5.68) i (5.69) definišu fazi vremena obrade i tip promenljive. Dodatna ograničenja (5.70), (5.71) i (5.72) predstavljaju

kriterijume međusobnog poređenja fazi brojeva, predstavljeni kriterijumi u obliku ograničenja detaljno su opisani i predstavljeni u poglavlju 4.4.

5.9.4.1 Primer optimizacije fazi $FFJSP_c$ modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova sa fazi vremenima obrade poslova na mašinama primenom GA algoritama

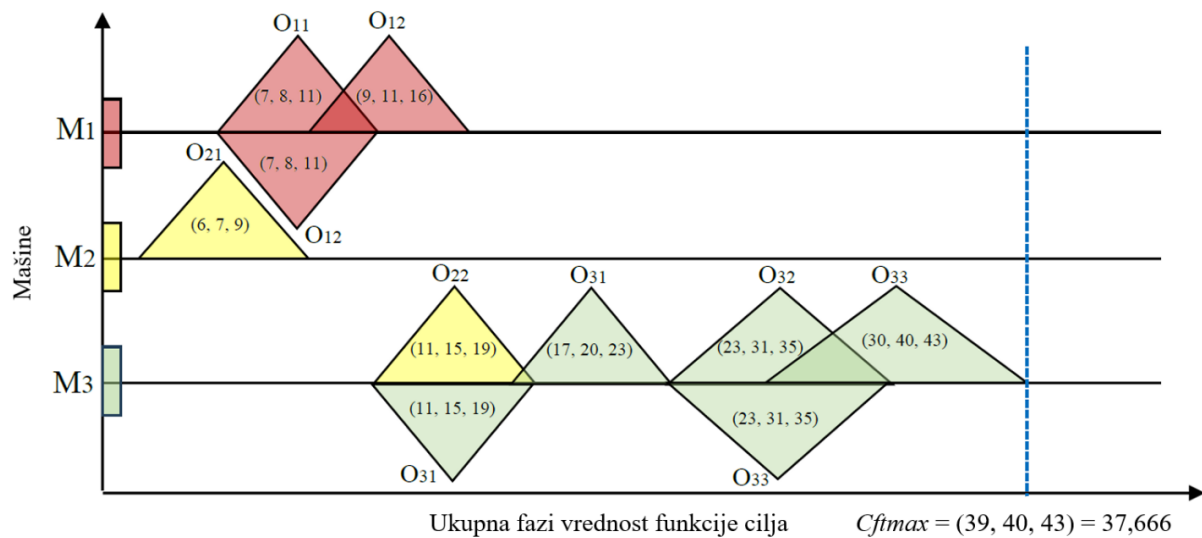
Problem fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova sa fazi vremenima obrade poslova $FFJSP_c$ predstavlja kompleksan optimizacioni problem. U fazi okruženju, vremena obrade opisuju se fazi brojevima, koji predstavljaju raspon mogućih vrednosti umesto jedne određene vrednosti. Cilj optimizacije fazi modela je pronaći raspored koji minimizuje određeni kriterijum uzimajući u obzir nesigurnost u vremenima obrade. U nastavku predstavljen je konkretan primer optimizacije fazi $FFJSP_c$ modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova sa fazi vremenima obrade poslova na mašinama, primenom GA algoritama. U tabeli 5.42 prikazani su ulazna fazi vremena obrade poslova na mašinama.

Tabela 5.42 Fazi vremena obrade poslova na mašinama fpt_{ijk}

Poslovi	Operacije	Mašine		
		M_1	M_2	M_3
J_1	O_{11}	(7, 8, 11)	(9, 11, 12)	(10, 12, 15)
	O_{21}	(2, 3, 5)	(7, 9, 10)	∞
J_2	O_{12}	(7, 8, 10)	(6, 7, 9)	(8, 11, 12)
	O_{22}	(8, 10, 12)	(6, 10, 13)	(5, 8, 10)
J_3	O_{13}	(19, 22, 24)	∞	(17, 20, 23)
	O_{23}	∞	(11, 14, 18)	(8, 11, 12)
	O_{33}	(8, 11, 14)	(5, 7, 10)	(5, 6, 8)

Na slici 5.40 u grafičkom obliku prikazan je optimalan raspored poslova i ukupno fazi vreme funkcije cilja $Cft_{max} = (30, 40, 43)$, nakon defazifikacije $Cft_{max} = 37,666$ minuta. Na osnovu grafičkog prikaza jasno se može videti raspoređivanje operacija različitih poslova na skupu mašina u okviru fazi modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova. Vreme izvršenja svake operacija predstavljeno je trougaonim fazi brojem $fpt_{ijk} = (r_1, r_2, r_3)$, čime je obuhvaćena neizvesnost u vremenu obrade. Dobijeni rezultati potvrđuju da primena fazi modela omogućava drugačije modeliranje proizvodnog procesa i donosi dodatnu vrednost u optimizaciji kroz bolju procenu vremena trajanja

poslova, što je posebno korisno u realnim uslovima proizvodnje gde su često zastupljeni periodi neizvesnosti.



Slika 5.40 Grafički prikaz rasporeda poslova i ukupna fazi vrednost funkcije cilja Cft_{max}

Poglavlje 6

PRIMENA RAZVIJENIH MODELA NA REALAN PROIZVODNI PROCES

U ovom poglavlju doktorske disertacije predstavljena je primena i validacija razvijenih računarskih modela za planiranje i raspoređivanje resursa u realnom proizvodnom procesu. Prikazana su detaljna objašnjenja implementacije modela u praktičnom industrijskom okruženju, uslovi pod kojima je izvršena primena, kao i kriterijumi koji su korišćeni za ocenu uspešnosti modela. Posebna pažnja posvećena je poređenju performansi proizvodnih procesa pre i nakon primene računarskih modela, pri čemu je urađena detaljna statistička analiza kako bi se jasno definisala preciznost i pouzdanost razvijenog modela. Takođe, u ovom delu poglavlja analizirani su izazovi koji su se javili tokom implementacije i validacije modela, kao i strategije i rešenja koja su primenjena za njihovo prevazilaženje. Dati su jasni zaključci o praktičnoj primenljivosti i prednostima upotrebe modela u realnom proizvodnom procesu, uz naglašavanje mogućnosti daljeg unapređenja na osnovu uočenih ograničenja.

Optimizacija procesa planiranja i raspoređivanja resursa i validacija razvijenih računarskih modela su suštinski aspekti za poboljšanje efikasnosti i pouzdanosti industrijskih procesa. Ovaj dvostruki fokus na optimizaciju i validaciju osigurava da razvijeni računarski modeli ne samo da doprinose teorijskom napretku, već takođe pružaju vidljive benefite kada

se primenjuju na planove proizvodnje u stvarnom svetu. Validacija modela kroz stvarne eksperimente proizvodnog okruženja, omogućava praktičnu verifikaciju efikasnosti. Ovaj integrisani pristup doprinosi stalnom unapređenju procesa proizvodnje i promovise jedan novi naučno utemeljen pristup zasnovan na naprednim tehnologijama koji je danas nezaobilazan faktor u svetu planiranja. U okviru sprovedenih istraživanja obuhvaćena je firma koja se bavi proizvodnjom različitih vrsta nameštaja na jugu Srbije, gde je i sproveden eksperiment koji je detaljno predstavljen u nastavku rada. Posmatrano preduzeće karakteriše proizvodnju različitih vrsta proizvoda, ručno upravljanje proizvodnim procesima, kao i odsustvo naprednih informacionih sistema za planiranje i raspoređivanje resursa. Procesi planiranja i organizacije proizvodnje u postojećem sistemu oslanjaju se isključivo na iskustvo zaposlenih, što kao za posledicu ima neustaljen rad proizvodnih linija i velika odstupanja od početnih zadatih ciljeva, a sve to rezultira smanjenom efikasnošću i ograničenom mogućnošću sistematskog praćenja i optimizacije toka proizvodnje. Takvo okruženje je danas u većini MSP u Srbiji a upravo zbog tih specifičnosti i izazova, prepoznato je kao pogodno preduzeće za validaciju razvijenih računarskih modela.

Konkretno, razvijani modeli su prilagođeni potrebama preduzeća kako sa stane ekonomske isplativosti tako i sa stanovišta produktivnosti. Analizirajući izazove tokom primene modela, utvrđeno je da naučni format modela nije široko društveno prihvaćen, prvenstveno zbog toga što zahteva visok nivo tehničkog znanja iz ove oblasti. Kao odgovor na ovaj izazov, biće razvijena softverska aplikacija koja omogućava jednostavan, pristupačan i intuitivan korisnički interfejs, ne zahtevajući pritom veliko tehničko predznanje korisnika. Realizacija ove aplikacije istovremeno predstavlja i peti pravac istraživanja u okviru ove doktorske disertacije.

Prvi i osnovni korak pri implementaciji i validaciji modela planiranja i raspoređivanja resursa u proizvodnim procesima jeste izbor optimalnog modela za posmatrani problem. Pri razvoju, primeni i validaciji modela potrebno je sagledati sve resurse proizvodnog procesa počevši od ciljeva proizvodnje, rasporeda mašina, vrste proizvoda, karakteristika preduzeća i sve moguće parametre koji utiču na proizvodni proces i na razvijanje računarskog modela. Prethodno u petom poglavlju doktorske disertacije razvijeni su različiti modeli planiranja i raspoređivanja resursa i svaki model se može primeniti u zavisnosti od tipa proizvodnje. Razvijani modeli zasnovani su na savremenim naučnim metodama kao što su veštačka inteligencija i stohastički procesi i kao takvi igraju ključnu ulogu u rešavanju složenih problema i optimizaciji procesa planiranja i raspoređivanja resursa. Primena razvijenih modela ima za cilj povećanje konkurentnosti MSP kao i sprovođenje naprednih metoda koje

omogućavaju preduzećima da se prilagode dinamičnim promenama na tržištu. Ovo je ključno ne samo da bi se održala konkurentska prednost, već i da bi preduzeća postala fleksibilnija i sposobnija da reaguju na neočekivane događaje. Razvijeni računarski modeli predstavljaju moćan alat za optimizaciju i efikasno upravljanje resursima čime se utiče na smanjenje nepotrebnih troškova, povećanje efikasnosti proizvodnje i poboljšanje ukupne finansijske performanse preduzeća. Ovo ne samo da poboljšava kvalitet procesa planiranja i raspoređivanja resursa već i povećava zadovoljstvo korisnika, što je neophodno za izgradnju poverenja i sticanje konkurentске prednosti. Sposobnost naprednih naučnih metoda da analiziraju, predviđaju i optimizuju procese čini ih neophodnim alatom za kompanije koje traže uspeh, efikasnost i prilagodljivost u dinamičnom poslovnom okruženju.

6.1 STUDIJA SLUČAJA: OPTIMIZACIJA PROCESA PLANIRANJA I RASPOREĐIVANJA PROIZVODNIH RESURSA NA PRIMERU PREDUZEĆA „DN COMPANY“ SRBIJA

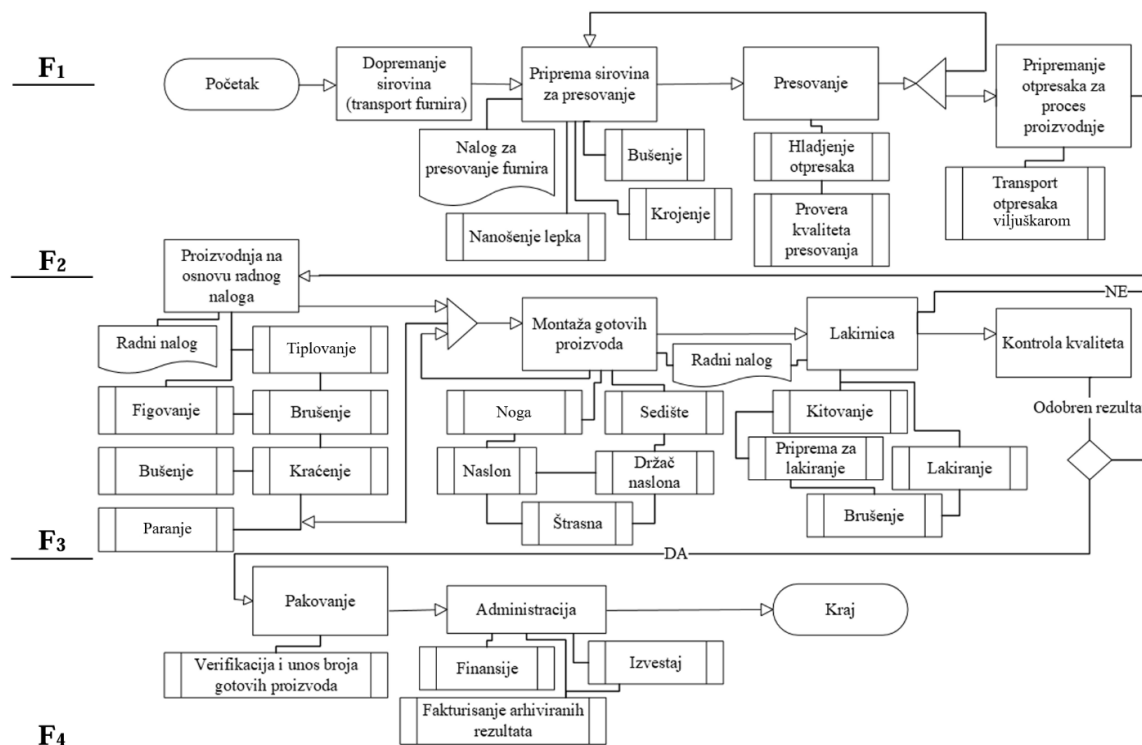
Studija slučaja obuhvata optimizaciju procesa planiranja i raspoređivanja proizvodnih resursa na primeru preduzeća „DN Company“ iz Vladičinog Hana, koje se bavi proizvodnjom različitih vrsta nameštaja (delatnost - 1621 - Proizvodnja furnira i ploča od drveta). Preduzeće poseduje mašine koje mogu da obavljaju različite vrste poslova u unapred određenom vremenskom okviru. Prema podacima Agencije za privredne registre Republike Srbije kompanija se svrstava u kategoriju malih preduzeća. Ima 104 zaposlenih i ostvaruje godišnji prihod od 289.582.000,00 dinara (Agencije za privredne registre Republike Srbije).

Na samom početku potrebno je uraditi detaljnu analizu proizvodnog procesa i upoznati se sa procesom rada kako bi se adekvatno implementirao odgovarajući model u proces proizvodnje. Kao prvi korak nameće se analiza procesa proizvodnje primenom SIPOC modela (*eng. Supplier – Input – Process – Output – Customer - SIPOC*). SIPOC model je strukturirani alat koji se koristi u poboljšanju i analizi poslovnih procesa (Meier i sar., 2023). Često se prikazuje kao tabela ili dijagram protoka i koristan je za definisanje i razumevanje različitih elemenata procesa ili sistema. U nastavku rada predstavljene su osnove komponente SIPOC modela orijentisane prema pravcu istraživanja.

Mapiranje ulaznih komponenti, primenom SIPOC modela, omogućava praktičan uvid u procese rada i razumevanje celokupnog proizvodnog sistema. Na ovaj način se identifikuju potencijalne kritične tačke koje imaju mogućnost za poboljšanje. Generalnom analizom procesa u proizvodnim kompanijama u Republici Srbiji (poglavlje 1.2) zaključeno je da sistem planiranja i raspoređivanja resursa u današnjim MSP u većini slučaja funkcioniše i sprovodi se

na osnovu iskustva odgovornog lica za planiranje resursa. Slično i u razmatranoj kompaniji “DN Company” planiranje i raspoređivanje proizvodnih resursa se trenutno obavlja na osnovu iskustva radnika zaduženih za planiranje resursa.

Detaljnom analizom preduzeća izdvojene su četiri ključne faze koje su važne za posmatrano proizvodno preduzeće i to: **F₁**: Pogon presovanja, **F₂**: Pogon proizvodnje, **F₃**: Pogon lakiranja, **F₄**: Pogon pakovanja. Nabrojane faze detaljno su grafički prikazane na slici 6.1.



Slika 6.1 Dijagram toka procesa proizvodnje nameštaja sa jasno definisanim fazama i aktivnostima

Na slici je predstavljen dijagram toka proizvodnog procesa u preduzeću za proizvodnju nameštaja. Proces je podeljen u četiri glavne faze (F₁, F₂, F₃ i F₄):

- Faza F₁ (Priprema sirovina): Obuhvata transport i pripremu sirovina (furnira), presovanje, hlađenje otpresaka, proveru kvaliteta i transport otpresaka do proizvodnje;
- Faza F₂ (Proizvodnja): Obuhvata proizvodne aktivnosti poput tiplovanja (spajanje drvenih elemenata drvenim čepovima), fugovanja (ispuna praznina nastalih spajanjem montiranih elemenata), brušenja, bušenja, kraćenja i parenja (tretman vodenom parom na visokim temperaturama), zatim sledi montaža finalnog proizvoda iz osnovnih sastavnih elemenata (nosećih elemenata (noge), naslona i njegovih držača, sedišta i pomoćnih funkcionalnih elemenata koji doprinose stabilnosti i čvrstoći (štrasne));

- Faza F_3 (Finalna obrada): podrazumeva kontinualnu ispunu drvene strukture (lepljenje ili kitovanje), brušenje, pripremu za lakiranje i samo lakiranje kao i završnu kontrolu kvaliteta. Ukoliko proizvod ne zadovolji zadate kriterijume kontrole kvaliteta vraća se na mehaničku ili finalnu hemijsku doradu (lakiranje);
- Faza F_4 (Pakovanje i administracija): Nakon izvršene kontrole kvaliteta, sledi pakovanje proizvoda, administracija (finansijsko knjigovodstvena evidencija proizvoda) i otpremanje proizvoda u skladište gotovih proizvoda, čime se proizvodni proces završava.

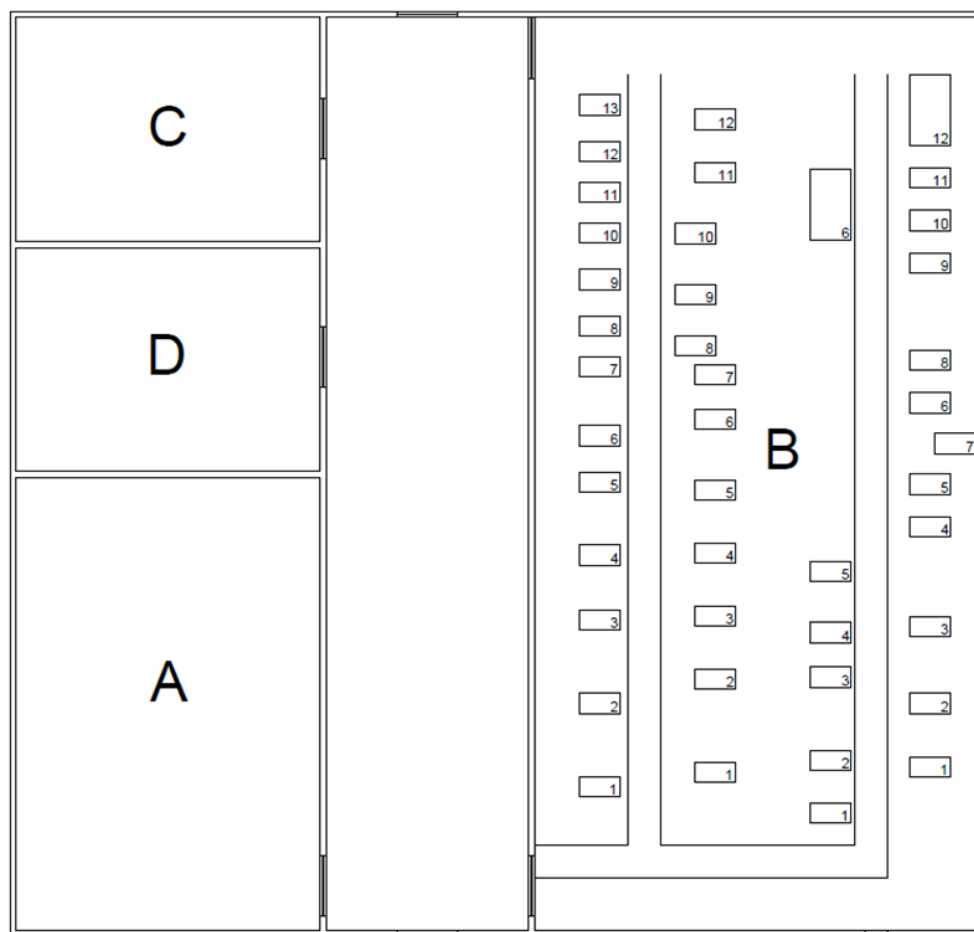
Dijagram toka jasno prikazuje interakcije između procesa, tok materijala i kontrolne tačke kvaliteta u procesu proizvodnje nameštaja. U nastavku u tabeli 6.1 predstavljen je izveštaj i analiza posmatranog preduzeća prema ulaznim komponentama SIPOC modela.

Tabela 6.1 SIPOC model: Analiza proizvodnog procesa

SIPOC model: Analiza proizvodnog procesa		
S (<i>eng. Supplier</i>)	Isporučilac	Isporučioci proizvoda: • Sopstvene zalihe, Ko pokreće proces: • Šef proizvodnje, Ko su isporučio podataka i dokumenata: • Magacin, • Montaža.
I (<i>eng. Input</i>)	Ulaz	Ulazna dokumenta: • Nalog za proizvodnju, Proizvodi na ulazu: • Furnir, • Lepak, • Repro material. Informacije na ulazu: • Tip i vrsta proizvoda.
P (<i>eng. Process</i>)	Proces	Proces proizvodnje sastoji se iz mnogobrojnih aktivnosti i detaljno je predstavljen na karti procesa na slici 6.1.
O (<i>eng. Output</i>)	Izlaz	Izlaz iz procesa: • Gotov proizvod (različite vrste stolica, noge stolova, sedišta i drugo...). Dokumenta: • Knjiga rezultata, • Finansijski izveštaj, • Lista proizvedenih i gotovih proizvoda na osnovi zadatih ciljeva.

C (eng. Customer)	Kupac	• Holsak Kanada, • Masset Tokio, • Slovenijales Ljubljana, • Startimpeks Beograd, •,
-------------------	-------	---

Na slici 6.2 prikazan je grafički raspored (eng. layout) proizvodnog pogona analiziranog preduzeća. Na slici su jasno prikazane pozicije pojedinačnih proizvodnih mašina, kao i raspored različitih pogona unutar proizvodnog prostora.



LEGENDA

A	Pogon presovanja
B	Pogon proizvodnje
C	Pogon za lakiranje
D	Pogon pakovanja

Slika 6.2 Grafički prikaz rasporeda pogona posmatranog preduzeća

Na osnovu slike jasno se može videti da posmatrani proizvodni proces u pogonu B (pogon proizvodnje) se sastoji od $M = 13$ mašina u prvom redu, $M = 12$ mašina u drugom

redu, $M = 6$ mašina u trećem redu i $M = 12$ mašina u četvrtom redu. Treba napomenuti da za svaki posao se razlikuje i broj mašina koje imaju mogućnost da izvrše operaciju tog posla. Na slici 6.3 predstavljen je grafički prikaz jednog dela posmaranog proizvodnog procesa.



Slika 6.3 Posmatrani proizvodni proces preduzeća nameštaja u Republici Srbiji

Na osnovu ulaznih parametara i zahteva proizvodnje, utvrđenih kroz detaljnu analizu proizvodnog procesa, kao i zahteva srednjeg dela menadžmenta za optimizacijom procesa i dodelu prioriteta poslovima, predložen je model fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova koji je detaljno predstavljen u poglavlju 5.2.3.

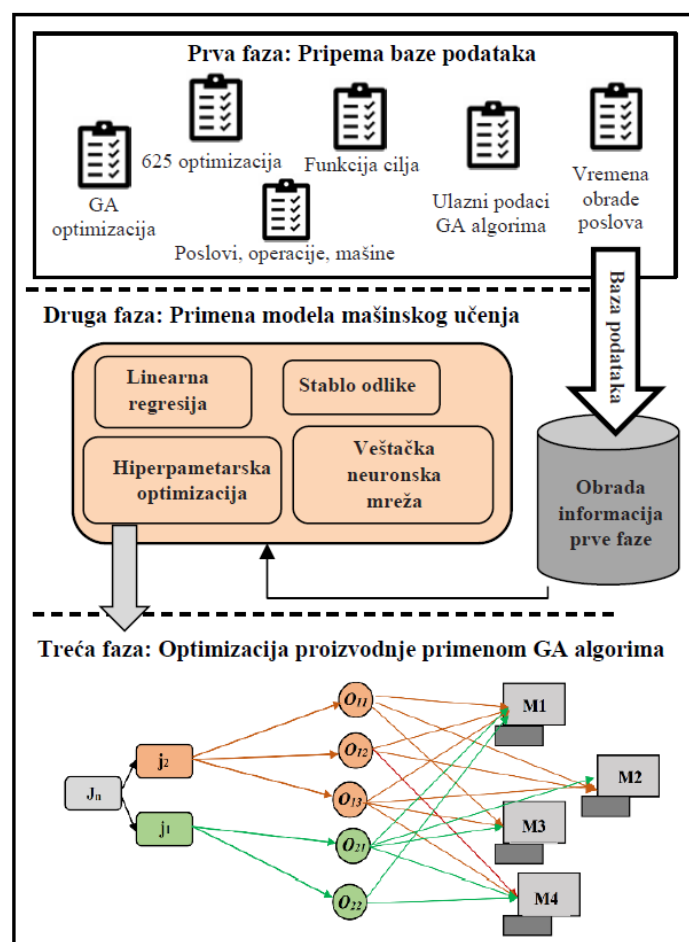
U nastavku, pristupa se detaljnoj analizi svih relevantnih parametara koji imaju značajan uticaj na efikasnost proizvodnog procesa, kao i sprovođenju optimizacije u okviru proizvodnog pogona. Međutim pre same implementacije i razvoja karakterističnog modela prema tipu proizvodnje i optimizacije, vrši se izbor odgovarajuće metode sa ciljem postizanja optimalnih rezultata prilikom primene predloženog modela.

6.1.1 Primena hibridnog pristupa zasnovanog na mašinskom učenju i odabiru optimalnih parametara metode za rešavanje $FJSP_c$

Primena hibridnog pristupa zasnovanog na mašinskom učenju za izbor optimalnih parametara metode pri rešavanju problema fleksibilnog raspoređivanja proizvodnih poslova $FJSP_c$ značajno povećava pouzdanost predloženog modela, kao i efikasnost primenjene metode za optimizaciju proizvodnog procesa. U prethodnom poglavlju (poglavlje 5) detaljno su analizirani razvijeni modeli i algoritmi korišćeni u procesu optimizacije, pri čemu je poseban akcenat stavljen na GA, čiji su rezultati pokazali najveću efikasnost i najbolje performanse u rešavanju analiziranog optimizacionog problema. Testiranje različitih metaheurističkih algoritama na raznovrsnim primerima, kako u

kontekstu razvoja ANFIS sistema, tako i na osnovu rezultata optimizacije, nedvosmisleno je pokazano da su performanse GA superiorne u odnosu na druge metaheurističke algoritme. S toga je, GA algoritam izabran kao preferirani algoritam za optimizaciju procesa planiranja i raspoređivanja resursa u razmatranoj kompaniji.

U nastavku, predstavljen je hibridni pristup koji uključuje selekciju optimalnih parametara GA algoritma i predikciju ciljne funkcije primenom modela mašinskog učenja (Stanković i sar., 2025). Ovaj pristup omogućava optimizaciju procesa proizvodnje kombinovanjem prednosti GA algoritma sa sposobnostima modela mašinskog učenja u analizi i predikciji kompleksnih sistema. Na slici 6.4 predstavljen je grafički prikaz hibridnog pristupa zasnovanog na mašinskom učenju i odabiru optimalnih parametara GA metode za rešavanje $FJSP_c$ (Stanković i sar., 2025).



Slika 6.4 Grafički prikaz predloženog hibridnog pristupa

Konačni cilj prikazanog hibridnog pristupa jeste izbor optimalnih parametara i predikovanje optimalne funkcije cilja Ct_{max} korišćenjem modela mašinskog učenja. Ideja implementacije sastoji se od tri faze koje su povezane u jedan inteligentni sistem planiranja.

Prva faza se sastoji od formiranja baze podataka (urađeno je 625 optimizacija za posmatrani problem), druga faza obuhvata primenu modela mašinskog učenja korišćenjem prethodno formirane baze podataka (izbor optimalnih parametara i predviđanje funkcije cilja), treća faza koristi preporučene parametre iz druge faze i vrši optimizaciju izlaznog procesa (Stanković i sar., 2025).

Prva faza se sastoji od prikupljanja podataka i formiranja adekvatne baze podataka, koja predstavlja ulaznu datoteku za proces mašinskog učenja. Polazna pretpostavka je da se primenom alata mašinskog učenja može predvideti optimalna funkcija cilja. Za kreiranje baze ulaznih podataka analizirani su sledeći parametri GA algoritma: broj iteracija - *Iter*, veličina populacije - *Pop*, stopa mutacije - *Mu* i stopa ukrštanja - *Cross*, dok parametar izlazne optimizacije predstavlja vreme ciljne funkcije Ct_{max} . Svi navedeni parametri predstavljaju ulazne parametre za podešavanje GA i imaju direktan uticaj na dobijenu funkciju cilja. Eksperiment se sastojao od 625 kombinacija za rešavanje $FJSP_c$ modela, što je omogućilo detaljnu analizu performansi različitih pristupa i optimizacionih tehnika u ovom kompleksnom scenariju. Nakon kreiranja različitih kombinacija ulaznih parametara GA algoritma i izvršene optimizacije postavljenog problema, dobijena je ciljna funkcija Ct_{max} za svaku prethodno kreiranu kombinaciju pojedinačno. Primenjeni modeli mašinskog učenja: linearna regresija, stablo odluke, hiperparametarska optimizacija, veštačka neuronska mreža koriste iste ulazne parametre iz posmatranog eksperimenta kako bi se omogućilo direktno poređenje performansi svakog modela na osnovu dobijenih rezultata. Zbog veličine ulaznih podataka, u tabeli 6.2 prikazani su samo osnovni parametri prve faze posmatranog eksperimenta dobijenih procesom optimizacije primenom GA algoritma (Stanković i sar., 2025).

Tabela 6.2 Dobijeni rezultati GA optimizacije u prvoj fazi opisanog modela

GA parametri: eksperiment se sastojao od 625 kombinacija						
Eksperiment	<i>Iter</i>	<i>Pop</i>	<i>Mu</i>	<i>Cross</i>	Ct_{max}	<i>CPU</i>
1	100.00	287.50	0.01	0.90	251.00	21
2	100.00	287.50	0.03	0.10	268.00	22
...	...	...	...	...	...	...
29	100.00	287.50	0.03	0.30	256.00	21
83	100.00	762.50	0.10	0.10	253.00	59
219	1325.00	762.50	0.08	0.30	250.00	14:29
	2550.00	525.00	0.06	0.70	251.00	17:50
...	...	...	...	...	...	...
317	2550.00	525.00	0.06	0.90	250.00	17:51
318	2550.00	525.00	0.08	0.10	254.00	17:50
...	...	...	...	...	...	...
348	2550.00	1000.00	0.01	0.10	251.00	32:41

354	2550.00	1000.00	0.01	0.30	250.00	32:45
434	3775.00	525.00	0.01	0.30	251.00	30:13
595	5000.00	762.50	0.08	0.50	250.00	52:41
596	5000.00	762.50	0.08	0.70	250.00	52:45
...	...	...	...	...	...	...
625	5000.00	1000.00	0.10	0.90	250.00	01:08:29

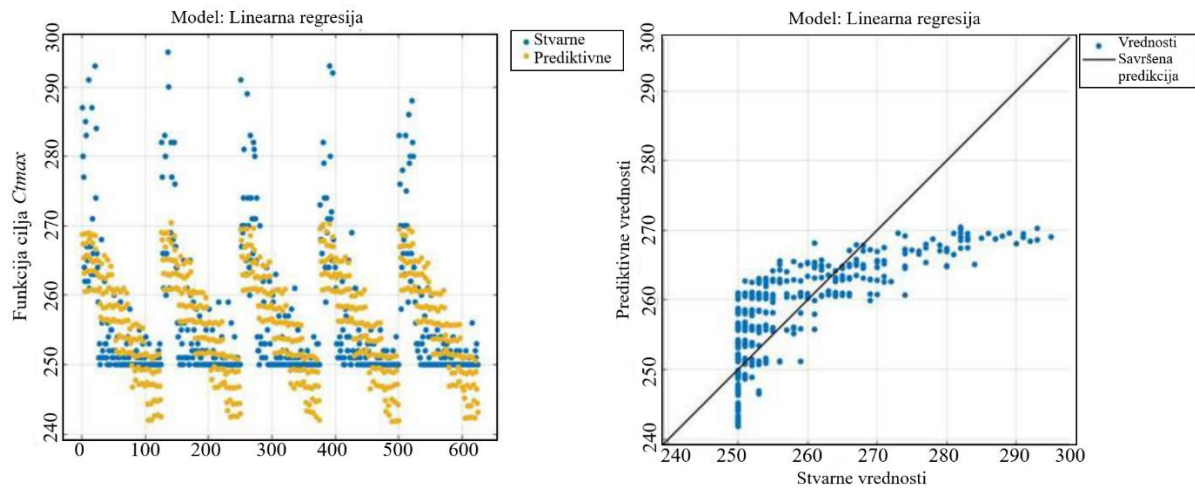
Druga faza obuhvata primenu alata mašinskog učenja i procenu optimalnih parametara GA algoritma pri optimizaciji, sa ciljem dobijanja optimalne funkcije cilja za posmatrani proizvodni pogon. Korišćenjem mašinskog učenja, prilagođeni su parametri GA kako bi se osigurala maksimalna efikasnost u rešavanju kompleksnih proizvodnih problema, što rezultira optimalnim planiranjem i raspodelom resursa unutar proizvodnog procesa. Korišćenjem modela mašinskog učenja uočeno je da promena određenih ulaznih parametara optimizacije u velikoj meri utiče na posmatrane rezultate u vidu ciljne funkcije. Nakon primene modela mašinskog učenja, dobijeni rezultati predstavljeni su u tabeli 6.3 (Stanković i sar., 2025).

Tabela 6.3 Performanse modela mašinskog učenja za GA algoritam

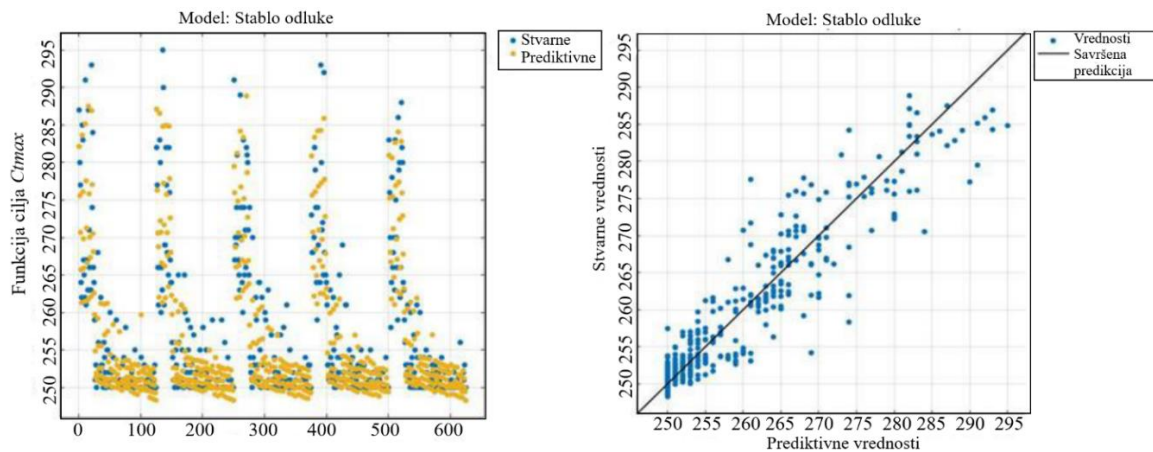
Modeli mašinskog učenja	<i>RMSE</i>	<i>R</i> ²	<i>MSE</i>	<i>MAE</i>	Vreme treninga (obs/sec)	Brzina predikovanja (sec)
Linearna regresija						
Linear	6.3075	0.56	39.784	4.8834	8600	3.5044
Interactions Linear	6.0333	0.60	36.397	4.7469	25000	0.81832
Robust Linear	6.8287	0.48	46.632	4.6294	33000	0.99373
Stepwise Linear	5.9337	0.61	35.208	4.6989	30000	2.6377
Stablo odluke						
Fine Tree	3.0599	0.90	9.3632	1.7033	24000	1.908
Medium Tree	3.0266	0.90	9.1565	1.7137	41000	0.6388
Coarse Tree	3.6627	0.85	13.416	2.0709	35000	0.48872
Hiperparametarska optimizacija						
Bayesian optimization	2.9139	0.91	8.4906	1.6446	40000	27.318
Grid Search	2.9144	0.91	8.4936	1.6455	40000	5.5273
Veštačka neuronska mreža						
Narrow Neural Network	3.0672	0.90	9.4078	1.8677	20000	3.1412
Medium Neural Network	3.0347	0.90	9.2095	1.7405	38000	7.1834
Wide Neural Network	2.9003	0.91	8.4118	1.6487	41000	9.1775
Bilayered Neural Network	3.1383	0.89	9.8492	1.7667	38000	4.2292
Trilayered Neural Network	3.1473	0.89	9.9057	1.7738	34000	5.8144

Kao što se može videti u tabeli 6.3 primenjeno je više modela mašinskog učenja kako bi se došlo do što boljih i verodostojnih rezultata pri predlaganju optimalnog modela za

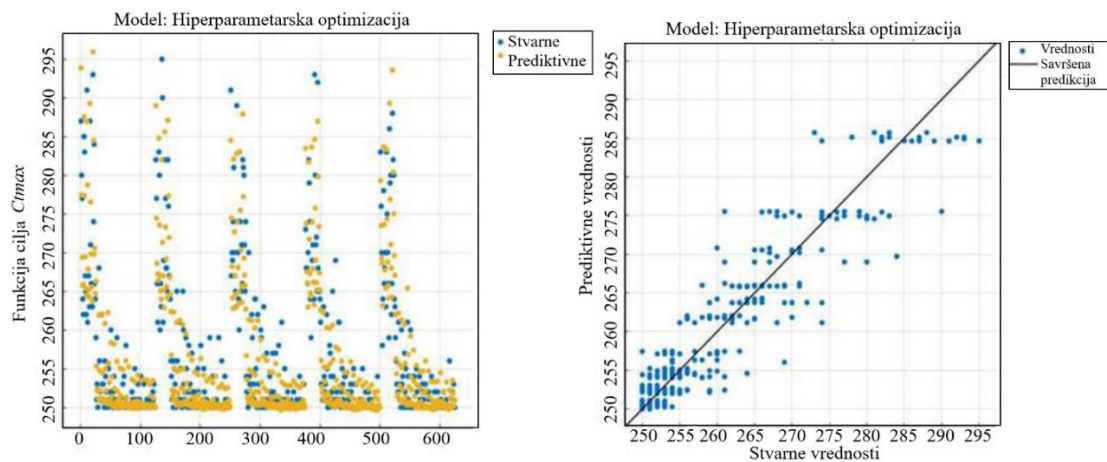
narednu fazu istraživanja. Nakon primene modela mašinskog učenja, rezultati su grafički predstavljeni na slikama 6.5, 6.6, 6.7 i 6.8. Potrebno je napomenuti da je prikazan samo jedan model sa najboljim performansama iz posmatrane grupe modela mašinskog učenja.



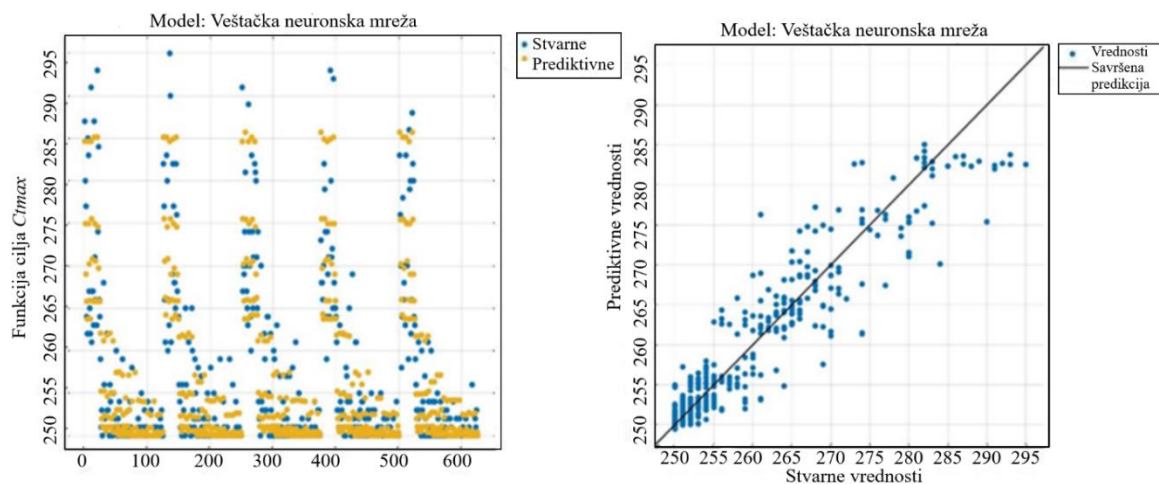
Slika 6.5 Grafički prikaz dobijenih rezultata korišćenjem modela linearne regresije



Slika 6.6 Grafički prikaz dobijenih rezultata korišćenjem modela stablo odluke

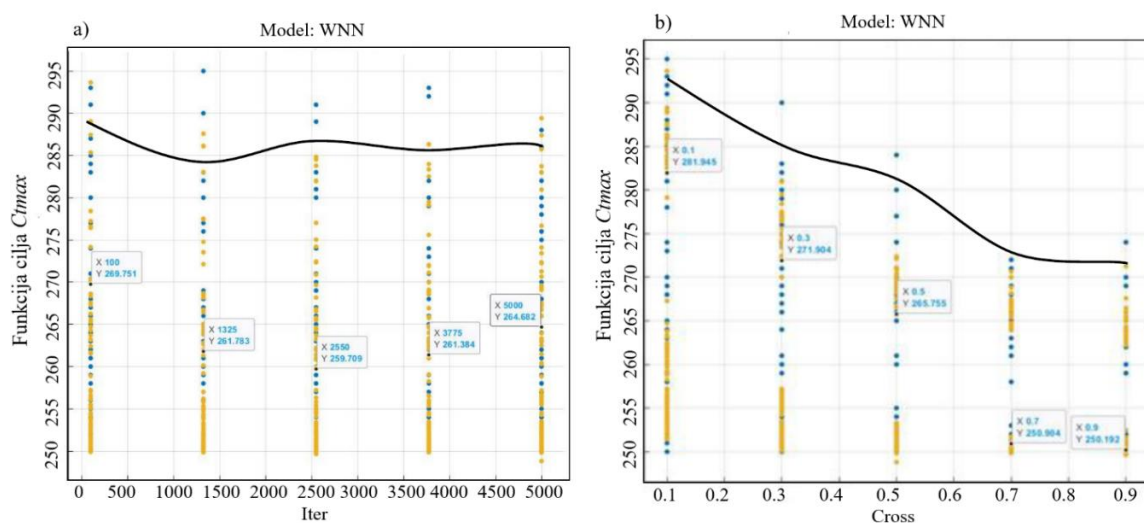


Slika 6.7 Grafički prikaz dobijenih rezultata korišćenjem modela Bajesove optimizacije

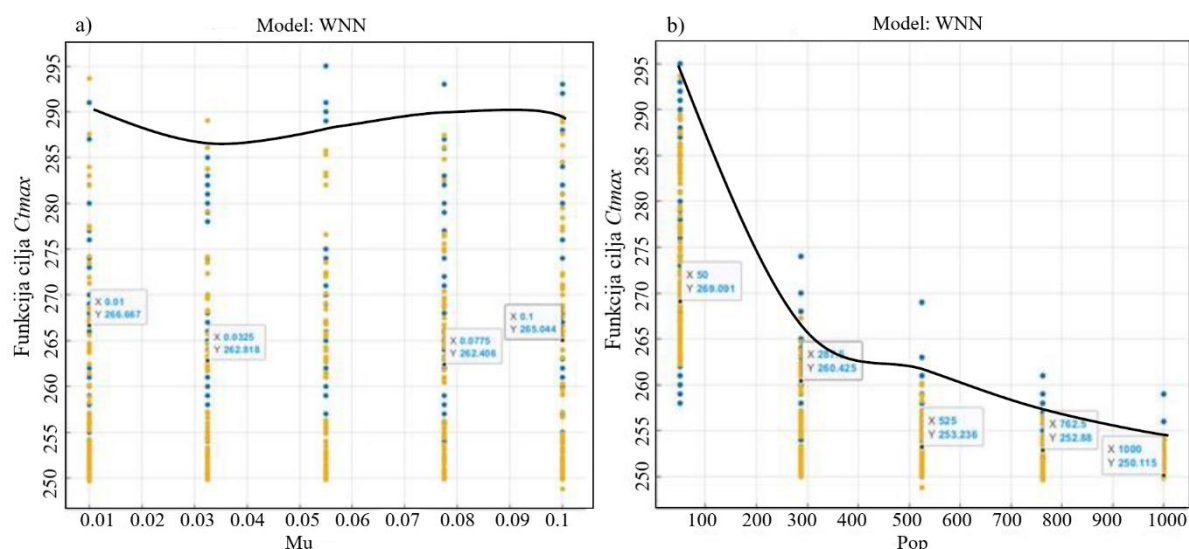


Slika 6.8 Grafički prikaz dobijenih rezultata korišćenjem modela veštačke neuronske mreže

Na osnovu dobijenih rezultata u drugoj fazi istraživanja, model (*eng. Wide Neural Network - WNN*) se nameće kao optimalno sredstvo za analizu. WNN je vrsta neuronske mreže koja ima veći broj neurona u pojedinačnim slojevima u poređenju sa standardnim neuronskim mrežama. Ova vrsta mreže je sposobna da nauči složene obrasce i veze između podataka, što je posebno korisno kada su podaci visokodimenzionalni ili kada postoje neke nepravilnosti u podacima. Rezultati ukazuju na visoku preciznost modela u predviđanju metrika performansi kao što su: $RMSE$: 2,9033, R^2 : 0,91, MSE : 8,4118, MAE : 1,6487. Utvrđeno je da WNN model pokazuje superiorne performanse u poređenju sa drugim modelima. Grafički rezultati i uticaj ulaznih parametara GA na posmatranu ciljnu funkciju Ct_{max} , dobijeni modelom WNN sa stopom tačnosti od 91%, grafički su predstavljeni na slikama 6.9 a-b. Izvedeni zaključci su proizvod WNN modela, naglašavajući važnost i relevantnost ovog modela u analizi rezultata.



Slika 6.9 a) Uticaj broja iteracija $Iter$ na vrednost funkcije cilja Ct_{max} , b) Uticaj parametra ukrstanja $Cross$ na vrednost funkcije cilja Ct_{max}



Slika 6.10 a) Uticaj stope mutacije μ na vrednost funkcije cilja Ct_{max}

b) Uticaj veličine populacije Pop na vrednost funkcije cilja Ct_{max}

Na osnovu grafičkih slika može se zaključiti da parametri GA koji imaju najveći uticaj na funkciju cilja su veličina populacije - Pop i proces ukrštanja - $Cross$. Grafička analiza dodatno potvrđuje ovu pouzdanost, pri čemu plava boja na grafikonima označava stvarne vrednosti funkcije cilja Ct_{max} , dok žute tačke predstavljaju predviđene vrednosti Ct_{max} . Ovi rezultati pružaju dublji uvid u proces optimizacije i potvrđuju efikasnost WNN modela u analizi složenih podataka i predviđanju ciljnih funkcija. U narednom koraku izvršena je statistička analiza ulaznih parametara optimizacije GA kako bi se dodatno verifikovali rezultati iz prethodnog koraka dobijeni WNN modelom. Da bi se dobile statističke vrednosti ovih uticaja, izvršena je regresiona analiza primenom polinoma drugog reda koji uključuje model interakcija parametara, čime je omogućena detaljnija procena zajedničkih efekata posmatranih ulaznih veličina, što se može videti u tabeli 6.4 (Stanković i sar., 2025).

Tabela 6.4 Uticaj ulaznih parametara GA na funkciju cilja Ct_{max}

Ulazni parametri	Vrednost	Standarna greška	$Pr > t $	Donja granica (95%)	Gornja granica (95%)
Model	250.815	1.245	<0.0001	248.329	253.300
$Iter$	-0.759	0.508	0.140	-1.774	0.255
Pop	-12.296	0.508	<0.0001	-13.311	-11.282
μ	0.426	0.508	0.405	-0.589	1.441
$Cross$	-5.241	0.508	<0.0001	-6.255	-4.226
$Iter \cdot Iter$	0.093	0.880	0.917	-1.665	1.850
$Iter \cdot Pop$	0.417	0.622	0.506	-0.826	1.659
$Iter \cdot \mu$	-0.667	0.622	0.288	-1.909	0.576

<i>Iter · Cross</i>	0.861	0.622	0.171	-0.382	2.104
<i>Pop · Pop</i>	10.148	0.880	<0.0001	8.391	11.906
<i>Pop · Mu</i>	-0.028	0.622	0.965	-1.271	1.215
<i>Pop · Cross</i>	5.194	0.622	<0.0001	3.952	6.437
<i>Mu · Mu</i>	2.204	0.880	0.015	0.446	3.961
<i>Mu · Cross</i>	-0.111	0.622	0.859	-1.354	1.132
<i>Cross · Cross</i>	1.093	0.880	0.219	-0.665	2.850

Analiza koeficijenta regresije daje uvid u uticaj različitih faktora i njihove interakcije na zavisnu promenljivu Ct_{max} . Prema regresionom polinomu drugog reda sa modelom interakcija parametara *Pop* ima statistički značajan negativan uticaj na zavisnu promenljivu, što ukazuje da povećanje vrednosti *Pop* dovodi do smanjenja vrednosti zavisne promenljive ili funkcije cilja Ct_{max} . Parametar *Cross* takođe pokazuje statistički značajan negativan uticaj na zavisnu promenljivu Ct_{max} . Parametar *Mu* nije pokazao statistički značajan uticaj na zavisnu promenljivu Ct_{max} . Ovo može sugerisati da promene u stopi mutacija ne utiču značajno na ishod. Parametar *Iter* takođe nije pokazao statistički značajan uticaj na vrednost funkcije cilja. Ovo može ukazivati na to da promene u broju iteracija ne dovode do značajnih promena vrednosti funkcije cilja.

Treća faza predstavlja optimizaciju razmatranog procesa primenom modela fleksibilnog planiranja $FJSP_c$. Treća faza istraživanja ima za cilj da maksimizira proizvodnu produktivnost uz najmanju količinu vremena potrebnog za obavljanje svih zadataka. Za potrebe optimizacije procesa planiranja i raspoređivanja resursa korišćeni su preporučeni ulazni parametri GA algoritma, dobijeni primenom WNN modela, prikazani u tabeli 6.5 (Stanković i sar., 2025).

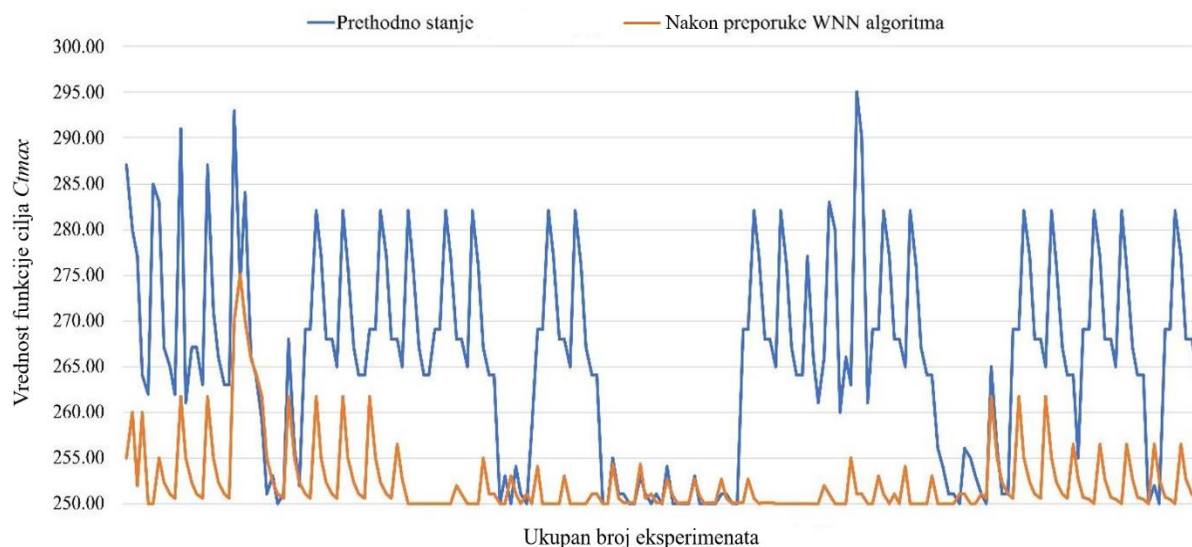
Tabela 6.5 Preporučeni ulazni parametri optimizacije primenom WNN modela za GA

Preporučeni ulazni optimizacioni parametri GA			
<i>Pop</i>	<i>Cross</i>	M_u	<i>Iter</i>
762 ~ 1000	0.50 ~ 0.90	0.03 ~ 0.06	500 ~ 1000

U nastavku, na slici 6.11 prikazani su grafički rezultati dobijeni optimizacijom GA algoritma prema preporukama ulaznih parametara WNN algoritma (Stanković i sar., 2025).

Plava linija ("Prethodno stanje") predstavlja vrednosti funkcije cilja Ct_{max} dobijene kada su ulazni parametri optimizacije birani nasumično, bez konkretnih smernica. Ovakav pristup rezultira većim varijacijama i višim vrednostima Ct_{max} , što ukazuje na manje efikasna rešenja.

Narandžasta linija ("Nakon preporuke WNN algoritma") prikazuje rezultate optimizacije kada su ulazni parametri određeni na osnovu preporuka WNN modela.

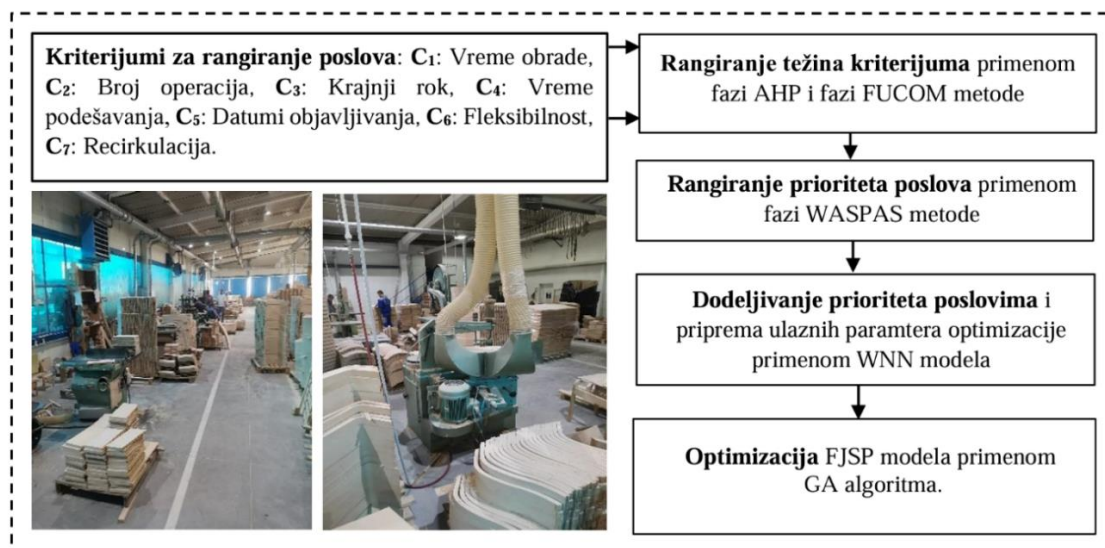


Slika 6.11 Grafički prikaz vrednosti funkcije cilja ($C_{t_{max}}$) prethodnog stanja proizvodnje i nakon preporuke WNN algoritma primenom GA

Rezultati potvrđuju da primena WNN modela može značajno poboljšati efikasnost GA optimizacije, omogućavajući niže vrednosti $C_{t_{max}}$ i smanjenje vremena u procesu optimizacije.

6.1.2 Optimizacija raspodele resursa primenom determinističkog $FJSP_c$ modela sa pravilima prioritetne odluke zasnovanih na fazi MCDM pristupu

U preduzeću za proizvodnju različitih vrsta nameštaja „DN Company“ na osnovu analize proizvodnog procesa utvrđeno je da se prioritet poslova određuje na osnovu radnog iskustva. Ideja je da se primeni naučni pristup za određivanje prioriteta poslova i sprovede optimizacija kako bi se odredio optimalan sekventni raspored poslova na skupu mašina. Primenom fazi MCDM metodologije za određivanje prioriteta poslova i određivanje pravilnog sekventnog rasporeda poslova na skupu mašina koristeći GA, očekuju se značajne koristi u smislu efikasnosti proizvodnog procesa. Garancija pravovremene isporuke proizvoda drugim kompanijama prilikom naručivanja proizvoda predstavlja veliku konkurentsku prednost i ključni faktor u očuvanju poverenja i lojalnosti poslovnih partnera. Ovaj model omogućava efikasnije upravljanje proizvodnim procesima, smanjuje kašnjenja i optimizuje korišćenje resursa, što dovodi do značajnih poboljšanja u poslovanju. Na slici 6.12 prikazan je osnovni koncept naučne zamisli posmatrane studije slučaja na konkretnom primeru u posmatranom preduzeću (Stanković i sar., 2025).



Slika 6.12 Osnovi koncept i šemtski prikaz implementacije predstavljene metodologije

Postrojenje preduzeća se sastoji od nekoliko različitih pogona od kojih je jedan od najvažnijih proizvodni pogon. U procesu proizvodnje furnira koristi sopstvenu sirovinu, koja predstavlja osnovnu bazu za dalji razvoj i izradu gotovih proizvoda u okviru proizvodnje nameštaja. U saradnji sa timom koji radi u proizvodnom pogonu, u kompaniji za proizvodnju nameštaja, sagledani su svi faktori koji direktno i indirektno utiču na proizvodni pogon, dok je u narednom koraku formiran tim menadžera i inženjera zaduženih za implementaciju predložene metodologije. Osnovni zadatak pomenutog tima je formiranje baze podataka i formiranje ključnih kriterijuma koji su ujedno i karakteristike svakog posla i imaju direktan uticaj na proces proizvodnje. Kroz detaljnu analizu proizvodnog sistema identifikovani su kriterijumi od suštinskog značaja za rangiranje poslova u procesu planiranja i raspoređivanja resursa. Detaljan opis navedenih kriterijuma, kao i metodološki postupak određivanja prioriteta poslova primenom fazi MCDM metode, predstavljen je u poglavlju 5.2.3. Neophodno je naglasiti da su svi ulazni podaci korišćeni u procesu rangiranja i optimizacije prikazani u tabelama 5.8, 5.9 i 5.10 (poglavlje 5.2.3), a preuzeti su iz autorskog rada (Stanković i sar., 2025). Važno je istaći da su u pomenutom radu korišćeni autentični, realni podaci dobijeni iz proizvodnog pogona preduzeća. Shodno tome, u nastavku procesa optimizacije koristiće se rezultati predstavljeni u poglavlju 5.2.3, kao validna osnova za dalju analizu i donošenje operativnih odluka. U narednoj tabeli 6.6 predstavljeni su rezultati rangiranih poslova primenom fazi WASPAS metode koji služe kao ulazni parametri optimizacije rangiranih poslova.

Tabela 6.6 Rangiranje poslova prema prioritetu izvršavanja FWASPAS

Fazi WASPAS												
J_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Rang	3	7	6	4	8	2	1	5	10	9	12	11

Prioriteti posla se dodeljuju kao težinski koeficijenti svakom poslu i deo su ulaznih parametara za proces optimizacije. U tabeli 6.7 predstavljeni su težinski koeficijenti poslova, dobijeni na osnovu rangiranja poslova, kao i vremena obrade poslova za svaku mašinu pojedinačno. Ukupna vremena obrade poslova na mašinama dobijena su merenjem i zaokruživanjem na celobrojnu vrednost (deterministički pristup) za svaku operaciju pojedinačno (Stanković i sar., 2025). Oznaka „-“ u tabeli 6.7 označava da operacija ne može da se obradi na toj mašini, npr posao J_2 sa operacijom O_{12} ne može se izvršiti na mašini M_3 .

Tabela 6.7 Prioritetni poslovi i vremena obrade determinističkog $FJSP_c$ modela

Težinski koeficijent posla ($0 \div 1$)	J_n	O_{ij}	Vremena obrade poslova na mašinama							
			M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
0.818	J_1	O_{11}	6.956	1.674	2.567	2.987	6.578	-	7.234	-
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{71}	5.456	3.353	5.765	5.123	3.492	2.457	7.353	-
		O_{81}	4.564	-	10.435	11.102	-	5.564	7.346	5.674
0.455	J_2	O_{12}	3.036	3.192	-	5.675	-	1.123	4.543	4.082
		O_{22}	5.234	-	3.125	7.543	8.445	-	2.123	3.473
		O_{23}	-	1.987	3.284	5.294	6.936	5.826	-	6.836
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{82}	3.380	-	6.723	8.635	8.723	10.826	-	6.002
0.545	J_3	O_{13}	3.262	-	3.7236	1.374	-	0.101	3.286	4.766
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{43}	4.745	-	10.121	-	-	6.836	-	3.036
0.727	J_4	O_{14}	4.451	5.877	5.836	9.713	-	-	6.435	5.841
		O_{24}	6	-	4	-	2	3	5	-
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{54}	6.758	-	9.363	-	3.632	6.987	-	4.969
0.364	J_5	O_{15}	4.500	4.682	-	4.454	5.432	0.102	7.352	4.218
		O_{25}	7.712	8.991	11.632	14.726	-	15.762	8.826	12.55
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{85}	10.647	14.674	-	15.712	17.83	15.734	-	10.37
		O_{95}	6.126	-	4.936	6.636	-	7.823	9.531	5.936
0.909	J_6	O_{16}	6.531	4.540	-	8.736	-	7.105	5.863	5.996
		O_{26}	-	4.363	-	3.723	5.732	-	3.723	7.932

		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{66}	-	6.532	-	7.3276	-	5.348	4.624	2.954
1.000	J_7	O_{17}	5.340	-	5.724	7.722	3.632	-	4.001	4.190
		O_{27}	-	2.497	3.632	-	3.242	4.623	-	3.719
		O_{37}	2.012	2.827	-	7.432	6.232	-	4.987	-
0.636	J_8	O_{18}	-	2.906	-	9.824	5.976	-	5.324	6.501
		O_{28}	2.954	-	5.534	3.324	6.123	7.432	-	1.057
		O_{38}	3.000	-	-	4.906	5.325	3.653	7.123	1.908
0.182	J_9	O_{19}	-	5.927	4.124	-	3.694	-	5.764	5.564
		O_{29}	2.000	-	-	5.545	-	0.986	0.119	3.829
		O_{39}	-	2.946	5.734	-	4.321	-	6.543	-
0.273	J_{10}	O_{110}	8.099	-	12.534	-	12.76	-	-	11.65
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{810}	-	4.206	2.123	-	8.456	6.109	-	5.409
0.001	J_{11}	O_{111}	4.433	10.771	10.349	-	13.51	-	14.105	4.441
		O_{211}	-	17.234	11.086	12.975	-	16.856	11.712	13.12
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{611}	2.820	2.000	7.832	8.824	-	4.723	-	5.464
		O_{711}	-	6.097	3.892	-	6.723	6.624	4.723	-
0.091	J_{12}	O_{112}	1.391	3.787	3.765	4.723	2.865	0.139	4.735	-
		O_{212}	3.495	5.503	6.424	-	5.987	6.983	-	3.772
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{912}	4.331	3.708	6.641	6.735	-	6.124	4.192	6.700

U nastavku na slici 6.13 prikazan je optimalan raspored poslova na setu mašina u sekventnom obliku kao i ukupno vreme izvršavanja svih poslova pojedinačno na mašinama kao izlazni parametar optimizacije. Ukupna vrednost funnkcije cilja iznosi $Ct_{max} = 132.543$ minut.



Slika 6.13 Grafički prikaz optimalanog raspored poslova determinističkog $FJSP_c$ modela

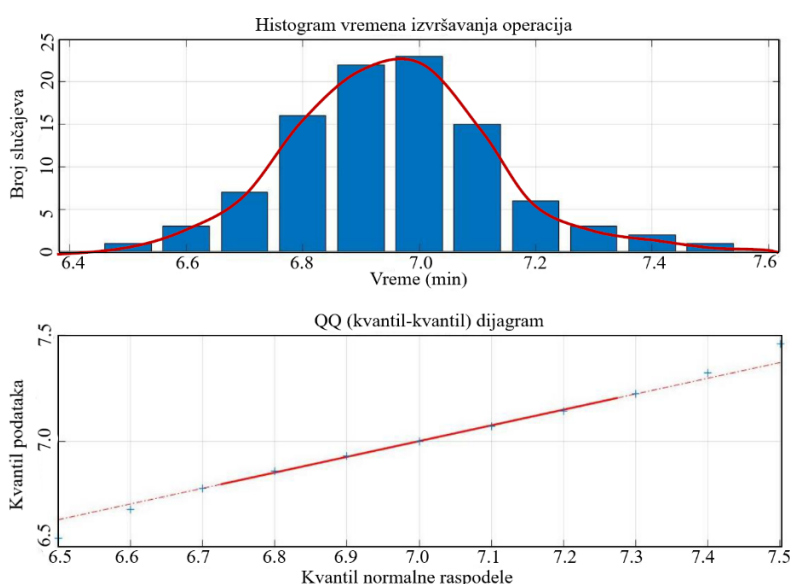
6.1.3 Optimizacija raspodele resursa primenom stohastičkog SF/SP_c modela sa pravilima prioritetne odluke zasnovanim na fazi MCDM pristupu

Kao što se može videti u prethodnoj studiji slučaja (poglavlje 6.1.2), ulazna vremena obrade poslova na setu mašina predstavljena su kao deterministička vremena sa unapred poznatim vremenima izvršavanja operacija na mašinama (tabela 6.7). U daljem tekstu, na istom primeru proizvodnje, biće prikazana studija slučaja gde ulazne veličine vremena obrade poslova na mašinama $stohpt_{ijk}$ imaju stohastički karakter. Ovo istraživanje urađeno je sa ciljem utvrđivanja razlika i odsupanja vrednosti funkcije cilja u odnosu na prvi slučaj (poglavlje 6.1.2). Prvi korak ka tom cilju je eksperimentalno merenje vremena obrade pojedinačnih operacija na skupu mašina. Primer tih merenja prikazan je u tabeli 6.8. Sva vremena izražena su u minutima.

Tabela 6.8 Eksperimentalna merenja vremena obrade operacija na mašini

Intervali		(6.0 ÷ 6.2]	(6.2 ÷ 6.4]	(6.4 ÷ 6.6]	...	(7.6 ÷ 7.8]	(7.8 ÷ 8.0]
Frekvencija događaja - m_i	O_{11}	0	0	4	...	0	0
Matematičko očekivanje		6.956					
Disperzija		0.0330					

Naredni korak podrazumeva analizu ulaznih parametara optimizacije i određivanje numeričkih karakteristika raspodele slučajne promenljive $stohpt_{ijk}$, na osnovu eksperimentalnih merenja vremena obrade poslova na mašinama. Na slici 6.14 je prikazan histogram vremena obrade operacija uz pripadajuću krivu normalne raspodele, kao i QQ (kvantil-kvantil) dijagram koji omogućava vizuelnu procenu odstupanja empirijskih podataka od teorijske normalne raspodele.



Slika 6.14 Vizualni test i QQ dijagram test potvrde: koeficijent korelacije: 0.99

Preliminarna analiza ukazuje na zadovoljavajuću usklađenost sa normalnom raspodelom, što je dodatno potvrđeno vrednostima osnovnih statističkih parametara: O_{11} : srednja vrednost $\mu = 6.956$ i standardna devijacija $\sigma = 0.0330$. Ovi rezultati podržavaju pretpostavku normalnosti raspodele, čime se omogućava njeno dalje korišćenje u okviru stohastičkog modeliranja i optimizacije proizvodnog procesa. Vizuelna analiza ne pokazuje značajna odstupanja od normalne raspodele, dok visoka vrednost koeficijenta korelacije kvantila ($r = 0,99$) dodatno potvrđuje validnost pretpostavke normalnosti. U tabeli 6.9 prikazane su ulazne veličine, tj. vremena obrade poslova na mašinama koja imaju normalni zakon raspodele.

Tabela 6.9 Vremena obrade poslova na mašinama prema zakonu normalne raspodele

Težinski koeficijent posla ($0 \div 1$)	Poslovi	Operacije	Vremena obrade poslova na mašinama			
			M_1	M_2		M_8
0.818	J_1	O_{11}	$N(6.956, 0.033)$	$N(1.674, 0.100)$	...	-
		O_{21}	$N(3.449, 0.550)$	-	...	$N(3.890, 0.495)$
		...	...	...	...	...
		O_{81}	$N(4.564, 0.460)$	-	...	$N(5.674, 0.398)$
0.455	J_2	O_{12}	$N(3.036, 0.317)$	$N(3.192, 0.152)$	...	$N(4.082, 0.203)$
		...	...	...	...	...
		O_{82}	$N(3.380, 0.495)$	-	...	$N(6.002, 0.558)$
0.545	J_3	O_{13}	$N(3.262, 0.266)$	-	...	$N(4.766, 0.581)$
		O_{23}	-	$N(1.151, 0.304)$	...	$N(4.483, 0.132)$
		O_{33}	$N(1.822, 0.572)$	$N(2.200, 0.165)$	...	$N(1.213, 0.136)$
		O_{43}	$N(4.745, 0.511)$	$N(2.671, 0.483)$	...	$N(3.036, 0.417)$
0.727	J_4	O_{14}	$N(4.451, 0.043)$	$N(5.877, 0.805)$	...	$N(5.841, 0.139)$
		...	...	...	...	...
		O_{54}	$N(6.758, 0.640)$	-	...	$N(4.969, 0.516)$
0.364	J_5	O_{15}	$N(4.500, 0.280)$	$N(4.682, 0.897)$	...	$N(2.218, 0.311)$
		O_{25}	$N(7.712, 0.374)$	$N(8.991, 0.448)$	...	$N(12.558, 0.575)$
		...	...	...	...	...
		O_{85}	$N(10.647, 0.646)$	$N(14.674, 0.830)$	...	$N(10.376, 0.406)$
		O_{95}	$N(6.126, 0.683)$	-	...	$N(5.936, 0.229)$
0.909	J_6	O_{16}	$N(6.531, 0.736)$	$N(4.540, 0.576)$	...	$N(5.996, 0.158)$
		...	...	...	...	...
		O_{66}	-	$N(6.532, 0.690)$	...	$N(2.954, 0.272)$
1.000	J_7	O_{17}	$N(5.340, 0.287)$	-	...	$N(4.190, 0.187)$
		O_{27}	-	$N(2.497, 0.107)$	...	$N(3.719, 0.106)$
		O_{37}	$N(2.012, 0.752)$	$N(2.827, 0.384)$	...	-
0.636	J_8	O_{18}	-	$N(2.906, 0.673)$	...	$N(6.501, 0.836)$
		O_{28}	$N(2.954, 0.184)$	-	...	$N(1.057, 0.775)$
		O_{38}	$N(3.000, 0.210)$	$N(1.000, 0.230)$	...	$N(1.908, 0.055)$
0.182		O_{19}	-	$N(5.927, 0.326)$	...	$N(5.564, 0.315)$

	J_9	O_{29}	$N(2.000, 0.054)$	-	...	$N(3.829, 0.144)$
		O_{39}	-	$N(2.946, 0.079)$	...	-
0.273	J_{10}	O_{110}	$N(8.099, 0.386)$	-	...	$N(11.656, 0.228)$
		...	...	...	...	...
		O_{710}	$N(3.883, 0.444)$	$N(2.837, 0.516)$	...	$N(2.988, 0.746)$
		O_{810}	-	$N(4.206, 0.220)$	...	$N(5.409, 0.178)$
		O_{111}	$N(4.433, 0.131)$	$N(10.771, 0.560)$	...	$N(4.441, 0.238)$
0.001	J_{11}	...	...	...	...	...
		O_{611}	$N(2.820, 0.194)$	$N(2.000, 0.485)$	...	$N(5.464, 0.119)$
		O_{711}	-	$N(6.097, 0.339)$	...	-
		O_{112}	$N(1.391, 0.300)$	$N(3.787, 0.168)$	...	-
0.091	J_{12}	O_{212}	$N(3.495, 0.399)$	$N(5.503, 0.792)$	...	$N(3.772, 0.055)$
		...	...	...	...	...
		O_{912}	$N(4.331, 0.082)$	$N(3.708, 0.189)$	...	$N(6.700, 0.410)$

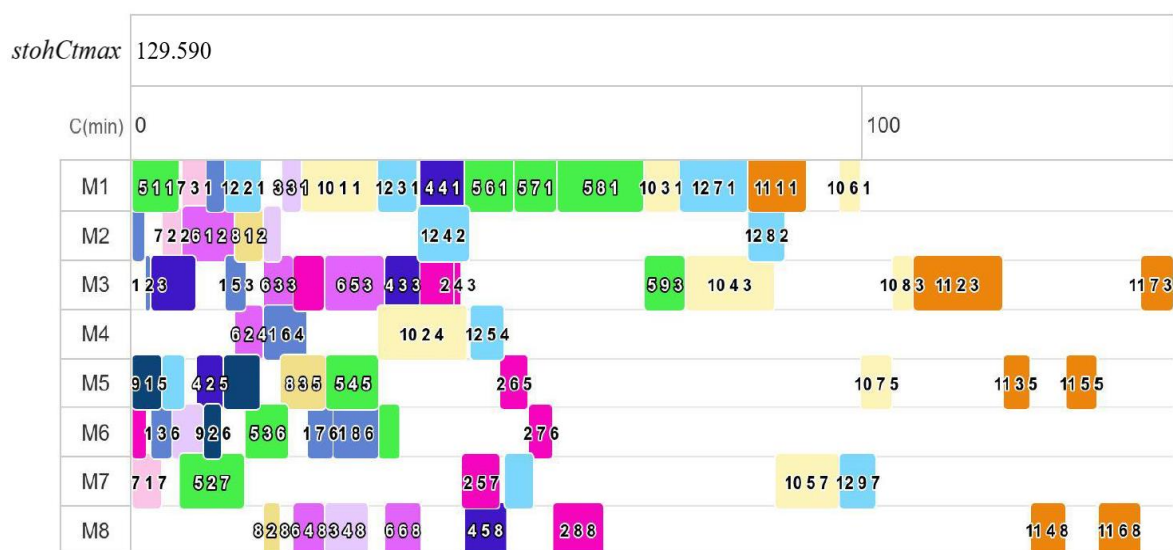
Naredni korak je određivanje stohastičkih vremena obrade na osnovu definisanih parametara normalne raspodele. Za operaciju O_{11} (srednja vrednost $\mu = 6.956$ i standardna devijacija $\sigma = 0.0330$) stohastičko vreme obrade ima vrednost $stohpt_{ijk} = 7.010$. Način dobijanja stohastičkog vremena obrade prema normalnom zakonu raspodele, za verovatnoću realizacije 0.95%, detaljno je opisan u poglavlju 4.2.1. U narednoj tabeli 6.10 prikazane su vrednosti stohastičkih vremena obrade poslova na mašinama.

Tabela 6.10 Stohastička vremena obrade poslova na mašinama $stohpt_{ijk}$

Težinski koeficijent posla (0 ÷ 1)	Poslovi	Operacije	Stohastička vremena obrade operacija na mašinama							
			M_1	M_2	M_3	...	M_5	M_6	M_7	M_8
0.818	J_1	O_{11}	7.010	1.839	3.213	...	7.035	-	7.780	-
		O_{21}	4.354	-	0.806	...	4.035	7.934	-	4.705
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{81}	5.321	-	11.365	...	0.159	6.353	7.923	6.329
0.455	J_2	O_{12}	3.558	3.442	-	...	0.077	1.998	5.182	4.416
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{82}	4.195	-	7.331	...	9.003	11.24	-	6.920
0.545	J_3	O_{13}	3.700	-	4.148	...	0.387	4.335	4.978	5.722
		O_{23}	-	1.651	8.125	...	3.948	4.971	3.108	4.700
		O_{33}	2.764	2.472	5.417	...	4.950	5.665	5.328	1.437
		O_{43}	5.586	3.466	10.996	...	0.102	7.219	0.151	3.722
0.727	J_4	O_{14}	4.522	7.202	6.147	...	-	0.264	7.134	6.070
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{54}	7.811	-	11.886	...	5.766	8.086	-	5.818
0.364	J_5	O_{15}	4.961	6.158	-	...	6.846	0.231	8.266	2.730
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{95}	7.250	-	5.823	...	0.045	8.441	10.888	6.313

0.909	J_6	O_{16}	7.742	5.488	-	...	-	7.983	7.025	6.256
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{66}	-	7.668	-	...	-	6.443	5.827	3.402
1.000	J_7	O_{17}	5.812	-	6.156	...	4.531	-	4.239	4.498
		O_{27}	-	2.673	4.120	...	4.030	5.879	-	3.893
		O_{37}	3.250	3.459	-	...	5.815	-	4.083	-
0.636	J_8	O_{18}	-	4.014	-	...	7.726	-	6.049	7.877
		O_{28}	3.257	-	6.538	...	6.826	8.139	-	2.333
		O_{38}	3.346	1.379	-	...	6.145	4.226	7.896	1.999
0.182	J_9	O_{19}	-	6.464	4.899	...	4.251	-	6.291	6.082
		O_{29}	2.089	-	0.157	...	-	1.437	0.119	4.066
		O_{39}	-	3.076	6.932	...	5.112	-	7.966	-
0.273	J_{10}	O_{110}	8.734	-	13.80	...	13.188	-	0.050	12.031
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{810}	-	4.568	2.934	...	9.258	6.816	0.112	5.702
0.001	J_{11}	O_{111}	4.649	11.693	11.708	...	14.578	-	14.633	4.833
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{711}	-	6.655	4.466	...	6.856	6.064	4.876	-
0.091	J_{12}	O_{112}	1.885	4.064	4.052	...	3.057	0.139	5.821	-
		...	...	...	...	...	...	...	...	...
		O_{912}	4.466	4.019	7.641	...	-	7.299	5.151	7.375

Nakon definisanja ulaznih parametra pristupa se optimizaciji $FJSP_c$ modela primenom GA algoritma. Na slici 6.15 prikazan je optimalan raspored poslova na setu mašina u sekventnom obliku kao i ukupno stohastičko vreme izvršavanja svakog poslova pojedinačno na mašinama kao izlazni parametar optimizacije. Ukupna vrednost funkcije cilja iznosi $stohCt_{max} = 129,590$ minuta.



Slika 6.15 Grafički prikaz optimalanog raspored poslova stohastičkog $SFJSP_c$ modela

Osim prikazanog postupka kreiranja stohastičkog modela (koji koristi unapred zadatu vrednost nivoa poverenja) i optimizacije procesa raspoređivanja poslova, moguće je primeniti i drugi stohastički model koji je zasnovan na metodu konvolucije, a koji je detaljno opisan u poglavlju 4.3.1.

Cilj je primena $FJSP_c$ modela za rešavanje problema raspoređivanja resursa sa pravilima prioritetne odluke zasnovanim na fazi MCDM pristupu. Navedeni model koristi ulazne podatke iz tabele 6.9, pri čemu je svako vreme trajanja operacije na jednoj mašini izraženo u obliku $N(\mu, \sigma)$. Primena operatora konvolucije omogućava sabiranje vremena obrade poslova na mašinama koja imaju normalni zakon raspodele. Nakon definisanja ulaznih parametara pristupa se optimizaciji $FJSP_c$ modela primenom GA algoritma. Ukupna vrednost funkcije cilja primenom operatora diskretne konvolucije iznosi $stohCkt_{max} = (128.976, 3.33)$.

6.1.4 Optimizacija raspodele resursa primenom fazi $FFJSP_c$ modela sa pravilima prioritetne odluke zasnovanim na fazi MCDM pristupu

Nakon optimizacije raspodele resursa primenom determinističkog i stohastičkog modela, četvrti model u okviru ove studije slučaja bazira se na primeni fazi logike u rešavanju $FJSP_c$ modela sa pravilima prioritetne odluke zasnovanim na fazi MCDM pristupu. Ovaj model dodatno proširuje prethodne pristupe uvođenjem fazi vremena obrade poslova na mašinama, čime se model približava realnim uslovima proizvodnje, posebno u dinamičnim industrijskim okruženjima poput proizvodnje nameštaja.

Za razliku od determinističkog modela, koji podrazumeva tačno definisana vremena i stohastičkog modela koji koristi normalnu raspodelu da opiše vremena obrade poslova na mašinama, fazi model $FJSP_c$ (u oznaci $FFJSP_c$) koristi trougaone fazi brojeve za modeliranje vremena obrada operacija na mašinama u obliku $fpt_{ijk} = (r_1, r_2, r_3)$. Ova forma omogućava uvođenje vremenskih granica i prosečnih vrednosti, što doprinosi boljoj fleksibilnosti u planiranju. Eksperimentalni podaci korišćeni za ovaj model dobijeni su na osnovu stvarnih merenja u firmi za proizvodnju nameštaja na jugu Srbije, što dodatno potvrđuje praktičnu relevantnost istraživanja.

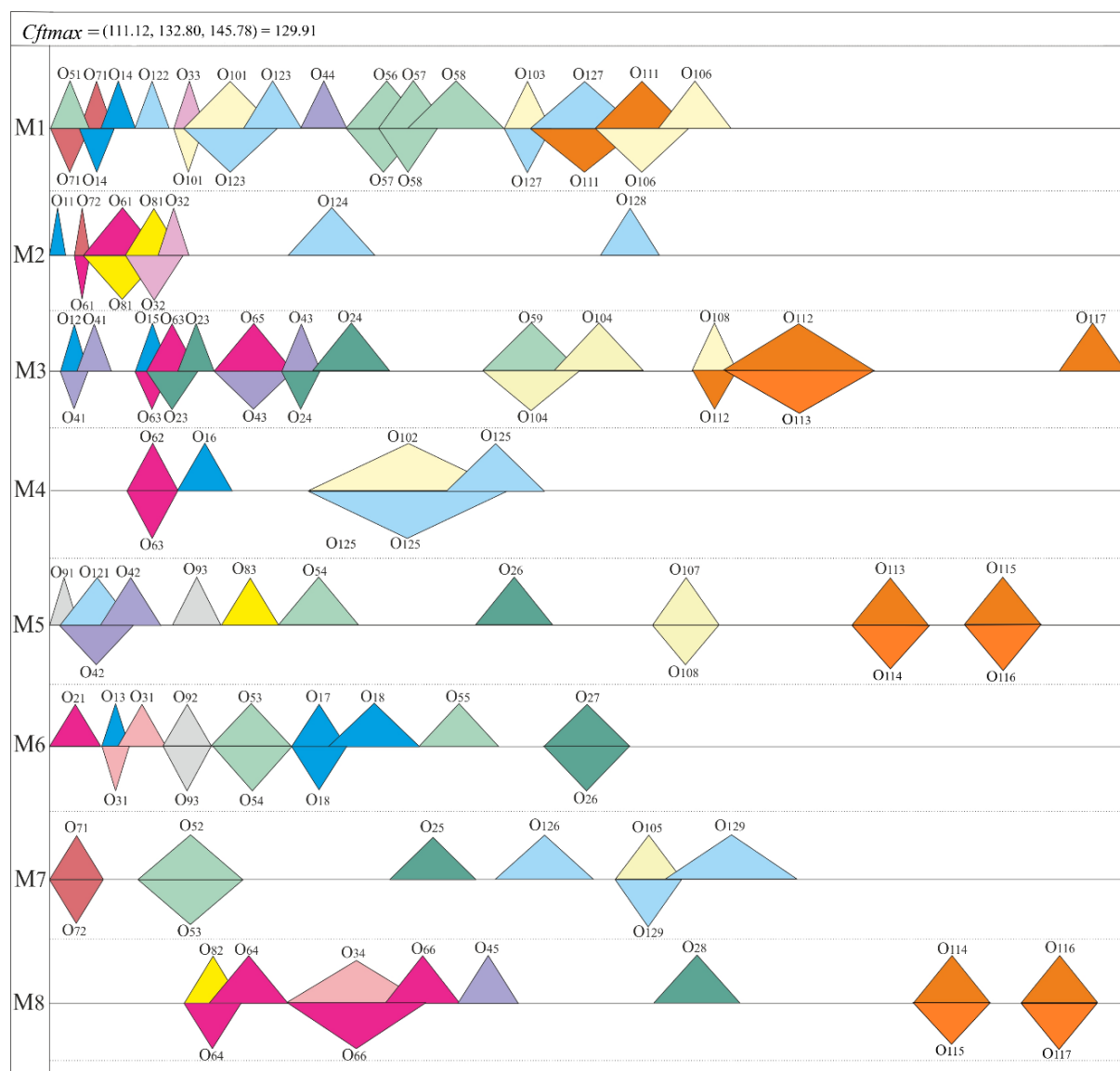
Implementacija fazi modela omogućava i primenu pravila prioritetne odluke zasnovanih na fazi MCDM pristupu, čime se dodatno unapređuje kvalitet raspodele poslova i korišćenja resursa. U nastavku u tabeli 6.11 prikazana su ulazne veličine, tj. fazi vremena obrade poslova na mašinama.

Tabela 6.11 Fazi vremena obrade poslova na mašinama $fpt_{ijk} = (r_1, r_2, r_3)$

Težinski koeficijent posla ($0 \div 1$)	Poslovi	Operacije	Fazi vremena obrade poslova na mašinama			
			M_1	M_2		M_8
0.818	J_1	O_{11}	(6.50, 6.95, 7.50)	(1.10, 1.67, 2.00)	...	-
		O_{21}	(2.89, 3.44, 3.99)	-	...	(3.12, 3.89, 4.50)
		...	...	...	...	...
		O_{81}	(4.10, 4.56, 5.02)	-	...	(5.27, 5.67, 6.07)
0.455	J_2	O_{12}	(2.54, 3.03, 3.55)	(2.70, 3.19, 3.74)	...	(3.57, 4.08, 4.58)
		...	...	...	...	...
		O_{82}	(2.88, 3.38, 3.9)	-	...	(5.20, 6.00, 6.77)
0.545	J_3	O_{13}	(2.72, 3.26, 3.78)	-	...	(4.18, 4.76, 5.34)
		O_{23}	-	(0.75, 1.15, 1.65)	...	(3.86, 4.48, 5.11)
		O_{33}	(1.30, 1.82, 2.30)	(1.65, 2.20, 2.76)	...	(1.07, 1.21, 1.74)
		O_{43}	(4.00, 4.74, 5.25)	(2.00, 2.67, 3.15)	...	(2.41, 3.03, 3.65)
0.727	J_4	O_{14}	(5.50, 6.00, 6.70)	(5.57, 5.87, 6.58)	...	(5.50, 5.84, 6.68)
		...	...	...	...	...
		O_{54}	(6.11, 6.75, 7.39)	-	...	(4.40, 4.96, 5.58)
0.364	J_5	O_{15}	(7.00, 7.50, 8.00)	(3.78, 4.68, 5.57)	...	(1.70, 2.21, 2.72)
		O_{25}	(7.00, 7.71, 8.48)	(8.54, 8.99, 9.53)	...	(11.5, 12.5, 13.1)
		...	...	...	...	...
		O_{85}	(9.50, 10.64, 11.5)	(13.8, 14.6, 15.5)	...	(9.3, 10.3, 10.90)
		O_{95}	(5.44, 6.12, 6.80)	-	...	(5.20, 5.93, 6.56)
0.909	J_6	O_{16}	(5.59, 6.53, 7.46)	(3.96, 4.54, 5.41)	...	(5.53, 5.99, 6.55)
		...	...	...	...	...
		O_{66}	-	(5.94, 6.53, 7.42)	...	(2.48, 2.95, 3.62)
1.000	J_7	O_{17}	(8.50, 9.34, 10.02)	-	...	(3.70, 4.19, 4.67)
		O_{27}	-	(2.00, 2.49, 2.98)	...	(3.21, 3.71, 4.22)
		O_{37}	(1.26, 2.01, 2.76)	(2.24, 2.82, 3.31)	...	-
0.636	J_8	O_{18}	-	(2.23, 2.90, 3.57)	...	(5.66, 6.50, 7.33)
		O_{28}	(2.37, 2.95, 3.43)	-	...	(0.28, 1.05, 1.83)
		O_{38}	(2.49, 3.00, 3.41)	(0.57, 1.00, 1.43)	...	(1.45, 1.90, 2.46)
0.182	J_9	O_{19}	-	(5.20, 5.92, 6.35)	...	(5.04, 5.56, 6.20)
		O_{29}	(1.34, 2.00, 2.65)	-	...	(3.28, 3.82, 4.57)
		O_{39}	-	(2.86, 2.94, 3.02)	...	-
0.273	J_{10}	O_{110}	(7.51, 8.09, 8.50)	-	...	(11.0, 11.6, 12.1)
		...	...	...	...	...
		O_{710}	(3.13, 3.88, 4.32)	(2.32, 2.83, 3.35)	...	(2.14, 2.98, 3.73)
		O_{810}	-	(3.68, 4.20, 4.52)	...	(4.80, 5.40, 6.00)
0.001	J_{11}	O_{111}	(4.80, 7.43, 6.20)	(10.2, 10.7, 11.3)	...	(3.90, 4.44, 5.00)
		...	...	...	...	...
		O_{611}	(2.22, 2.82, 3.31)	(1.51, 2.00, 2.68)	...	(5.10, 5.46, 6.10)
		O_{711}	-	(5.55, 6.09, 6.73)	...	-

0.091	J_{12}	O_{112}	(1.09, 1.59, 2.99)	(3.01, 3.78, 4.25)	...	-
		O_{212}	(3.00, 3.49, 4.50)	(4.71, 5.50, 6.29)	...	(3.21, 3.77, 4.22)
		...	...	...	...	...
		O_{912}	(3.95, 4.33, 5.00)	(3.21, 3.70, 4.19)	...	(6.19, 6.70, 7.11)

Na slici 6.16 prikazan je optimalan raspored poslova na setu mašina u sekvetnom obliku kao i ukupno fazi vreme obrade svakog posla pojedinačno na mašinama kao izlazni parametar optimizacije. Ukupna vrednost funkcije cilja iznosi $Cft_{max} = (111.15, 132.80, 145.78)$ minuta. Za dobijeni trougaoni fazi broj, izvršena je defazifikacija korišćenjem centroidne metode. Defazifikovana vrednost funkcije cilja (primenom metode „centara težine“) iznosi $Cft_{max} = 129.91$ minuta i predstavlja vrednost ukupnog fazi vremena izvršavanja poslova na mašinama.



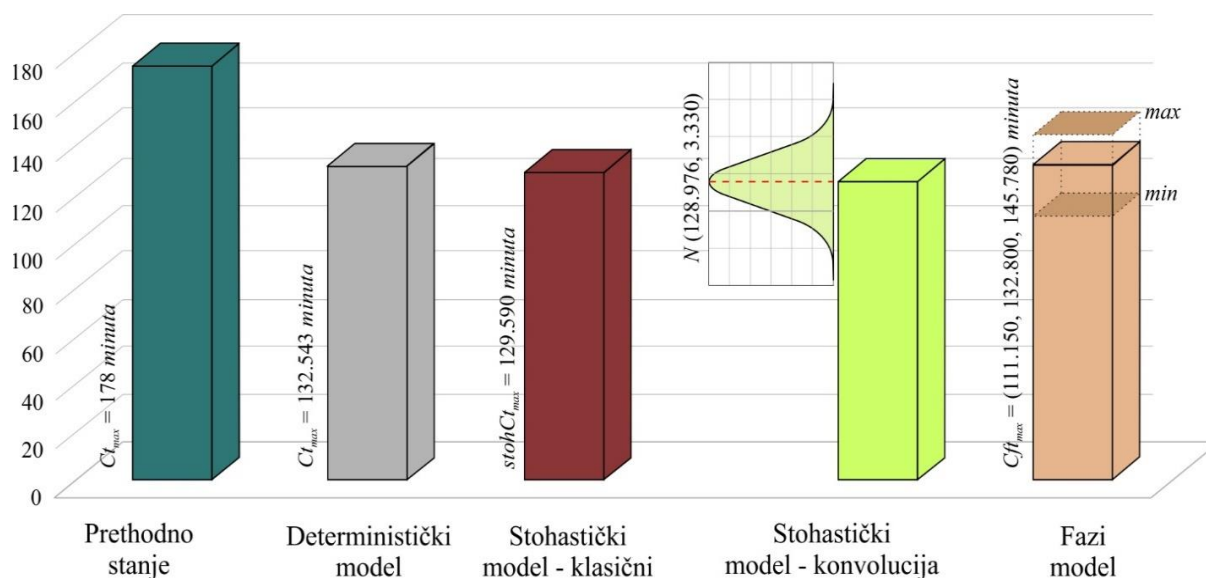
Slika 6.16 Grafički prikaz optimalanog raspored poslova fazi $FFJSP_c$ modela

6.1.5 Diskusija dobijenih rezultata

Dobijeni rezultati primenom determinističkog, stohastičkog, konvolucionog i fazi modela sa pravilima prioritetne odluke zasnovanih na fazi MCDM pristupu prikazuju da sve četiri metodologije uspešno rešavaju realni problem planiranja i raspoređivanja resursa. S obzirom na to da su sve četiri metodologije dale zanačajno bolje rezultate u odnosu na način poslovanja kompanije pre njihove primene (komparacija će biti detaljno objašnjena u tekstu koji sledi), može se zaključiti da se optimizacijom procesa planiranja i raspoređivanja resursa u kompaniji mogu ostvariti značajne uštede.

Korišćenjem fazi MCDM pristupa, eliminisana je subjektivnost u određivanju prioriteta poslova, čime se obezbeđuje doslednost i pouzdanost u procesu donošenja odluka. Efikasan proizvodni proces ključan je za uspeh svakog preduzeća, posebno u industriji nameštaja gde je potrebno efikasno upravljati proizvodnjom različitih vrstama proizvoda.

Studija slučaja u prvom koraku počinje sa analizom proizvodnog procesa, gde se uočava nedostatak postojećeg sistema planiranja. Planiranje i raspoređivanje poslova oslanjalo se na iskustvo srednjeg menadžmenta i šefa proizvodnje. Integracija fleksibilnog modela sa pravilima prioriteta poslova primenom fazi MCDM metoda, kombinuje determinističku, stohastičku, vremena obrade modelirana normalnom raspodelom i fazi vremena obrade poslova pri optimizaciji procesa proizvodnje primenom GA. U nastavku na slici 6.17 predstavljena je grafička analiza dobijenih rezultata za sve korišćene modele.



Slika 6.17 Grafički prikaz uporedne analize primenjenih modela

Analiza rezultata dobijenih primenom četiri različita pristupa u optimizaciji proizvodnih resursa: determinističkog, stohastičkog, stohastičkog sa primenom metode

konvolucije i fazi modela ukazuje na značajno smanjenje vrednosti funkcije cilja u poređenju sa prethodnim stanjem sistema, gde je ukupno vreme trajanja obrade poslova iznosilo $Ct_{max} = 178$ minuta.

Iako sva četiri modela doprinose poboljšanju performansi proizvodnog procesa, njihova metodološka osnova i pouzdanost ulaznih podataka predstavljaju ključne faktore za procenu praktične primenljivosti svakog od njih.

- U slučaju determinističkog modela ostvarena je vrednost funkcije cilja $Ct_{max} = 132.543$ minuta. Ovaj model karakteriše metodološka ograničenost koja ga čini manje pogodnim za modeliranje složenih i neizvesnih sistema. Ovakvi modeli ne uzimaju u obzir slučajnost i varijabilnost, pa uvek daju isti rezultat za iste ulazne podatke. Ovo može biti problem u realnim uslovima kakvi su proizvodni procesi, gde su podaci često nepotpuni, netačni ili podložni promenama. Takođe, zahtevaju tačne ulaze i teško se prilagođavaju promenama u okruženju. Zbog svega toga, deterministički modeli mogu dovesti do pogrešnih zaključaka, te se ne mogu smatrati pouzdanim alatom za donošenje odluka u realnim uslovima.
- Stohastički model zasnovan je na preciznim eksperimentalnim podacima, statistički obrađenim, sa jasno definisanim očekivanim vrednostima i standardnim devijacijama. Ovakvi modeli imaju brojne prednosti kada je u pitanju modeliranje realnih i neizvesnih sistema. Za razliku od determinističkih, oni uvažavaju slučajnost i varijabilnost, pa mogu prikazati više mogućih ishoda. Mogu raditi i sa nepotpunim ili procenjenim podacima, jer računaju s verovatnoćama. Primenom modela sa unapred zadatim nivoom poverenja $\alpha = 0.95$ dobijena je vrednost funkcije cilja $stohCt_{max} = 129.590$. Ova vrednost je značajno manja u odnosu na vrednost dobijenu primenom determinističkog modela. Sam model se može klasifikovati kao metodološki pouzdaniji, naročito za potrebe donošenja odluka zasnovanih na realnim i merljivim podacima.
- Stohastički model zasnovan na diskretnoj konvoluciji koristi direktne parametre normalne raspodele, definisane u obliku $N(\mu, \sigma)$, kako bi definisao vremena obrade poslova na mašinama u uslovima neizvesnosti. Sabiranjem više pojedinačnih normalnih raspodela primenom diskretnog operatora konvolucije dobija se vrednost funkcije cilja u obliku normalne raspodele, koja omogućava preciznije i stabilnije procene ukupnog vremena obrade poslova na mašinama i vrednosti ciljne funkcije. Na osnovu sprovedene analize, izračunata vrednost ciljne funkcije iznosi $Ckt_{max} =$

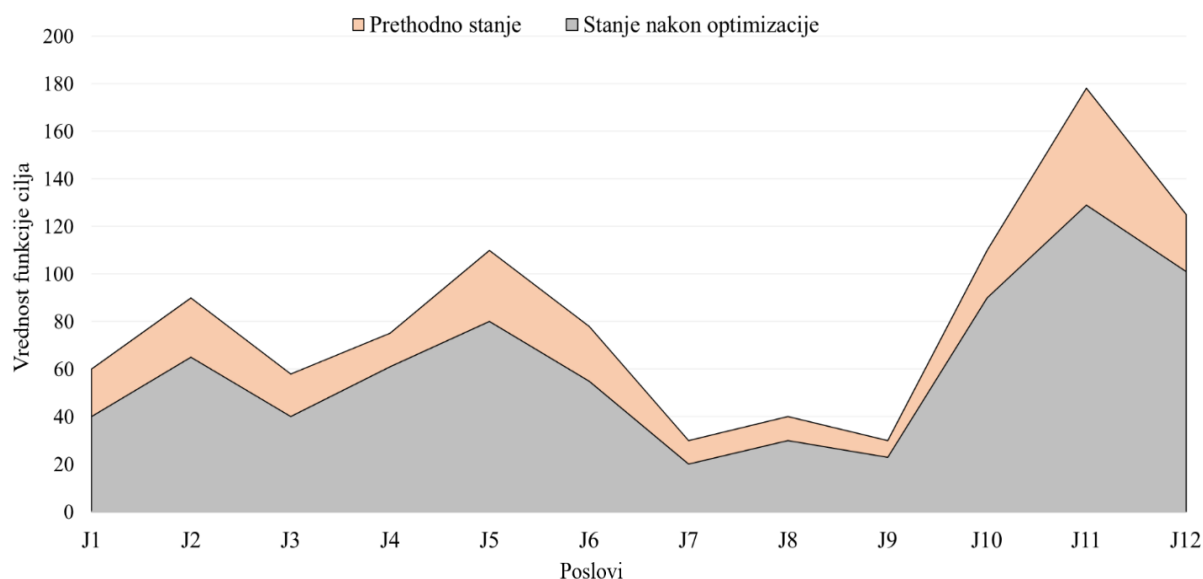
$N(128.976, 3.33)$. Za navedene vrednosti parametara normalne raspodele i interval poverenja od 99% raspon vrednosti funkcije cilja bio bi od 120.393 do 137.559 minuta.

- Fazi modeli zbog svoje sposobnosti modeliranja nepreciznih, nejasnih ili teško kvantifikovanih ulaznih podataka, u ovom slučaju vremena obrade poslova na mašinama, imaju značajne prednosti u realnim proizvodnim procesima. Primena trougaonih fazi brojeva za predstavljanje ulaznih parametara omogućava fleksibilno modeliranje neizvesnosti i primenu relativno jednostavne aritmetike. U slučaju primene fazi modela dobijene vrednosti funkcije cilja $Cft_{max} = (111.15, 132.8, 145.78)$, kao i defazifikovana vrednost funkcije cilja $Cft_{max} = 129.91$, ukazuju na mogućnost postizanja visokog nivoa efikasnosti uz istovremeno očuvanje metodološke fleksibilnosti.

Na osnovu dobijenih rezultata može se izvesti generalni zaključak da deterministički model, nije pogodan za primenu u složenim proizvodnim sistemima zbog svoje ograničene sposobnosti sagledavanja realnih uslova rada. Stohastički modeli i fazi model mogu se smatrati metodološki opravdanim rešenjima za optimizaciju proizvodnih resursa u realnim uslovima rada. Stohastički model zasnovan na diskretnoj konvoluciji i fazi model predstavljaju najpouzdaniji pristup za planiranje i raspoređivanje proizvodnih resursa u uslovima neizvesnosti.

U poređenju sa determinističkim modelom, kao i klasičnim stohastičkim pristupom, konvolucijski model omogućava precizniju i stabilniju procenu ciljne funkcije. Fazi model se preporučuje kao alternativno rešenje u situacijama kada precizni statistički podaci nisu dostupni, odnosno kada dominira subjektivna procena u pogledu ulaznih parametara. Zahvaljujući sposobnosti da neizvesnot modelira u formi trougaonih fazi brojeva, ovaj pristup omogućava fleksibilno i praktično modeliranje realnih proizvodnih scenarija, posebno u fazama planiranja kada je dostupnost podataka ograničena.

Konkretno, predstavljena studija slučaja je pokazala da se primenom statističkih alata i metoda veštačke inteligencije ukupno vreme obrade poslova na mašinama može smanjiti za više od 20%. Na slici 6.18 dat je grafički prikaz vremena obrade poslova na mašinama (za pojedinačne poslove) pre primene savremenih alata modeliranja i optimizacije (prethodno stanje), kao i nakon primene ovih alata u okviru klasičnog stohastičkog modela (stanje nakon optimizacije).



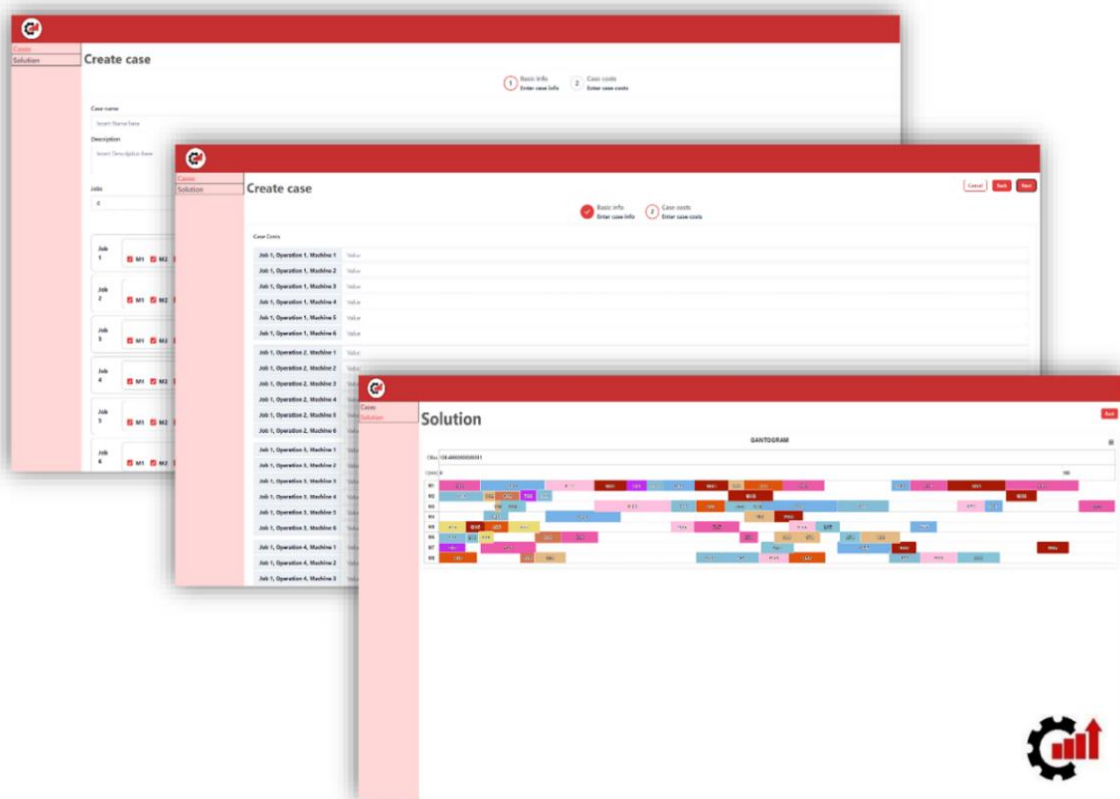
Slika 6.18 Grafički prikaz prethodnog stanja i stanja nakon optimizacije

6.2 RAZVOJ SOFTVERSKJE APLIKACIJE ZA PLANIRANJE I RASPOREĐIVANJE RESURSA NA OSNOVU RAZVIJENIH MODELA

U ovom delu poglavlja doktorske disertacije predstavljena je softverska realizacija razvijenih modela planiranja i raspoređivanja poslova. Kako je ranije zaključeno, jedan od ključnih izazova pri implementaciji novih, naučno zasnovanih modela, u proizvodni proces, jeste nedostatak stručnog znanja i nedovoljna razvijenost MSP u kontekstu primene savremenih metoda i algoritama veštačke inteligencije. Kako bi se ostvarila efikasna primena ovih modela potrebna je dodatna obuka i tehnička podrška. Jedan od načina primene jeste razvoj softverske aplikacije koja omogućava njihovu primenu u realnim proizvodnim uslovima i pojednostavljuje proces optimizacije. Takva softverska aplikacija bi značajno olakšala proces planiranja poslova u proizvodnji. Na osnovu razvijenih modela planiranja i raspoređivanja resursa (poglavlje 5) razvijena je softverska aplikacija pod nazivom „AI Productivity”.

Cilj aplikacije je unapređenje procesa planiranja u MSP korišćenjem naprednih alata veštačke inteligencije i algoritama optimizacije. Ova integracija omogućava efikasnije planiranje proizvodnje, smanjujući zastoje i povećavajući produktivnost. Iako optimizacioni modeli, kao što je $FJSP_c$ model i drugi, pružaju moćan računarski alat za rešavanje složenih problema u proizvodnim procesima, njihova praktična primena u realnim okruženjima često zahteva pristupačne i efikasne softverske alate. Razvoj softverske aplikacije omogućava da se složeni algoritmi i matematički modeli pretoče u intuitivne, korisnički pristupačne interfejsse koji omogućavaju menadžerima i planerima

proizvodnje da lako unose podatke, pokreću optimizacione procese i analiziraju rezultate bez potrebe za dubokim tehničkim znanjem. Ova aplikacija ne samo da pojednostavljuje korišćenje optimizacionih modela, već i poboljšava brzinu i preciznost donošenja odluka u proizvodnim okruženjima, što rezultira povećanjem efikasnosti i produktivnosti. Razvijena aplikacija omogućava korisnicima, poput menadžera proizvodnje i planera, da efikasno planiraju proizvodne procese. Ključne funkcionalnosti aplikacije uključuju unos podataka o proizvodnji, pokretanje algoritama optimizacije i prikaz optimizovanih rasporeda. Korisnički interfejs je dizajniran da bude intuitivan i jednostavan za korišćenje, omogućavajući brz i efikasan rad što se i može videti na slici 6.19.

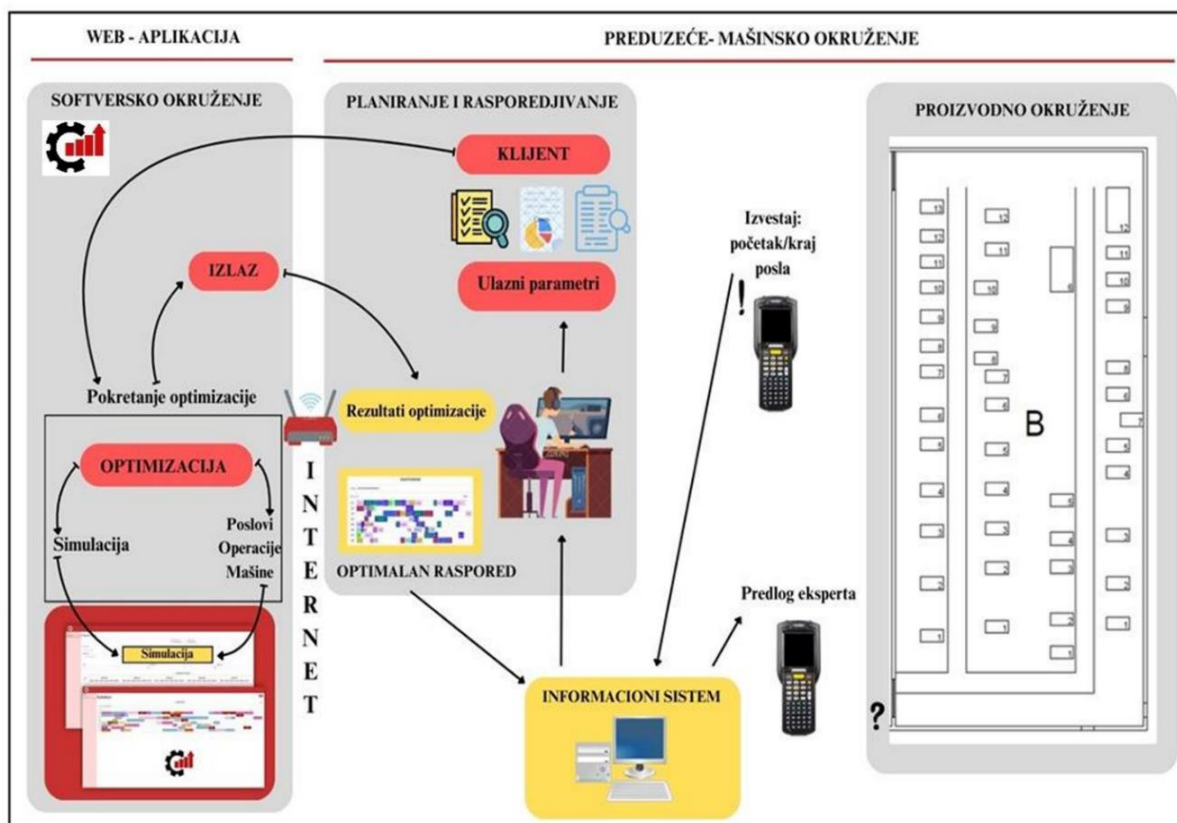


Slika 6.19 Korisnički interfejs softverske aplikacije

Aplikacija je razvijena koristeći modernu arhitekturu koja se sastoji od grafičkog interfejsa (*eng. Frontend*) i optimizacionih algoritama (*eng. Backend*). Algoritam je razvijen u softverskom paketu Matlab, a kasnije zbog lakoće rukovanje preveden u C#. Grafički interfejs je izrađen koristeći (*eng. TypeScript*) i (*eng. React Vite framework*), što omogućava dinamičan i jednostavan korisnički interfejs. Matematički modeli za planiranje i raspoređivanje resursa, opisani u petom poglavlju, razvijeni su u (*eng. NET framework*). Podaci se čuvaju i skladište u (*eng. SQL Server*) bazi podataka, omogućavajući brzi pristup

i manipulaciju podacima. Aplikacija omogućava korisnicima da unesu podatke o resursima i zadacima, nakon čega algoritmi generišu optimalne proizvodne rasporede.

Na slici 6.20 šematski je prikazana softverska aplikacija i njena povezanost sa ostalim komponentama proizvodnog sistema. Prikaz je kreiran na primeru kompanije „DN Company“ iz Vladičinog Hana.



Slika 6.20 Grafički prikaz implementacije softverske aplikacije u preduzeću (DN Company)

Proces započinje unosom ulaznih podataka od strane korisnika u okviru preduzeća. Ulazni podaci uključuju informacije o vrstama proizvoda koji se proizvode. Nakon unosa, ovi podaci se putem interneta šalju u optimizacioni softver koji se nalazi u web-aplikaciji. U sledećem koraku, aplikacija sprovodi optimizaciju kompletnog proizvodnog procesa na osnovu unetih parametara, primenjujući optimizacione algoritme kako bi izračunala najefikasniji sekventni raspored poslova i maksimalno iskoristila dostupne resurse. Kada se dobije optimalan raspored, on se automatski vizualizuje i dostavlja natrag korisniku u preduzeću, koji ga dalje koristi za operativno upravljanje proizvodnjom. Plan zatim ulazi u informacioni sistem preduzeća, koji ga distribuira do proizvodnog pogona, tačnije do radnih mesta i mašina. U proizvodnoj hali, označenoj velikim slovom B, radnici i operateri koriste terminale kako bi u realnom vremenu unosili podatke o statusu aktivnosti

uključujući početak i kraj obrade svake operacije na konkretnoj mašini. Ovi terminali omogućavaju i unos ekspertske sugestije koje dolaze sa terena, što dodatno doprinosi adaptivnosti sistema. Sve prikupljene informacije automatski se vraćaju nazad u informacioni sistem, koji po potrebi ažurira i koriguje plan u skladu sa realnim stanjem na terenu. Na taj način se ostvaruje dinamička i zatvorena povratna sprega između planiranja, izvršenja i kontrole, čime se obezbeđuje visok stepen efikasnosti, fleksibilnosti i transparentnosti proizvodnog procesa. Korišćenjem naprednih modela optimizacije zasnovanih na veštačkoj inteligenciji, razvijeno je rešenje koje ne samo da odražava paradigmu industrije 5.0, već i demonstrira njenu primenjivost u konkretnim uslovima proizvodnog procesa.

Dalji razvoj i integracija modela za planiranje i raspoređivanje resusa i softverske aplikacije će uključivati dodatne funkcionalnosti i poboljšanja kako bi se dodatno podržali korisnici u donošenju odluka. Treba napomenuti da opisana aplikacija je još uvek u domenu razvoja, ideje i predstavlja jedan od budućih pravaca istraživanja i komercijalizacije razvijenih modela čija je osnovna uloga planiranje i raspoređivanje resursa u MSP u uslovima neizvesnosti događaja. Primarni cilj razvijenih modela planiranja jeste unapređenje procesa proizvodnje a samim tim i produktivnosti proizvodnog procesa kroz minimizaciju vremena obrade, što direktno doprinosi značajnim vremenskim uštedama i operativnim benefitima.

Poglavlje 7

ZAKLJUČNA RAZMATRANJA I BUDUĆI PRAVCI ISTRAŽIVANJA

Ubrzani rast privrede donosi sa sobom razvoj novih tehnologija, koje postaju neizostavan deo poslovanja kako bi preduzeća mogla efikasno da odgovore na izazove tržišta. Mala i srednja preduzeća danas se suočavaju sa specifičnim izazovima, od potrebe za bržim prilagođavanjem zahtevima tržišta i tehnološkim inovacijama, do potrebe za efikasnim upravljanjem resursima. Tehnološki napredak, posebno u oblasti veštačke inteligencije, nudi potencijal za optimizaciju poslovnih procesa i smanjenje troškova, što je ključno za povećanje konkurentnosti u sve složenijem poslovnom okruženju. Implementacija naprednih tehnologija baziranih na alatima veštačke inteligencije predstavlja veliki izazov za MSP, ali i značajnu priliku za unapređenje poslovanja. Složenost proizvodnih sistema, kao i upravljanje različitim resursima i aktivnostima, zahteva ozbiljan pristup i strategiju kako bi se optimizovali proizvodni procesi i povećala produktivnost. Bez adekvatne tehnologije i naučnih metoda, preduzeća rizikuju da kasne za konkurencijom koja uspešno integriše ove napredne sisteme.

Osnovni cilj istraživanja u ovoj doktorskoj disertaciji jeste smanjenje proizvodnih troškova MSP, uz paralelno povećanje efikasnosti i produktivnosti proizvodnih procesa. U tom kontekstu, primena alata u vidu naprednih optimizacionih modela može doneti revoluciju u

načinu na koji MSP funkcionišu. Međutim, upravljanje složenim proizvodnim sistemima, gde se paralelno mora kordinisati sa više različitih resursa, zahteva strateški pristup. Optimizacija procesa postaje ključni faktor u održavanju konkurentne prednosti. Uvođenje novih tehnologija nije samo tehnički izazov već i organizacioni. Preduzeća moraju da uhvate trend i biraju između tradicionalnih metoda upravljanja i modernih pristupa zasnovanih na podacima i veštačkoj inteligenciji. Anketna istraživanja pokazuju da u Republici Srbiji implementacija naprednih metoda još uvek nije široko zastupljena u MSP, što otežava proces transformacije ka efikasnijim modelima poslovanja. Razlozi za to su nedostatak kvalifikovane radne snage, ali i nedostatak želje za prilagođavanje aktuelnim tržišnim trendovima. Efikasno planiranje aktivnosti i raspodela zadataka ključne su komponente upravljanja proizvodnjom, koje direktno utiču na konkurentnost i uspešnost proizvodnih operacija. Danas, većina MSP koristi tradicionalne metode zasnovane na iskustvu radnika ili srednjeg menadžmenta, što često dovodi do propusta u planiranju i neefikasnosti u proizvodnom procesu. Ovakav pristup ima ozbiljne nedostatke jer ne omogućava sveobuhvatan pregled i analizu, što je neophodno u savremenom poslovnom okruženju.

7.1 PREGLED OSTVARENIH REZULTATA

U istraživanjima sprovedenim u ovoj doktorskoj disertaciji jasno je pokazano da implementacija naprednih tehnologija baziranih na alatima veštačke inteligencije donosi značajne benefite. Poboljšanja u proizvodnim procesima, kao što su smanjenje vremena obrade, ostvarena su zahvaljujući korišćenju optimizacionih modela. MSP koja bi usvojila pristup planiranju i raspoređivanju resursa na bazi modela razvijenih u ovoj doktorskoj disertaciji, mogla bi da ostvare prosečna poboljšanja efikasnosti od 15% do 25% (Stanković i sar., 2020), (Stanković i sar., 2022), (Stanković i Petrović, 2025), (Stanković i sar., 2025). Kontinualna primena razvijenih modela može dovesti do još većih benefita na mesečnom ili godišnjem nivou, što ukazuje na ogroman potencijal za dugoročno korišćenje. Ovo vodi ka sveukupnom poboljšanju produktivnosti i omogućava preduzećima da brzo reaguju na promene u potražnji. Prilagođavanje u realnom vremenu postaje standard u dinamičnim proizvodnim okruženjima, čime se ostvaruju značajni dobici u pogledu efikasnosti. Razvijeni modeli u ovoj doktorskoj disertaciji pružaju i mogućnost preciznijeg predviđanja, što omogućava proaktivno donošenje odluka i smanjuje rizik od zastoja u proizvodnji.

Verifikacija razvijenih modela u poglavlju 6, sprovedena je na primeru firme koje se bave proizvodnjom različitih vrsta nameštaja na jugu Srbije („DN Company“). Studija slučaja u firmi za proizvodnju nameštaja obuhvata primenu modela mašinskog učenja u kombinaciji

sa fleksibilnim modelima ($FJSP_c$, $SFJSP_c$, $FFJSP_c$), što predstavlja novi pristup u oblasti planiranja i raspoređivanja resusa. U tom kontekstu, WNN model se koriste za modeliranje složenih odnosa između ulaza (kao što su parametri optimizacije GA) i ciljnih promenljivih (kao što je funkcija cilja Ct_{max} , $stohCt_{max}$, Cft_{max}). Dobijeni rezultati i performanse WNN modela na osnovu posmatranih metrika pokazuju visok procenat pouzdanosti korišćenog modela. Procenat tačnosti predviđanja vrednosti funkcije cilja korišćenjem ovog modela je čak 91%. Razvijeni model detaljno je predstavljen u autorskom radu (Stanković i sar., 2025).

Model fleksibilnog planiranja i raspoređivanja resusa sa pravilima prioriteta kombinuje različite fazi MCDM metode kako bi se pravila prioriteta poslova rangirala naučnim metodama a ne na osnovu iskustva radnika u proizvodnji. U sprovedenoj studiji slučaja u poglavlju 6 korišćene su fazi AHP i fazi FUCOM metode za određivanje težina kriterijuma na osnovu ocena eksperata, dok je za rangiranje alternativa (poslova) i određivanje prioriteta korišćena fazi WASPAS metoda. Dobijeni rezultati prikazuju uspešnost predložene metodologije i ističu konkretne koristi koje preduzeće može ostvariti primenom ovog pristupa u optimizaciji proizvodnog procesa. Konkretno, predstavljena studija slučaja je pokazala da se primenom opisane metodologije mogu ostvariti uštede u ukupnom vremenu završetka obrade svih poslova u proseku za 23%, dajući prednost proizvodima sa prioritetom. Konkretna verifikacija i detaljna primena modela u relnom proizvodnom procesu predstavljena je u autorskom radu (Stanković i Petrović, 2025).

Naredni značajan dobitnik u ovoj doktorskoj disertaciji odnosi se na razvoj ANFIS sistema za predlaganje metaheurističkog algoritma koji daje najbolje rezultate. Sistemski ulazi su dve karakteristike posla, odnosno broj poslova i broj mašina, dok je jedan izlaz predloženi algoritam optimizacije (ABC, PSO ili GA). Za svaku kombinaciju optimizacionih parametara, jedan metod optimizacije je označen kao preferiran na osnovu dobijenih rezultata u pogledu vremena potrebnog za optimizaciju i stabilnosti rezultata - vrednosti funkcije cilja. Nakon odabira optimalnog algoritma pristupa se procesu optimizacije. Primenom opisanog modela u sprovedenoj studiji slučaja dobijeno je da je ukupna vrednost funkcije cilja pre optimizacije iznosila je $Ct_{max} = 117$ minuta, dok ukupna vrednost funkcije cilja nakon optimizacije iznosi $Ct_{max} = 100$ minuta. Na ovaj način produktivnost proizvodnje se može povećati za 14,5%, što opravdava primenu ANFIS sistema i izbor GA za dalju optimizaciju. Razvijeni model detaljno je predstavljen u autorskom radu (Stanković i sar., 2022).

Na osnovu dobijenih rezultata može se zaključiti da stohastički i fazi modeli predstavljaju metodološki relevantne pristupe za modeliranje uslova neizvesnosti. Stohastički

model omogućava kvantitativnu analizu rizika kroz statističku obradu podataka, pri čemu se vremena obrade poslova na mašinama modeliraju korišćenjem raspodele sa jasno definisanim parametrima očekivane vrednosti i standardne devijacije. Ovakav pristup obezbeđuje objektivnu procenu perioda neizvesnosti i omogućava donošenje odluka zasnovanih na merljivim i statistički pouzdanim informacijama. Fazi model se koristi u okolnostima u kojima nije moguće obezbediti tačne numeričke vrednosti ulaznih podataka, već se oni opisuju aproksimativno. Primena ovih modela omogućila je dublje razumevanje uticaja neizvesnosti na efikasnost proizvodnog sistema, kao i pouzdaniju procenu vrednosti ciljne funkcije u poređenju sa determinističkim pristupima.

Ostvareni rezultati istraživanja direktno podržavaju postavljene početne hipoteze i u potpunosti korespondiraju sa očekivanim naučnim i praktičnim doprinosima. U okviru doktorske disertacije realizovani su sledeći rezultati:

- **Identifikovani su najznačajniji izazovi sa kojima se MSP suočavaju u procesu upravljanja resursima, sa posebnim fokusom na ograničene kapacitete, promene u potražnji i nedostatak naprednih alata za podršku odlučivanju.** U prvom poglavlju doktorske disertacije sprovedeno je anketno istraživanje sa ciljem analize izazova sa kojima se suočavaju MSP. Rezultati istraživanja, predstavljeni u poglavlju 1.1, ukazuju na to da većina preduzeća i dalje koristi tradicionalne metode za planiranje i raspoređivanje resursa, dok savremeni ERP sistemi, karakteristični za velike kompanije, nisu široko zastupljeni usled ograničenih finansijskih mogućnosti. Čak 62% ispitanih preduzeća oslanja se na tradicionalno planiranje resursa, dok je upotreba naprednih softvera zabeležena kod svega 5% preduzeća i to uglavnom u većim kompanijama, dok ostalih 33% koriste računarske tehnologije, ali se njihova primena odnosi na jednostavne alate poput Excel-a i drugih... Kao glavni razlozi za to navode se ograničene finansijske mogućnosti i nedovoljno ljudskih resursa u delu srednjeg menadžmenta koji bi se bavio navedenim problemima. U cilju prevazilaženja identifikovanih izazova, razvijen je određeni broj modela, zasnovanih na naprednim alatima veštačke inteligencije i verovatnoće i statistike, u cilju povećanja produktivnosti i konkurentnosti preduzeća na tržištu (poglavlje 5). Razvijeni modeli su tako koncipirani da budu prihvatljivi potrebama i finansijskim mogućnostima MSP. Posebno je značajno da je svih 100% ispitanika iskazalo spremnost za primenu naprednih metoda, pod uslovom da bi njihova efikasnost dovela do unapređenja proizvodnog procesa.

- **Sprovedena je kritička analiza dostupne literature u posmatranoj oblasti, čime je identifikovana oblast istraživanja i definisani su istraživački pravci u širem kontekstu planiranja i raspoređivanja resusa.** U drugom poglavlju doktorske disertacije, na osnovu analize dostupne literature, identifikovana je potencijalna oblast istraživanja i izdvojeno je pet istraživačkih pravaca kao osnova za dalji tok istraživanja (poglavlje 2). Cilj ovog poglavlja nije samo da pruži sveobuhvatan uvid u dosadašnja saznanja, već i da kreira osnovu za razvoj inovativnih metodoloških pristupa u razmatranoj oblasti.
- **Formulisan je novi naučni pristup koji uključuje integraciju alata veštačke inteligencije i teorije verovatnoće, sa konkretnim predlozima za postizanje optimalnih rezultata i unapređenje postojećih naučnih metoda.** Pregledom relevantne literature utvrđeno je da su dosadašnja istraživanja u velikoj meri zasnovana na determinističkim modelima, dok primena savremenih alata veštačke inteligencije predstavlja potencijal za razvoj novih modela koji bi bili prilagođeni potrebama i mogućnostima MSP i koji bi uspešno rešavali probleme realnih proizvodnih okruženja u uslovima neizvesnosti. U skladu s tim, u četvrtom poglavlju doktorske disertacije predstavljen je novi, naučno utemeljen pristup u oblasti planiranja i raspoređivanja resursa. U okviru ovog poglavlja analizirane su metode koje čine osnovu za izgradnju optimizacionih modela razrađenih u narednim delovima disertacije. Istraživanje je fokusirano na klasifikaciju različitih optimizacionih pristupa i njihovu specifičnu primenu u kontekstu planiranja i raspoređivanja resursa u proizvodnim sistemima. Poseban akcenat dat je metodama koje omogućavaju modeliranje neizvesnosti u ovim procesima, kroz primenu alata veštačke inteligencije, teorije verovatnoće i teorije fazi skupova.
- **Razvijeni su modeli za optimizaciju procesa planiranja i raspoređivanja resursa u uslovima neizvesnosti, primenom alata veštačke inteligencije i teorije verovatnoće (poglavlje 5).** Unapređene su postojeće optimizacione metode za rad sa slučajnim veličinama i fazi brojevima, čime je povećana tačnost, fleksibilnost i primenljivost modela u realnim uslovima. Rezultati optimizacije predstavljeni u petom i šestom poglavlju doktorske disertacije ukazuju na to da razvijeni modeli, zasnovani na primeni naučnih metoda, značajno unapređuju postojeće pristupe planiranja i raspoređivanja resursa. Implementacijom ovih modela povećava se sigurnost i stabilnost proizvodnih procesa, što direktno doprinosi ostvarivanju značajnih ušteda i generisanju konkretnih benefita za preduzeće.

- **Razvijen je ANFIS sistem koji omogućava izbor optimalnog optimizacionog algoritma u skladu sa karakteristikama konkretnog problema.** U petom poglavlju doktorske disertacije detaljno je predstavljen ANFIS sistem, koji značajno doprinosi optimalnom izboru odgovarajuće metode u cilju postizanja boljih rezultata u preduzeću. Primarni cilj ANFIS sistema jeste selekcija najbolje metode u odnosu na konkretan tip problema, čime se omogućava postizanje optimalnih rezultata.
- **Razvijena je metodologija za definisanje prioriteta poslova na osnovu zahteva proizvodnje, čime je omogućeno efikasnije upravljanje proizvodnim i logističkim procesima.** U petom i šestom poglavlju potvrđena je uspešnost predložene metodologije zasnovane na MCDM pristupu, čiji je cilj određivanje prioriteta poslova radi pravovremenog izvršenja i unapređenja postojećeg sistema koji se prethodno oslanjao na iskustvo radnika. Ovaj novi sistem odlučivanja pokazao je značajne prednosti, uključujući bolju organizaciju proizvodnog procesa i ostvarenje konkretnih benefita za preduzeće.
- **Sprovedena je analiza senzitivnosti i ocena robustnosti razvijenog modela kroz ispitivanje uticaja ulaznih parametara na kvalitet dobijenih rezultata.** U petom poglavlju doktorske disertacije sprovedena je analiza uticaja ulaznih optimizacionih parametara na krajnju funkciju cilja. Predložena metodologija zasniva se na primeni modela mašinskog učenja sa ciljem optimalnog izbora ulaznih parametara, kako bi se postigla optimalna rešenja korišćenjem odgovarajućeg optimizacionog algoritma. Na taj način, osim predikcije vrednosti ulaznih parametara, omogućena je i predikcija izlazne funkcije, koja direktno zavisi od ulaznih vrednosti u procesu optimizacije. Prednost ovakvog pristupa ogleda se u obezbeđivanju veće stabilnosti algoritma i postizanju optimalnih rešenja. Kako bi se potvrdila pouzdanost i stabilnost algoritma u procesu optimizacije modela fleksibilnog planiranja i raspoređivanja poslova, sprovedena je i dodatna analiza izbora ulaznih parametara primenom statističke metode ANOVA.
- **Verifikacija razvijenih modela izvršena je kroz realnu studiju slučaja planiranja i raspoređivanja resursa u kompaniji „DN Company“ koja se bavi proizvodnjom nameštaja.** U poglavlju 6 izvršeno je poređenje četri razvijena modela (determinističkog, klasičnog stohastičkog – zasnovanog na 95% intervalu poverenja, stohastičkog modela sa primenom metode konvolucije i fazi modela) na realnim podacima poslovanja kompanije „DN Company“ iz Vladičinog Hana. Rezultati su pokazali da sva četiri modela uspešno rešavaju postavljeni zadatak, a da se posebno

izdvajaju stohastički model zasnovan na diskretnoj konvoluciji i fazi model kao najpouzdaniji alati za planiranje i optimizaciju raspodele proizvodnih resursa u uslovima izražene neizvesnosti. U poređenju sa determinističkim modelima, kao i sa konvencionalnim stohastičkim pristupima, konvolucijski model omogućava precizniju i stabilniju procenu vrednosti ciljne funkcije. Fazi model se preporučuje kao odgovarajuća alternativna metoda u slučajevima kada precizni statistički podaci nisu dostupni, odnosno kada su ulazni parametri definisani pretežno na osnovu subjektivne procene.

Naučna saznanja do kojih se došlo realizacijom planiranih istraživanja omogućavaju jednostavnu modifikaciju i prilagođavanje razvijenog modela za primenu i u drugim oblastima planiranja logističkih sistema.

Praktičan rezultat doktorske disertacije, koji ima jasnu industrijsku primenu, predstavlja razvijena softverska aplikacija, koja ima za cilj direktnu praktičnu primenu razvijenih modela u svakodnevnom poslovanju MSP. Aplikacija pruža podršku u procesu planiranja i raspoređivanja resursa, izboru optimalnih strategija u uslovima neizvesnosti, kao i u definisanju prioriteta poslovnih aktivnosti. Na ovaj način potvrđeno je da istraživanja u okviru doktorske disertacije imaju i širi značaj, jer razvijeni alati i modeli, uz minimalnu modifikaciju, mogu pružiti konkretnu i neposrednu podršku MSP u rešavanju različitih svakodnevni logističkih zadataka. Time se doprinosi unapređenju njihove operativne efikasnosti, racionalnijem korišćenju resursa i jačanju njihove konkurentnosti na tržištu. Razvijena softverska aplikacija ima za cilj unapređenje procesa planiranja u MSP korišćenjem naprednih računarskih modela i algoritama optimizacije. Ova integracija omogućava efikasnije planiranje proizvodnje čime se smanjuju zastoji i povećava produktivnost proizvodnje. Razvijena aplikacija omogućava korisnicima, poput menadžera proizvodnje i planera, da efikasno planiraju proizvodni proces bez zahtevanja naprednog tehničkog znanja iz istraživane oblasti.

7.2 PRAVCI BUDUĆIH ISTRAŽIVANJA

Nakon uspešne praktične primene i verifikacije razvijenih modela, otvara se prostor za dalje unapređenje i proširenje postojećih rešenja. Kao prirodan nastavak istraživanja u doktorskoj disertaciji, predlažu se sledeći pravci istraživanja koji bi mogli dodatno proširiti i obogatiti oblast optimizacije proizvodnih resursa:

- Istraživanje i razvoj modela koji koriste napredne alate dubokog učenja (*eng. Reinforcement Learning*) za optimizaciju proizvodnih resursa u realnom vremenu.

Razvijanje sistema koji će automatski analizirati opterećenost i stanje mašina te samostalno optimizovati raspored proizvodnje i održavanja radi postizanja maksimalne efikasnosti;

- Razvoj sistema za prediktivno održavanje mašina, koristeći senzore za praćenje vibracija, temperature i drugih faktora kako bi se predvideli otkazi mašina pre nego što se dogode, čime bi se smanjili neočekivani zastoji u proizvodnji. Ovi podaci bi dalje bili uključeni u proces planiranja i raspoređivanja resursa;
- Integracija virtualne realnosti u nadgledanje proizvodnih parametara. Razvoj sistema koji koristi virtuelnu realnost za nadgledanje ključnih parametara mašina, uključujući rokove za preventivno ili korektivno održavanje i praćenje opterećenosti mašina, čime bi se poboljšalo donošenje odluka i smanjili zastoji;
- Razmatranje mogućnosti širenja razvijenih modela na optimizaciju resursa u okviru celokupnog lanca snabdevanja, čime bi se omogućila integrisana i efikasnija optimizacija resursa ne samo unutar preduzeća, već i kroz celokupan proces od dobavljača do krajnjeg korisnika;
- Implementacija senzora i elemenata kompijuterske vizije u proizvodnim linijama za automatsko prikupljanje detaljnih podataka o svakom proizvodu, uključujući vrstu proizvoda, mašinu koja se koristi, količinu obrađenog materija i vreme potrebno za obradu svake operacije pojedinačno. Na ovaj način bi se izbegao proces ručnog merenja, kao i mogućnost grešaka pri merenju vremena obrade poslova na mašinama. Ne treba zaboraviti da ulazni podaci su jedan od najbitnijih parametara za proces optimizacije od kojih zavisi i kvaliteta i pouzdanost dobijenih rešenja.

LITERATURA

1. Figar, N. (2007). *Upravljanje resursima preduzeća*. Ekonomski fakultet u Nišu.
2. Menne, F., Surya, B., Yusuf, M., Suriani, S., Ruslan, M., & Iskandar, I. (2022). Optimizing the financial performance of SMEs based on Sharia economy: Perspective of economic business sustainability and open innovation. *Journal of Open Innovation: Technology, Market, and Complexity*, 8(1), 18. <https://doi.org/10.3390/joitmc8010018>.
3. Republički zavod za statistiku. (2023). *Preduzeća po veličini i preduzetnici u Republici Srbiji*. <https://publikacije.stat.gov.rs/G2023/Pdf/G20236005.pdf>.
4. Pinedo, M. L. (1995). *Scheduling: Theory, algorithms, and systems*. Prentice Hall. ISBN: 978-0137067572.
5. Pinedo, M. L. (2005). *Planning and Scheduling in Manufacturing and Services*. Springer Series in Operations Research. New York University. ISBN 0-387-22198-0.
6. Pinedo, M. L. (2008). *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*. Springer Science+Business Media, New York University. ISBN: 978-0-387-78934-7.
7. Pinedo, M. L. (2002). *Scheduling: Theory, algorithms, and systems (2nd ed.)*. Prentice Hall. ISBN: 0-13-028138-7.
8. Baker, K. R. (1974). *Introduction to sequencing and scheduling*. New York: John Wiley & Sons.
9. Morton, T., & Pentico, D. W. (1993). *Heuristic scheduling systems: With applications to production systems and project management*. Wiley. ISBN: 978-0471574538.
10. Alharkan, I. M. (2005). *Algorithms for sequencing and scheduling*. Industrial Engineering Department, King Saud University.
11. Brucker, P. (2007). *Scheduling algorithms*. Springer Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-69516-5>.
12. Jonassen, D. H. (2000). Toward a design theory of problem-solving. *Educational Technology Research and Development*, 48(4), 63-85.
13. Kerzner, H. (2017). *Project management: A systems approach to planning, scheduling, and controlling (12th ed.)*. Wiley. ISBN: 978-1-119-16536-1.
14. Lewis P. (2001). *Project Planning, Scheduling, and Control*, Sixth Edition: The Ultimate Hands-On Guide to Bringing Projects in On Time and On Budget, ISBN: 978-0-07-174653-3.

15. Mihailović, D. (2012). *Metodologija naučnih istraživanja*. Fakultet organizacionih nauka. Univerzitet u Beogradu.
16. Rakićević, Z. M. (2018). *Podrška operativnom planiranju proizvodnje i upravljanju resursima u malim i srednjim preduzećima*. Fakultet organizacionih nauka. Univerzitet u Beogradu.
17. Stanković, A., Petrović, G., Marković, D., & Čojbašić, Ž. (2022). Solving flexible job shop scheduling problem with transportation time based on neuro-fuzzy suggested metaheuristics. *Acta Polytechnica Hungarica*, 19(4), 209–227. <https://doi.org/10.12700/APH.19.4.2022.4.11>.
18. Porter, M. E. (1980). *Competitive strategy: Techniques for analyzing industries and competitors*. Free Press.
19. Jalil, M. F., Lynch, P., Awang Marikan, D. A. B., & Md Isa, A. H. B. (2024). The influential role of artificial intelligence (AI) adoption in digital value creation for small and medium enterprises (SMEs): Does technological orientation mediate this relationship? *Artificial Intelligence Review*. <https://doi.org/10.1007/s00146-024-01969-1>.
20. Dito, R., Puteri, A. S., Wiendy, P. S., & Rediawan, M. (2023). The development of good micro, small and medium enterprises governance indicators. *Etikonomi*, 22(1), 93-118. <https://doi.org/10.15408/etk.v22i1.25625>.
21. Oztemel, E., & Özel, S. (2021). A conceptual model for measuring the competency level of small and medium-sized enterprises (SMEs). *Advances in Production Engineering & Management*, 16(1), 47-66. <https://doi.org/10.14743/APEM2021.1.384>.
22. Kim, S.-S. (2013). Measuring firm-level innovation capability of small and medium-sized enterprises with composite indicators. *Academy of Entrepreneurship Journal*, 19(3), 1-24.
23. Escobar-Sarmiento, V., & Linares-Vasquez, M. (2012). A model for measuring agility in small and medium software development enterprises. *Proceedings of the 2012 Latin American Computing Conference (CLEI)*, 1-10. <https://doi.org/10.1109/CLEI.2012.6427226>.
24. Del Giudice, M., Scuotto, V., Papa, A., Tarba, S. Y., Bresciani, S., & Warkentin, M. (2021). A self-tuning model for smart manufacturing SMEs: Effects on digital innovation. *Journal of Product Innovation Management*, 38(1), 68–89. <https://doi.org/10.1111/jpim.12560>.

25. Noorali, M., & Gilaninia, S. (2017). The role of small and medium-sized enterprises in development. *Nigerian Chapter of Arabian Journal of Business and Management Review*, 4(4), 36-40. <https://doi.org/10.12816/0040342>.
26. Bogdanova, M., Parashkevova, E., Veselinova, N., Lazarova, E., & Stoyanova, M. (2022). Challenges to the planning function in SMEs in the conditions of digital transformation. *Business Management*, <https://doi.org/10.3846/bm.2022.815>.
27. Qing, W., Tay, L., Chua, J., Ravi, K., & Cai, T. X. (2022). Implementing distribution requirement planning and scheduling system for lens manufacturing company. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*. <https://doi.org/10.1109/IEEM55944.2022.9989590>.
28. Becker, W., & Schmid, O. (2020). The right digital strategy for your business: An empirical analysis of the design and implementation of digital strategies in SMEs and LSEs. *Business Research*, 13(3), 985–1005. <https://doi.org/10.1007/s40685-020-00124-y>.
29. Canhoto, A., & Clear, F. (2020). Artificial intelligence and machine learning as business tools: A framework for diagnosing value destruction potential. *Business Horizons*, 63(2), 183–193. <https://doi.org/10.1016/j.bushor.2019.11.003>.
30. Aghazadeh, H., Zandi, F., Amoozad Mahdiraji, H., & Sadraei, R. (2023). Digital transformation and SME internationalisation: Unravelling the moderated-mediation role of digital capabilities, digital resilience and digital maturity. *Journal of Enterprise Information Management*. <https://doi.org/10.1108/JEIM-02-2023-0092>.
31. Kindström, D., Carlborg, P., & Nord, T. (2022). Challenges for growing SMEs: A managerial perspective. *Journal of Small Business Management*, 62(2), 700–723. <https://doi.org/10.1080/00472778.2022.2082456>.
32. Schkarin, T. and Dobhan, A. (2022). Prerequisites for Applying Artificial Intelligence for Scheduling in Small- and Medium-sized Enterprises. In *Proceedings of the 24th International Conference on Enterprise Information Systems - Volume 1: ICEIS*; ISBN 978-989-758-569-2; ISSN 2184-4992, SciTePress, pages 529-536. DOI: 10.5220/0011064000003179.
33. Wang, C. (2023). Factors influencing small and medium size enterprises development and digital maturity in Latin America. *Journal of Open Innovation: Technology, Market, and Complexity*. <https://doi.org/10.1016/j.joitmc.2023.100069>.

34. Sparrow, J. (1999). Using qualitative research to establish SME support needs. *Qualitative Market Research: An International Journal*. <https://doi.org/10.1108/13522759910270034>.
35. Vrontis, D., Chaudhuri, R., & Chatterjee, S. (2022). Adoption of digital technologies by SMEs for sustainability and value creation: Moderating role of entrepreneurial orientation. *Sustainability*, 14(13), 7949. <https://doi.org/10.3390/su14137949>.
36. Chu, Y.-Y. (2008). Measuring the new product development performance of small and medium enterprises in Taiwan. *Journal of Communication and Information Technology*, 133-150. <https://doi.org/10.7095/JCIT.200812.0133>.
37. Azem, M., Ahmed, M., Haider, S., & Sajjad, M. (2021). Expanding competitive advantage through organizational culture, knowledge sharing and organizational innovation. *Technology in Society*, 66, 101635. <https://doi.org/10.1016/j.techsoc.2021.101635>.
38. Umar Rufai, A., & Sani Yakubu, Y. (2023). Assessment of the challenges facing SMEs in Sardauna Local Government Area of Taraba State. *International Journal of Research and Innovation in Social Science*. <https://doi.org/10.47772/ijriss.2023.70576>.
39. Watney, C., & Auer, D. (2021). *Encouraging AI adoption by EU SMEs*. Progressive Policy Institute.
40. Arroyabe, M. F., Arranz, C. F. A., Fernandez De Arroyabe, I., & Fernandez De Arroyabe, J. C. (2024). Analyzing AI adoption in European SMEs: A study of digital capabilities, innovation, and external environment. *Technology in Society*, 79, 102733. <https://doi.org/10.1016/j.techsoc.2024.102733>.
41. Stanković, A., Marković, D., Petrović, G., & Čojbašić, Ž. (2020). Metaheuristics for the waste collection vehicle routing problem in urban areas. *Working and Living Environmental Protection*, 17(1), 1–16. <https://doi.org/10.22190/FUWLEP2001001S>.
42. Stanković, A., Petrović, G., Čojbašić, Ž., & Marković, D. (2020). An application of metaheuristic optimization algorithms for solving the flexible job-shop scheduling problem. *Operational Research in Engineering Sciences: Theory and Applications*, 3(3), 13-28. <https://doi.org/10.31181/oresta20303013s>.

43. Harary, F., Ross, I. C. (1957). A procedure for clique detection using the group matrix. *Sociometry*, 20(3), 205–215.
44. Land, A. H., & Doig, A. G. (1960). An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28(3), 497–520. <https://doi.org/10.2307/1910129>.
45. Lomnicki, Z. A. (1965). “Branch-and-Bound” algorithm for the exact solution of the three-machine scheduling problem. *Journal of the Operational Research Society*, 16(1), 89–100. <https://doi.org/10.1057/jors.1965.7>.
46. Brucker, P., & Thiele, O. (1996). A branch & bound method for the general-shop problem with sequence dependent setup-times. *OR Spektrum*, 18(3), 145–161. <https://doi.org/10.1007/BF01539706>.
47. Klein, R., Scholl, A. (1996). Maximizing the production rate in simple assembly line balancing — A branch and bound procedure. *European Journal of Operational Research*, 91(2), 367–385. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(95\)00047-X](https://doi.org/10.1016/0377-2217(95)00047-X).
48. Carlier, J., & Rebaï, I. (1996). Two branch and bound algorithms for the permutation flow shop problem. *European Journal of Operational Research*, 90(2), 238–251. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(95\)00352-5](https://doi.org/10.1016/0377-2217(95)00352-5).
49. Ostergard, P. R. J. (2002). A fast algorithm for the maximum clique problem. *Discrete Applied Mathematics*, 120(1-3), 197–207. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(01\)00209-3](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(01)00209-3).
50. Liu, G., Luh, P. B., & Resch, R. (1997). Scheduling permutation flow shops using the Lagrangian relaxation technique. *Annals of Operations Research*, 70, 171–189. <https://doi.org/10.1023/A:1018970020599>.
51. Thomalla, C. S. (2001). Job shop scheduling with alternative process plans. *International Journal of Production Economics*, 74(1–3), 125–134. [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(01\)00119-0](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(01)00119-0).
52. Zhou, B.-h., Yin, M., Lu, Z.-q. (2016). An improved Lagrangian relaxation heuristic for the scheduling problem of operating theatres. *Computers & Industrial Engineering*, 101, 490–503. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2016.09.003>.
53. Zhang, G., Gao, L., & Shi, Y. (2011). An effective genetic algorithm for the flexible job-shop scheduling problem. *Expert Systems with Applications*, 38(4), 3563–3573.

54. Chen, J. C., Wu, C.-C., Chen, C.-W., & Chen, K.-H. (2012). Flexible job shop scheduling with parallel machines using genetic algorithm and grouping genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 39(11), 10016-10021. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2012.01.211>.
55. Asadzadeh, L. (2015). A local search genetic algorithm for the job shop scheduling problem with intelligent agents. *Computers & Industrial Engineering*, 85, 376-383. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2015.04.006>.
56. Albadr, M. A., Tiun, S., Ayob, M., & Al-Dhief, F. (2020). Genetic algorithm based on natural selection theory for optimization problems. *Symmetry*, 12(11), 1758.
57. Rooyani, D., & Defersha, F. M. (2019). An efficient two-stage genetic algorithm for flexible job-shop scheduling. *IFAC-PapersOnLine*, 52(13), 2519-2524. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.11.585>.
58. Zhang, G., Hu, Y., Sun, J., & Zhang, W. (2020). An improved genetic algorithm for the flexible job shop scheduling problem with multiple time constraints. *Swarm and Evolutionary Computation*, 54(4), 100664. <https://doi.org/10.1016/j.swevo.2020.100664>.
59. Türkyılmaz, A., Senvar, Ö., Ünal, İ., & Bulkan, S. (2022). A hybrid genetic algorithm based on a two-level hypervolume contribution measure selection strategy for bi-objective flexible job shop problem. *Computers & Operations Research*, 141, 105694. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105694>.
60. Huang, K.-L., & Liao, C. J. (2008). Ant colony optimization combined with taboo search for the job shop scheduling problem. *Computers & Operations Research*, 35(4), 1030-1046. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2006.12.021>.
61. Ebrahimi, A., Jeon, H. W., Lee, S., Wang, C. (2020). Minimizing total energy cost and tardiness penalty for a scheduling-layout problem in a flexible job shop system: A comparison of four metaheuristic algorithms. *Computers & Industrial Engineering*, 141, 106295. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106295>.
62. Zhang, R., & Wu, C. (2010). A hybrid immune simulated annealing algorithm for the job shop scheduling problem. *Applied Soft Computing*, 10(1), 79-89. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2009.06.008>.

63. Cruz-Chávez, M. A., Martínez-Rangel, M., & Cruz-Rosales, M. H. (2015). Accelerated simulated annealing algorithm applied to the flexible job shop scheduling problem. *International Transactions in Operational Research*, 24(5). <https://doi.org/10.1111/itor.12195>.
64. Tamssaouet, K., Dauzère-Pérès, S., & Yugma, C. (2018). Metaheuristics for the job-shop scheduling problem with machine availability constraints. *Computers & Industrial Engineering*, 125, 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.07.009>.
65. Mati, Y. (2010). Minimizing the makespan in the non-preemptive job-shop scheduling with limited machine availability. *Computers & Industrial Engineering*, 59(4), 537-543. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2010.06.010>.
66. Azem, S., Aggoune, R., & Dauzère-Pérès, S. (2008). Disjunctive and time-indexed formulations for non-preemptive job shop scheduling with resource availability constraints. In *Industrial Engineering and Engineering Management, 2007 IEEE International Conference on* (pp. 1-5). IEEE. <https://doi.org/10.1109/IEEM.2007.4419298>.
67. Tamssaouet, K., Dauzère-Pérès, S., Knopp, S., Bitar, A., & Yugma, C. (2022). Multiobjective optimization for complex flexible job-shop scheduling problems. *European Journal of Operational Research*, 296(1), 87-100. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.03.069>.
68. Zhang, C. Y., Li, P. G., Guan, Z. L., & Rao, Y. Q. (2007). A tabu search algorithm with a new neighborhood structure for the job shop scheduling problem. *Computers & Operations Research*, 34(11), 3229-3242. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2006.05.006>.
69. Fan, J., Shen, W., Gao, L., Zhang, C., & Zhang, Z. (2021). A hybrid Jaya algorithm for solving flexible job shop scheduling problem considering multiple critical paths. *Journal of Manufacturing Systems*, 60, 298-311.
70. Jamili, A. (2019). Job shop scheduling with consideration of floating breaking times under uncertainty. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 78, 28-36. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2018.10.007>.
71. Wang, S., Liu, G., Gao, M., Cao, S., Guo, A., & Wang, J. (2020). Heterogeneous comprehensive learning and dynamic multi-swarm particle swarm optimizer with two mutation operators. *Information Sciences*, 540, 175-201. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2020.06.027>.

72. Tang, H., Chen, R., Li, Y., Peng, Z., Guo, S., & Du, Y. (2019). Flexible job-shop scheduling with tolerated time interval and limited starting time interval based on hybrid discrete PSO-SA: An application from a casting workshop. *Applied Soft Computing*, 78, 176-194. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2019.02.011>.
73. Huang, Y. M., & Lin, J. C. (2011). A new bee colony optimization algorithm with idle-time-based filtering scheme for open shop-scheduling problems. *Expert Systems with Applications*, 38(5), 5438-5447. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.10.021>.
74. Sheikh, H., Prins, C., & Schrijvers, E. (2023). Artificial intelligence: Definition and background. In *Mission AI. Research for Policy*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-21448-6_2.
75. Russell, S., & Norvig, P. (2020). *Artificial Intelligence: A Modern Approach* (4th Edition). Pearson.
76. Sarker, I. H. (2021). Machine learning: Algorithms, real-world applications and research directions. *SN Computer Science*, 2, 160. <https://doi.org/10.1007/s42979-021-00592-x>.
77. Sarker, I. H. (2021). Deep learning: A comprehensive overview on techniques, taxonomy, applications and research directions. *SN Computer Science*, 2, 420. <https://doi.org/10.1007/s42979-021-00815-1>.
78. Akasheh, M., A., Malik, E., F., Hujran, O., Zaki, N., (2024). A decade of research on machine learning techniques for predicting employee turnover: A systematic literature review, *Expert Systems with Applications*, Volume 238, Part E, 121794, ISSN 0957-4174, <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.121794>.
79. Yamashiro, H., & Nonaka, H. (2021). Estimation of processing time using machine learning and real factory data for optimization of parallel machine scheduling problem. *Operations Research Perspectives*, 8(C). Elsevier. DOI: 10.1016/j.orp.2021.100196.
80. Pravin, P. S., Tan, J. Z. M., Yap, K. S., & Wu, Z. (2022). Hyperparameter optimization strategies for machine learning-based stochastic energy efficient scheduling in cyber-physical production systems. *Digital Chemical Engineering*, 4, 100047. <https://doi.org/10.1016/j.dche.2022.100047>.
81. Hu, J., Wang, H., Tang, H.-K., Kanazawa, T., Gupta, C., & Farahat, A. (2023). Knowledge-enhanced reinforcement learning for multi-machine integrated production and maintenance scheduling. *Computers & Industrial Engineering*, 185, 109631. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109631>.

82. Amin, A., Iqbal, M. S., & Shahbaz, M. H. (2024). Development of intelligent fault-tolerant control systems with machine learning, deep learning, and transfer learning algorithms: A review. *Expert Systems with Applications*, 238(Part B), 121956. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.121956>.
83. Zhang, J., Cheng, L., Liu, C., Zhao, Z., & Mao, Y. (2023). Cost-aware scheduling systems for real-time workflows in cloud: An approach based on Genetic Algorithm and Deep Reinforcement Learning. *Expert Systems with Applications*, 234, 120972. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.120972>.
84. Liu, X., Chu, F., Zheng, F., Chu, C., & Liu, M. (2021). Parallel machine scheduling with stochastic release times and processing times. *International Journal of Production Research*, 59(20), 6327-6346. <https://doi.org/10.1080/00207543.2020.1812752>.
85. Sui, Y., & Wang, Z. (2022). Parallel identical machines scheduling to minimize the maximum inter-completion time with uncertain processing time. *IFAC-PapersOnLine*, 55(10), 2599-2604. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.10.101>.
86. Chang, Z., Ding, J. Y., & Song, S. (2019). Distributionally robust scheduling on parallel machines under moment uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 272(3), 832-846. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.07.007>.
87. Ali, Y.A., Awwad, E.M., Al-Razgan, M., Maarouf, A., (2023). Hyperparameter Search for Machine Learning Algorithms for Optimizing the Computational Complexity. *Processes*, 11, 349. <https://doi.org/10.3390/pr11020349>.
88. Bergstra, J., Bardenet, R., Bengio, Y., Kégl, B., (2011). Algorithms for hyperparameter optimization. In Proceedings of the 25th Annual Conference on Neural Information Processing Systems, *Advances in Neural Information Processing Systems* 24. pp. 1–9.
89. Teerasoponpong, S., Sopadang, A., (2021). A simulation-optimization approach for adaptive manufacturing capacity planning in small and medium-sized enterprises, *Expert Systems with Applications*, Volume 168, 114451, ISSN 0957-4174, <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.114451>.
90. Tremblet, D., Thevenin, S., & Dolgui, A. (2022). Predicting makespan in flexible job shop scheduling problem using machine learning. *IFAC-PapersOnLine*, 55(10), 1-6. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.09.305>.
91. Li, Z., & Chen, Y. (2023). Minimizing the makespan and carbon emissions in the green flexible job shop scheduling problem with learning effects. *Scientific Reports*, 13, 6369. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-33615-z>.

92. Tiacci, L., & Rossi, A. (2024). A discrete event simulator to implement deep reinforcement learning for the dynamic flexible job shop scheduling problem. *Simulation Modelling Practice and Theory*. <https://doi.org/10.1016/j.simpat.2024.102948>.
93. Reddy, B. S. P., & Rao, C. S. P. (2011). Flexible manufacturing systems modelling and performance evaluation using AutoMod. *International Journal of Simulation Modelling*, 10(2), 78-90. [https://doi.org/10.2507/IJSIMM10\(2\)3.176](https://doi.org/10.2507/IJSIMM10(2)3.176).
94. Kumar, G., & Bisoniya, T.S. (2015). The Simulation Optimization of a Flexible Manufacturing System with Arena. *International journal of engineering research and technology*, 4.
95. Thenarasu, M., Rameshkumar, K., Rousseau, J., & Anbuudayasankar, S. P. (2022). Development and analysis of priority decision rules using MCDM approach for a flexible job shop scheduling: A simulation study. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 114, 102416. <https://doi.org/10.1016/j.simpat.2021.102416>.
96. Ohno, T. (1978). *Toyota production system: Beyond large-scale production*. Diamond Inc.
97. Liker, J. K. (2004). *The Toyota way: 14 management principles from the world's greatest manufacturer*. McGraw-Hill.
98. Aytug, H. (1999). Simulation Analysis of Order and Kanban Sequencing Rules in a Kanban-Controlled Flow Shop. *Simulation*, 72, 212 - 220.
99. Adnan, A. N. B., Jaffar, A. B., Yusoff, N. B., & Abdul Halim, N. H. B. (2013). Implementation of just in time production through Kanban system. *Industrial Engineering Letters*, 3(6), 11. Retrieved from <http://www.iiste.org>.
100. Suri, R. (2018). *The practitioner's guide to POLCA: The production control system for high-mix, low-volume and custom products*. Productivity Press. <https://doi.org/10.4324/9781351170765>.
101. Fernandes, N. O., Thürer, M., Mirzaei, N., Pinto Ferreira, L., Silva, F. J. G., & Carmo-Silva, S. (2020). POLCA control in two-stage production systems. *Procedia Manufacturing*, 51, 1491–1496. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2020.10.207>.
102. Suri, R. (1998). *Quick response manufacturing: A companywide approach to reducing leadtimes*. Cambridge: Productivity Press. <http://dx.doi.org/10.4324/9781482278101>.
103. Chong, K. E., Ching, H. W., & Siong, B. C. (2015). Paired-cell overlapping loops of cards with authorization simulation in job shop environment. *International Journal of*

- Mechanical & Mechatronics Engineering* (IJMME-IJENS), 15(3). Retrieved April 14, 2025.
104. Firat, M., De Meyere, J., Martagan, T., & Genga, L. (2022). Optimizing the workload of production units of a make-to-order manufacturing system. *Computers & Operations Research*, 138, 105530. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105530>.
105. Hendry, L., Land, M., Stevenson, M., & Gaalman, G. (2008). Investigating implementation issues for workload control (WLC): A comparative case study analysis. *International Journal of Production Economics*, 112(1), 452-469. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2007.05.012>.
106. Henrich, P. (2005). *Applicability aspects of workload control in job shop production* [Doctoral dissertation, University of Groningen]. Labyrinth Publication.
107. Thürer, M., Silva, C., Stevenson, M., & Land, M. (2012). Improving the applicability of workload control (WLC): The influence of sequence-dependent set-up times on workload-controlled job shops. *International Journal of Production Research*, 50(13), 6419–6430. <https://doi.org/10.1080/00207543.2011.648275>.
108. Tomić, M. (2016). *Unapređenje modela organizacije i upravljanja poslovnim procesima u industrijskim uslužnim preduzećima* [Doctoral dissertation, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka].
109. Marjanović, M., Mihailović, I., & Spasić, K. (n.d.). *Strategijski menadžment*. Visoka poslovna škola strukovnih studija Leskovac. ISBN: 978-86-84331-73-3.
110. Perić, M. (2018). *Upravljanje promenama u finansijama korporacije u funkciji unapređenja korporativnog upravljanja* (Doctoral dissertation). Univerzitet Union, Beogradska Bankarska Akademija, Fakultet za bankarstvo, osiguranje i finansije, Beograd.
111. Bertsekas D. P., (1999) *Nonlinear Programming* (Athenas Scientific, Belmont, MA).
112. Boyd, S., Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-83378-3.
113. Yang, X. S. (2010). *Engineering Optimization: An introduction with metaheuristic applications*. University of Cambridge.
114. Petrović, G. (2013). *Višekriterijumska optimizacija procesa održavanja tehničkih sistema primenom verovatnosnih metoda i veštačke inteligencije* [Doktorska disertacija, Mašinski fakultet u Nišu].

115. Dantzig, G. B. (1955). Linear programming under uncertainty. *Management Science*, 1(3-4), 197-206. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1.3-4.197>.
116. Vujošević, M. (1988). *Metode optimizacije*. Naučna knjiga, Fakultet organizacionih nauka.
117. Mihajlović, I., Milijić, N., & Jovanović, A. (2016). *Upravljanje proizvodnjom*. Tehnički fakultet u Boru, Univerzitet u Beogradu.
118. Petrović, G., Milić, P. Đ., & Madić, M. (2018). *Kvantitativna logistika: verovatnoća, statistika i slučajni procesi sa primenama*. Niš: Mašinski fakultet.
119. Marković, D. S. (2018). *Razvoj logističkog modela za upravljanje komunalnim otpadom primenom heurističkih metoda* [Doktorska disertacija, Mašinski fakultet u Nišu].
120. Daniëls, F. M. J. (2013). *On minimizing the probabilistic makespan for the flexible job shop scheduling problem with stochastic processing times*. Eindhoven University of Technology.
121. Sen, S. (2013). Stochastic programming. In *Encyclopedia of operations research and management science* (pp. 1486-1497). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1153-7_1005.
122. Lei, D. (2011). Simplified multi-objective genetic algorithms for stochastic job shop scheduling. *Applied Soft Computing*, 11(8), 4991-4996. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2011.06.001>.
123. Parzen, E., 1960, *Modern probability theory and its applications*: John Wiley and Sons, New York, 464 p.
124. Thomas, J. A. (1977). A computer method to calculate the convolution of statistical distributions. *Mathematical Geology*, 9(6), 481-488.
125. Evans, D. L., & Leemis, L. M. (2004). Algorithms for computing the distributions of sums of discrete random variables. *Mathematical and Computer Modelling*, 0, 1-10. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2004.03.002>.
126. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X).
127. Laarhoven, P. J. M., & Pedrycz, W. (1983). A fuzzy extension of Saaty's priority theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 11(3), 229-241.
128. Wang, S., Wang, L., Xu, Y., & Liu, M. (2013). An effective estimation of distribution algorithm for the flexible job-shop scheduling problem with fuzzy processing time.

- International Journal of Production Research*, 51(12), 3778-3793.
<https://doi.org/10.1080/00207543.2013.765077>.
129. Stanković, A., & Petrović, G. (2025). Priority decision rules with a fuzzy MCDM approach for solving flexible job shop problem: A real case study of optimizing manufacturing. *Acta Polytechnica Hungarica*, 22(1), 143–162.
<https://doi.org/10.12700/APH.22.1.2025.1.8>.
130. Glover, F. (1986). Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & Operations Research*, 13(5), 533-549.
[https://doi.org/10.1016/0305-0548\(86\)90048-1](https://doi.org/10.1016/0305-0548(86)90048-1).
131. Holland, J. H. (1962). Outline for a logical theory of adaptive systems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 3, 297-314.
<https://doi.org/10.1145/800230.800236>.
132. Stanković, A., Petrović, G., Marković, D., & Marković, S. (2021). Solving the unrelated parallel machine scheduling problem with setup times. In *Proceedings of the Eighth International Conference Transport and Logistics (Vol. 8, pp. 64-70)*. Retrieved from <http://til.masfak.ni.ac.rs/index.php/en/about-the-conference>.
133. Marković, D., Stanković, A., Marinković, D., & Pamučar, D. (2024). Metaheuristic algorithms for the optimization of integrated production scheduling and vehicle routing problems in supply chains. *Tehnički vjesnik – Technical Gazette*, 31(3), 800–807. <https://doi.org/10.17559/TV-20240207001318>.
134. Stanković, A., Petrović, G., Turudija, R., Marković, D., & Čojbašić, Ž. (2025). Hybrid machine learning approach for parallel machine scheduling under uncertainty. *Expert Systems with Applications*, 279, 127427. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2025.127427>.
135. Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598), 671–680.
<https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671>.
136. Kshirsagar, R., Jones, S., & Lawrence, J. (2020). Optimization of TIG welding parameters using a hybrid Nelder-Mead-evolutionary algorithms method. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 4(1), 10.
<https://doi.org/10.3390/jmmp4010010>.
137. Stanković, A., Marković, D., Petrović, G., & Čojbašić, Ž. (2019). A simulated annealing and particle swarm optimization for the vehicle routing problem and communal waste collection in urban areas. In *Proceedings of the 14th International*

- Conference on Accomplishments in Mechanical and Industrial Engineering (DEMI 2019)*. Faculty of Mechanical Engineering, University of Banja Luka.
138. Stanković, A., Petrović, G., Čojbašić, Ž., Madić, M., & Tomić, N. (2019). An application of a genetic algorithm for the flexible job-shop scheduling problem. In *Proceedings of the 7th International Conference Transport and Logistics (TIL 2019)* (pp. 123–130).
 139. Simić, N., Stefanović, M., Milenkov, M., Stanković, A., & Labović Vukić, D. (2025). Model for resource allocation in the public sector based on strategic importance and quality. *Tehnički vjesnik – Technical Gazette*, 32(2), 628–636. <https://doi.org/10.17559/TV-20240805001902>.
 140. Marković, D., Petrović, G., Čojbašić, Ž., & Stanković, A. (2020). The vehicle routing problem with stochastic demands in an urban area – A case study. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*, 18(1), 107–120. <https://doi.org/10.22190/FUME190318021M>.
 141. Stanković, A., Petrović, G., Marković, D., Čojbašić, Ž., & Simić, N. (2020). Metaheuristički algoritmi za rešavanje fleksibilnog problema raspoređivanje radnih mesta. *IMK-14-Istraživanje i razvoj*, 26(2), 49-56. University of Kragujevac, Faculty of Mechanical and Civil Engineering, Kraljevo.
 142. Stanković, A., Petrović, G., Marković, D., & Marković, S. (2021). Solving the unrelated parallel machine scheduling problem with setup times. In *Proceedings of the 8th International Conference Transport and Logistics (TIL 2021)* (pp. 65–72). University of Niš, Faculty of Mechanical Engineering.
 143. Simić, N., Stanković, A. G., Mačužić, I., & Petrović, G. S. (2021). Possibility of implementing the Lean Six Sigma concept on logistics processes. In *Proceedings of the 15th International Conference on Accomplishments in Mechanical and Industrial Engineering (DEMI 2021)* (pp. 330–338). University of Banja Luka, Faculty of Mechanical Engineering.
 144. Turudija, R., Radović, L., Stanković, A., & Stojković, M. (2023). Multi-criteria decision making in turning operations using AHP, TOPSIS and WASPAS methods. In *Proceedings of the 13th International Conference on Information Society and Technology (ICIST 2023)*.
 145. Marković, D., Nikolić, L., Stanković, A., & Marković, S. (2023). Hybrid waste collection system. In *Proceedings of the 9th International Conference Transport and*

- Logistics (TIL 2023)* (pp. 133–137). University of Niš, Faculty of Mechanical Engineering.
146. Marković, D., Marković, S., Stanković, A., & Milić, P. (2023). Development of a conceptual model of an expert system for dynamic vehicles routing for municipal waste collection. *Innovative Mechanical Engineering*, 2(3), 54–65.
147. Kennedy, J., & Eberhart, R. C. (1995). Particle swarm optimization. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks* (pp. 1942–1948).
148. Di Caro, G. A., Ducatelle, F., & Gambardella, L. M. (2008). *Ant colony optimization for routing in mobile ad hoc networks in urban environments*. Dalle Molle Institute for Artificial Intelligence, Manno, Switzerland.
149. Marković, D., Stanković, A., Petrović, G., Trajanović, M., & Čojbašić, Ž. (2019). Genetic and ant colony optimization based communal waste collection vehicle routing. *Conference on Information Society and Technology*, 209–212.
150. Karaboga, D., & Basturk, B. (2007). A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: Artificial bee colony (ABC) algorithm. *Journal of Global Optimization*, 39(3), 459–471. <https://doi.org/10.1007/s10898-007-9149-x>.
151. Jang, J., Sun, C., & Mizutani, E. (1997). *Neuro-fuzzy and soft computing: A computational approach to learning and machine intelligence*. Prentice Hall.
152. Čojbašić, Ž. (2002). *Razvoj novih inteligentnih adaptivnih fazi i hibridnih upravljačkih sistema* [Doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu, Mašinski fakultet]. Niš: Ž. Čojbašić.
153. Vesović, M. V., & Jovanović, R. Ž. (2022). *Adaptivni neuro fazi sistemi u identifikaciji, modelovanju i upravljanju – pregled stanja u oblasti istraživanja*. Tehnika, 78(4), 439–452. <https://doi.org/10.5937/tehnika2204439V>.
154. Jauševac, G. (2018). *Model višekriterijumske analize stručnih kompetencija studenta zasnovanih na informacionim tehnologijama* [Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Tehnički fakultet »Mihajlo Pupin« Zrenjanin].
155. Petrović, G., Mihajlović, J., Čojbašić, Ž., Madić, M., & Marinković, D. (2019). Comparison of three fuzzy MCDM methods for solving the supplier selection problem. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*, 17(3), 455–469. <https://doi.org/10.22190/FUME190420039P>.
156. Saaty, T. L. (1980). *The Analytical Hierarchy Process: Planning, priority setting, resource allocation*. McGraw-Hill.

157. Yang, J., & Xu, H. (2022). Hybrid memetic algorithm to solve multiobjective distributed fuzzy flexible job shop scheduling problem with transfer. *Processes*, 10(8), 1517. <https://doi.org/10.3390/pr10081517>.
158. Zarbakhshnia, N., Soleimani, H., & Ghaderi, H. (2018). Sustainable third-party reverse logistics provider evaluation and selection using fuzzy SWARA and developed fuzzy COPRAS in the presence of risk criteria. *Applied Soft Computing*, 65, 307–319.
159. Zavadskas, E. K., Turskis, Z., Stević, Ž., & Mardani, A. (2020). Modelling procedure for the selection of steel pipes supplier by applying fuzzy AHP method. *Operations Research and Engineering Sciences: Theory and Applications*, 3(1), 39–53.
160. Chang, D.-Y. *Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP*. Eur. J. Oper. Res. 1996, 95, 649–65.
161. Van Laarhoven, P.; Pedrycz, W. (1983). *A fuzzy extension of Saaty's priority theory*. Fuzzy Sets Syst. 1983, 11, 229–241.
162. Petrović, G., Pavlović, J., Madić, M., & Marinković, D. (2022). Optimal synthesis of loader drive mechanisms: A group robust decision-making rule generation approach. *Machines*, 10(5), 329. <https://doi.org/10.3390/machines10050329>.
163. Petrović, G., Mihajlović, J., Marković, D., Hashemkhani Zolfani, S., & Madić, M. (2023). Comparison of Aggregation Operators in the Group Decision-Making Process: A Real Case Study of Location Selection Problem. *Sustainability*, 15(10), 8229. <https://doi.org/10.3390/su15108229>.
164. Pamucar, D., & Ecer, F. (2020). Prioritizing the weights of the evaluation criteria under fuzziness: The fuzzy full consistency method—FUCOM-F. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*, 18(3), 419–437.
165. Fazlollahtabar, H., Smailbašić, A., & Stević, Ž. (2019). FUCOM method in group decision-making: Selection of forklift in a warehouse. *Decision Making: Applications in Management Engineering*, 2(1), 49–65.
166. Pamucar, D., Ecer, F., & Deveci, M. (2021). Assessment of alternative fuel vehicles for sustainable road transportation in the United States using integrated fuzzy FUCOM and neutrosophic fuzzy MARCOS methodology. *Science of The Total Environment*, 788, 147763. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2021.147763>.
167. Pamucar, D., Deveci, M., Canitez, F., & Bozanic, D. (2020). A fuzzy Full Consistency Method-Dombi-Bonferroni model for prioritizing transportation demand management

- measures. *Applied Soft Computing*, 87, 105952. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2019.105952>.
168. Stević, Ž., Ibrahimović, F., & Mirčetić, D. (2020). Racionalizacija procesa u skladišnom sistemu primenom ABC analize i višekriterijumskog odlučivanja. *Tehnika*, 75(5), 621–628. <https://doi.org/10.5937/tehnika2005621S>.
169. Chakraborty, S., & Zavadskas, E. K. (2014). Applications of WASPAS method in manufacturing decision making. *Informatica*, 25(1), 1–20. <https://doi.org/10.15388/Informatica.2014.01>.
170. Turskis, Z., Zavadskas, E. K., Antucheviciene, J., & Kosareva, N. (2015). A hybrid model based on fuzzy AHP and fuzzy WASPAS for construction site selection. *International Journal of Computers, Communications and Control*, 10(6), 873-888. <https://doi.org/10.15837/ijccc.2015.6.2013>.
171. Zavadskas, E. K., Antucheviciene, J., Hajiagha, S. H. R., & Hashemi, S. S. (2014). Extension of weighted aggregated sum product assessment with interval-valued intuitionistic fuzzy numbers (WASPAS-IVIF). *Applied Soft Computing*, 24, 1013-1021. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2014.08.023>.
172. Yoosefzadeh-Najafabadi, M., Earl, H. J., Tulpan, D., Sulik, J., & Eskandari, M. (2021). *Application of machine learning algorithms in plant breeding: Predicting yield from hyperspectral reflectance in soybean*. *Frontiers in Plant Science*, 11. <https://doi.org/10.3389/fpls.2020.624273>.
173. Ali, Y. A., Awwad, E. M., Al-Razgan, M., & Maarouf, A. (2023). Hyperparameter search for machine learning algorithms for optimizing the computational complexity. *Processes*, 11(2), 349. <https://doi.org/10.3390/pr11020349>.
174. Karimi-Mamaghan, M., Mohammadi, M., Meyer, P., Karimi-Mamaghan, A., & Talbi, E. (2022). Machine learning at the service of meta-heuristics for solving combinatorial optimization problems: A state-of-the-art. *European Journal of Operational Research*, 296(2), 393-422. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.04.032>.
175. Yeardley, A. S., Ejeh, J. O., Allen, L., Brown, S. F., & Cordiner, J. (2022). Integrating machine learning techniques into optimal maintenance scheduling. *Computers and Chemical Engineering*, 166, 107958. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2022.107958>.
176. Sanati, H., Moslehi, G., & Reisi-Nafchi, M. (2023). Unrelated parallel machine energy-efficient scheduling considering sequence-dependent setup times and time-of-use

- electricity tariffs. *EURO Journal on Computational Optimization*, 11, 100052. <https://doi.org/10.1016/j.ejco.2022.100052>.
177. Nikolić, M., & Zečević, A. (2019). *Masinsko učenje* [Machine Learning]. Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu.
178. Navlani, A. (2018). *Decision tree classification in Python*. Decision Tree Algorithm. Accessed April 11, 2019.
179. Song, Y. Y., & Lu, Y. (2015). Decision tree methods: Applications for classification and prediction. *Shanghai Archives of Psychiatry*, 27(2), 130-135. <https://doi.org/10.11919/j.issn.1002-0829.215044>.
180. Zahedi, L., Mohammadi, F.G., Amini, M.H., Amini, M.H., (2021). An Optimal Hyperparameter Tuning Approach for Machine Learning Algorithms. *In Proceedings of the 20th IEEE International Conference on Machine Learning and Applications (ICMLA)*, 13–16, pp. 1138–1145.
181. Garrido-Merchán, E. C., Fernández-Sánchez, D., & Hernández-Lobato, D. (2023). Parallel predictive entropy search for multi-objective Bayesian optimization with constraints applied to the tuning of machine learning algorithms. *Expert Systems with Applications*, 215, 119328. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.119328>.
182. Rainio, O., Teuho, J., & Klén, R. (2024). Evaluation metrics and statistical tests for machine learning. *Scientific Reports*, 14, 6086. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-56706-x>.
183. Dejanović, A. (2014). *Razvoj strategijskog modela upravljanja savremenim marketing koncepcijama u funkciji unapređenja performansi preduzeća* [Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Departman za industrijsko inženjerstvo i menadžment].
184. Baer, T. (2019). The Model Development Process. In *Understand, Manage, and Prevent Algorithmic Bias*. Apress, Berkeley, CA. https://doi.org/10.1007/978-1-4842-4885-0_4.
185. Kulesza, A., Loewe, A., Stenti, A., Nicolò, C., Morales-Orcajo, E., Courcelles, E., Sips, F., Pappalardo, F., Russo, G., Horner, M., Viceconti, M., De Cunha Maluf-Burgman, M., Lesage, R., & Kreuzer, S. (2024). Model Development. In Viceconti, M., & Emili,

- L. (eds) *Toward Good Simulation Practice*. Synthesis Lectures on Biomedical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-48284-7_3.
186. Graybeal, W. T., & Pooch, U. (1980). *Simulation: Principles and methods*. Winthrop Publishers. Cambridge, UK.
187. Naderi, B., Fatemi Ghomi, S. M. T., Aminnayeri, M., & Zandieh, M. (2011). Modeling and scheduling open shops with sequence-dependent setup times to minimize total completion time. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 53(5-8), 751–760. <https://doi.org/10.1007/s00170-010-2853-6>.
188. Cho, Y., & Sahni, S. (1981). Preemptive scheduling of independent jobs with release and due times on open, flow and job shops. *Operations Research*, 29(3), 511–522.
189. Frostig, E., & Adiri, I. (1985). Three-machine flow shop stochastic scheduling to minimize distribution of schedule length. *Naval Research Logistics Quarterly*, 32(2), 179–183.
190. Johnson, S. M. (1954). Optimal two- and three-stage production schedules with set-up time included. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1, 61–68. <https://doi.org/10.1002/nav.3800010110>.
191. Allaoui, H., & Artiba, A. (2009). Johnson's algorithm: A key to solve optimally or approximately flow shop scheduling problems with unavailability periods. *International Journal of Production Economics*, 121(1), 81–87. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2008.09.018>.
192. Özgüven, C., Özbakır, L., & Yavuz, Y. (2010). Mathematical models for job-shop scheduling problems with routing and process plan flexibility. *Applied Mathematical Modelling*, 34(6), 1539–1548. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.09.002>.
193. Guohui, Z., Jinghe, S., Xing, L., Guodong, W., & Yangyang, Y. (2019). Solving flexible job shop scheduling problems with transportation time based on improved genetic algorithm. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 16(3), 1334–1347. <https://doi.org/10.3934/mbe.2019065>.
194. Ranjbar, M., Davari, M., & Leus, R. (2012). Two branch-and-bound algorithms for the robust parallel machine scheduling problem. *Computers & Operations Research*, 39(7), 1652–1660.

195. Ghaedy-Heidary, E., Nejati, E., Ghasemi, A., & Torabi, S. A. (2024). A simulation optimization framework to solve stochastic flexible job-shop scheduling problems—Case: Semiconductor manufacturing. *Computers & Operations Research*, 163, 106508. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2023.106508>.
196. Zhang, W., Zhang, X., Hao, X., Gen, M., Zhang, G., & Yang, W. (2023). Multi-stage hybrid evolutionary algorithm for multiobjective distributed fuzzy flow-shop scheduling problem. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 20(3), 4838–4864. <https://doi.org/10.3934/mbe.2023224>
197. Türkakın, M. O., Arditi, D., & Manisalı, E. (2021). Comparison of heuristic priority rules in the solution of the resource-constrained project scheduling problem. *Sustainability*, 13, 9956. <https://doi.org/10.3390/su13179956>.
198. Meier, S., Klarmann, S., Thielen, N., Pfefferer, C., Kuhn, M., & Franke, J. (2023). A process model for systematically setting up the data basis for data-driven projects in manufacturing. *Journal of Manufacturing Systems*, 71, 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2023.08.024>.
199. Agencije za privredne registre Republike Srbije. <https://www.companywall.rs/firma/dn-company-doo-vladicin-han/MMQ5hba0>.

PRILOZI

U nastavku doktorske disertacije predstavljeni su prilozi koji prate tok dugogodišnjeg istraživanja: **Prilog 1:** Prikaz istraživačke ankete koja je imala za cilj da prikaže ocenu nivoa primene savremenih alata i naučnih metoda u procesu upravljanja resursima.

ISTRAŽIVAČKA ANKETA

Upravljanje resursa, stepen poznavanja i primene savremenih alata veštačke inteligencije u Republici Srbiji,

Anketa koja je pred Vama predstavlja analizu u okviru naučnog istraživanja i potvrđivanja početne hipoteze doktorske disertacije kandidata Aleksandra Stankovića, naziv teme: Razvoj modela za optimalno planiranje i raspoređivanje resursa u malim i srednjim preduzećima u uslovima neizvesnosti. Istraživanja u okviru ankete imaju za cilj da ukažu na stepen poznavanja i primene savremenih alata veštačke inteligencije, pre svega optimizacije, fazi logike, modela mašinskog učenja kao i alata teorija verovatnoća. Anketa je anonimna i rezultati istraživanja će se isključivo koristiti u svrhu istraživanja i izrade doktorske disertacije. U istraživačkoj anketi učestvuju svi zaposleni iz dela srednjeg menadžmenta, svi koji su zaduženi za upravljanje resursima u okviru preduzeća.

Unapred se zahvaljujem na saradnji,
Aleksandar Stanković, asistent
Katedra za transportnu tehniku i logistiku
Mašinski fakultet u Nišu

Section 1

...

Osnovne informacije o preduzeću:

1. Veličina preduzeća (broj zaposlenih):

- ☐ 1-9 (mikro)
- ☐ 10-49 (malo)
- ☐ 50-249 (srednje)
- ☐ 250+ (veliko)

2. Delatnost preduzeća:

- ☐ Proizvodnja
- ☐ Trgovina
- ☐ Usluge
- ☐ Drugo

3. Koliko dugo poslužete?

- ☐ 0-5 godina
- ☐ 6-10 godina
- ☐ 11-20 godina
- ☐ Preko 20 godina

Planiranje i upravljanje resursima

4. Kako upravljate proizvodnim resursima u vašem preduzeću?

- ☐ Tradicionalno (ručno, na osnovu iskustva)
- ☐ Korišćenje softverskih alata (ERP, MRP, Excel)
- ☐ Korišćenje optimizacionih modela
- ☐ Korišćenje alata veštačke inteligencije
- ☐ Kombinacija metoda

5. Da li koristite softverske alate za planiranje i optimizaciju resursa?

- ☐ Da
- ☐ Ne

6. Ako da, koje softverske alate koristite? (moguće višestruko biranje)

- ☐ ERP (Enterprise Resource Planning)
- ☐ MRP (Material Requirements Planning)
- ☐ Excel ili slični alati
- ☐ Specifični softver za vašu industriju
- ☐ ASPROVA
- ☐ DELMIA ORTEMS
- ☐ ORSOFT
- ☐ ACUMATICA
- ☐ OPCENTER
- ☐ Drugo

Poznavanje i primena veštačke inteligencije (AI)

7. Koliko ste upoznati sa konceptima veštačke inteligencije u proizvodnji?

- ☐ Uopšte nisam upoznat
- ☐ Delimično upoznat
- ☐ Upoznat, ali ne koristimo
- ☐ Upoznat i koristimo u radu

8. Da li koristite veštačku inteligenciju za optimizaciju resursa u vašem preduzeću?

- ☐ Da, u potpunosti
- ☐ Delimično
- ☐ Ne, ali planiramo
- ☐ Ne, i nemamo u planu

9. Koje alate veštačke inteligencije koristite?

- ☐ Algoritmi mašinskog učenja (ML)
- ☐ Neuronske mreže (ANN)
- ☐ Fuzzy logika
- ☐ Metaheurističke algoritme
- ☐ Ne koristimo

10. U kojim oblastima najviše primenjujete AI? (moguće višestruko biranje)

- ☐ Optimizacija raspodele resursa
- ☐ Predikcija proizvodnih zastoja
- ☐ Smanjenje proizvodnih troškova
- ☐ Upravljanje zalihama
- ☐ Kvalitet proizvoda
- ☐ Planiranje kapaciteta i zaliha
- ☐ Drugo

11. Da li koristite optimizacione modele u vašem preduzeću i koje metode primenjujete

- ☐ Da, koristimo optimizacione modele sa metaheurističkim metodama
- ☐ Da, koristimo optimizacione modele, ali ne koristimo metaheurističke metode
- ☐ Delimično, koristimo optimizacione modele u određenim delovima procesa
- ☐ Ne koristimo trenutno, ali planiramo uvođenje optimizacionih modela
- ☐ Ne koristimo optimizacione modele i nemamo planove za njihovu implementaciju

Prepreke i izazovi

12. Koje prepreke sprečavaju implementaciju AI alata u vašem preduzeću? (moguće višestruko biranje)

- ☐ Nedostatak znanja i stručnosti
- ☐ Visoki troškovi implementacije
- ☐ Nedovoljna svest o prednostima AI
- ☐ Nedostatak podrške menadžmenta
- ☐ Neadekvatna infrastruktura
- ☐ Nema tržišne potrebe
- ☐ Drugo

Perspektiva i planovi

13. Da li planirate da u naredne 1-3 godine implementirate AI alate u proizvodne procese?

- ☐ Da
- ☐ Ne
- ☐ Nismo sigurni

14. Da li planirate da u naredne 1-3 godine implementirate optimizacione modele u proizvodne procese?

- ☐ Da
- ☐ Ne
- ☐ Nismo sigurni

15. Koliko smatrate da bi primena ovih metoda mogla poboljšati poslovanje vašeg preduzeća?

- ☐ Ne bi imala značajan uticaj
- ☐ Poboljšala bi poslovanje za 5-10%
- ☐ Poboljšala bi poslovanje za 10-20%
- ☐ Poboljšala bi poslovanje za preko 20%

16. Koja oblast bi bila najvažnija za primenu ovih metoda i alata u vašem preduzeću?

- ☐ Upravljanje resursima
- ☐ Optimizacija troškova
- ☐ Unapređenje kvaliteta
- ☐ Predikcija i sprečavanje zastoja
- ☐ Drugo

17. Da li smatrate da bi dodatna edukacija o primeni AI u proizvodnji bila korisna za vas i vaše zaposlene?

- ☐ Da
- ☐ Ne
- ☐ Ne znam

18. Da li smatrate da bi dodatna edukacija o primeni optimizacionih modela u proizvodnji bila korisna za vas i vaše zaposlene?

- ☐ Da
- ☐ Ne
- ☐ Ne znam

19. Koliko vam je potrebno podrške za implementaciju AI alata i metoda optimizacije?

- ☐ Potpuna podrška (od edukacije do tehničke implementacije)
- ☐ Dovoljno je obezbediti obuku i edukaciju
- ☐ Nije potrebna podrška, sami bismo se snažili

20. Da li biste koristili softver koji je posebno namenjen MSP, čiji je osnovni cilj povećanje produktivnosti proizvodnje?

- ☐ Da, odmah bismo implementirali takav softver
- ☐ Da, ali nakon dodatnih analiza i procena
- ☐ Možda, u zavisnosti od troškova i koristi
- ☐ Ne, trenutno nemamo potrebu za takvim softverom
- ☐ Ne, nemamo resurse za implementaciju takvog softvera

21. Da li biste implementirali softver ako biste znali da će sa sigurnošću povećati produktivnost proizvodnog procesa, a samim tim i dobit preduzeća?

- ☐ Da
- ☐ Ne

22. Kolika je verovatnoća da ćete ovakav softver i primenu naprenih tehnika optimizacije preporučiti prijatelju ili kolegi? *

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Uopšte nije verovatno

Izuzetno verovatno

Unapred se zahvaljujem na saradnji,

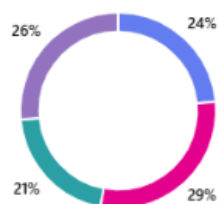
Aleksandar Stanković, asistent,
e-mail: aleksandar.stanković@masfak.ni.ac.rs
Katedra za transportnu tehniku i logistiku
Mašinski fakultet u Nišu, Univerzitet u Nišu

Prilog 2: Rezultati istraživačke ankete:

1. Veličina preduzeća (broj zaposlenih):

[More details](#)

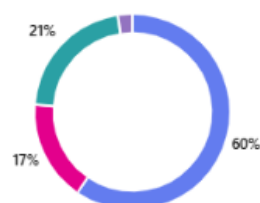
1-9 (mikro)	8
10-49 (malo)	10
50-249 (srednje)	7
250+ (veliko)	9



2. Delatnost preduzeća:

[More details](#)

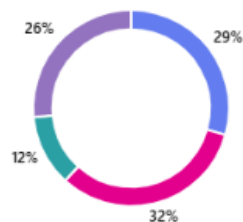
Proizvodnja	25
Trgovina	7
Usluge	9
Drugo	1



3. Koliko dugo poslujete?

[More details](#)

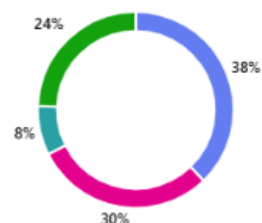
0-5 godina	10
6-10 godina	11
11-20 godina	4
Preko 20 godina	9



4. Kako upravljate proizvodnim resursima u vašem preduzeću?

[More details](#)

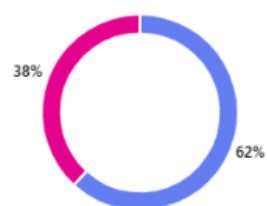
Tradicionalno (ručno, na osnovu iskustva)	14
Korišćenje softverskih alata (ERP, MRP, Excel)	11
Korišćenje optimizacionih modela	3
Korišćenje alata veštačke inteligencije	0
Kombinacija metoda	9



5. Da li koristite softverske alate za planiranje i optimizaciju resursa?

[More details](#)

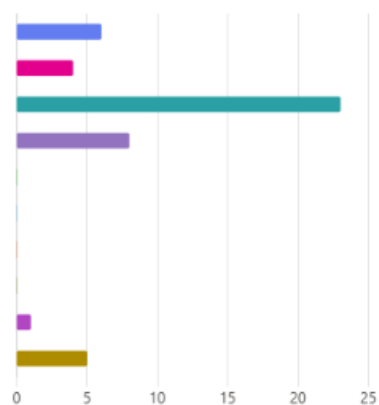
- Da 21
- Ne 13



6. Ako da, koje softverske alate koristite? (moguće višestruko biranje)

[More details](#)

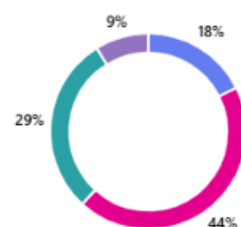
- ERP (Enterprise Resource Planning) 6
- MRP (Material Requirements Planning) 4
- Excel ili slični alati 23
- Specifični softver za vašu industriju 8
- ASPROVA 0
- DELMIA ORTEMS 0
- ORSOFT 0
- ACUMATICA 0
- OPCENTER 1
- Drugo 5



7. Koliko ste upoznati sa konceptima veštačke inteligencije u proizvodnji?

[More details](#)

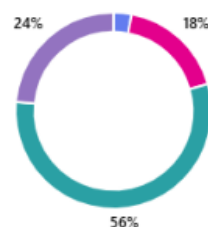
- Uopšte nisam upoznat 6
- Delimično upoznat 15
- Upoznat, ali ne koristimo 10
- Upoznat i koristimo u radu 3



8. Da li koristite veštačku inteligenciju za optimizaciju resursa u vašem preduzeću?

[More details](#)

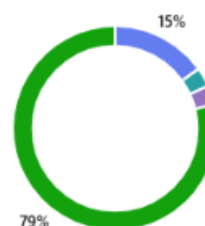
- Da, u potpunosti 1
- Delimično 6
- Ne, ali planiramo 19
- Ne, i nemamo u planu 8



9. Koje alate veštačke inteligencije koristite?

[More details](#)

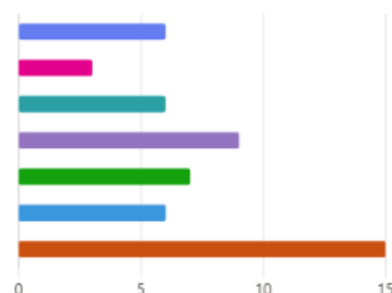
● Algoritmi mašinskog učenja (ML)	5
● Neuronske mreže (ANN)	0
● Fuzzy logika	1
● Metaheurističke algoritme	1
● Ne koristimo	26



10. U kojim oblastima najviše primenjujete AI? (moguće višestruko biranje)

[More details](#)

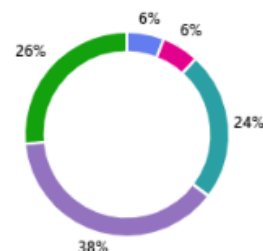
● Optimizacija raspodele resursa	6
● Predikcija proizvodnih zastoja	3
● Smanjenje proizvodnih troškova	6
● Upravljanje zalihama	9
● Kvalitet proizvoda	7
● Planiranje kapaciteta i zaliha	6
● Drugo	15



11. Da li koristite optimizacione modele u vašem preduzeću i koje metode primenjujete

[More details](#)

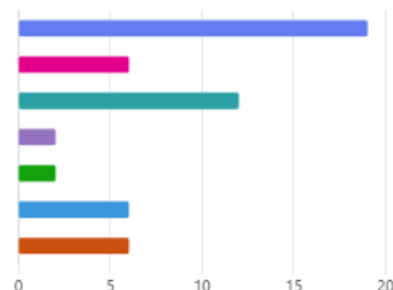
● Da, koristimo optimizacione modele sa metaheurističkim metodama	2
● Da, koristimo optimizacione modele, ali ne koristimo metaheurističke metode	2
● Delimično, koristimo optimizacione modele u određenim delovima procesa	8
● Ne koristimo trenutno, ali planiramo uvođenje optimizacionih modela	13
● Ne koristimo optimizacione modele i nemamo planove za njihovu implementaciju	9



12. Koje prepreke sprečavaju implementaciju AI alata u vašem preduzeću? (moguće višestruko biranje)

[More details](#)

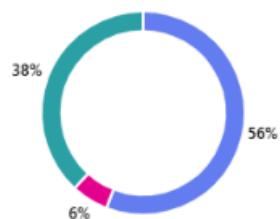
● Nedostatak znanja i stručnosti	19
● Visoki troškovi implementacije	6
● Nedovoljna svest o prednostima AI	12
● Nedostatak podrške menadžmenta	2
● Neadekvatna infrastruktura	2
● Nema tržišne potrebe	6
● Drugo	6



13. Da li planirate da u naredne 1-3 godine implementirate AI alate u proizvodne procese?

[More details](#)

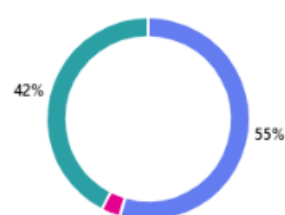
Da	19
Ne	2
Nismo sigurni	13



14. Da li planirate da u naredne 1-3 godine implementirate optimizacione modele u proizvodne procese?

[More details](#)

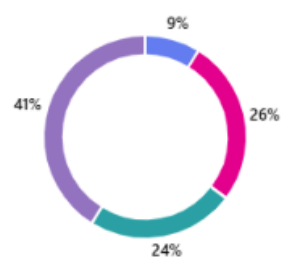
Da	18
Ne	1
Nismo sigurni	14



15. Koliko smatrate da bi primena ovih metoda mogla poboljšati poslovanje vašeg preduzeća?

[More details](#)

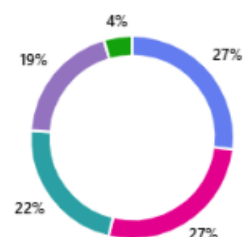
Ne bi imala značajan uticaj	3
Poboljšala bi poslovanje za 5-10%	9
Poboljšala bi poslovanje za 10-20%	8
Poboljšala bi poslovanje za preko 20%	14



16. Koja oblast bi bila najvažnija za primenu ovih metoda i alata u vašem preduzeću?

[More details](#)

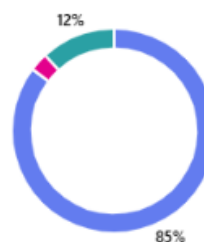
Upravljanje resursima	18
Optimizacija troškova	18
Unapređenje kvaliteta	15
Predikcija i sprečavanje zastoja	13
Drugo	3



17. Da li smatrate da bi dodatna edukacija o primeni AI u proizvodnji bila korisna za vas i vaše zaposlene?

[More details](#)

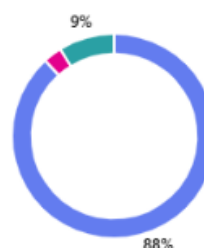
Da	29
Ne	1
Ne znam	4



18. Da li smatrate da bi dodatna edukacija o primeni optimizacionih modela u proizvodnji bila korisna za vas i vaše zaposl...

[More details](#)

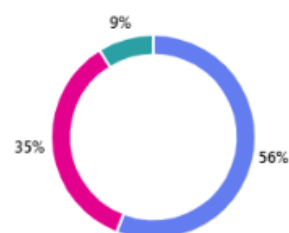
Da	30
Ne	1
Ne znam	3



19. Koliko vam je potrebno podrške za implementaciju AI alata i metoda optimizacije?

[More details](#)

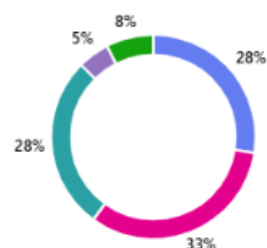
Potpuna podrška (od edukacije do tehničke implementacije)	19
Dovoljno je obezbediti obuku i edukaciju	12
Nije potrebna podrška, sami bismo se snažili	3



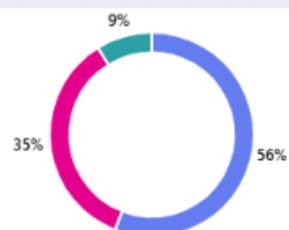
20. Da li biste koristili softver koji je posebno namenjen MSP, čiji je osnovni cilj povećanje produktivnosti proizvodnje?

[More details](#)

Da, odmah bismo implementirali takav softver	11
Da, ali nakon dodatnih analiza i procena	13
Možda, u zavisnosti od troškova i koristi	11
Ne, trenutno nemamo potrebu za takvim softverom	2
Ne, nemamo resurse za implementaciju takvog softvera	3

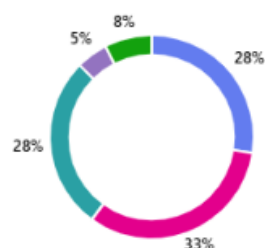


● Potpuna podrška (od edukacije do tehničke implementacije)	19
● Dovoljno je obezbediti obuku i edukaciju	12
● Nije potrebna podrška, sami bismo se snažili	3



20. Da li biste koristili softver koji je posebno namenjen MSP, čiji je osnovni cilj povećanje produktivnosti proizvodnje? [More details](#)

● Da, odmah bismo implementirali takav softver	11
● Da, ali nakon dodatnih analiza i procena	13
● Možda, u zavisnosti od troškova i koristi	11
● Ne, trenutno nemamo potrebu za takvim softverom	2
● Ne, nemamo resurse za implementaciju takvog softvera	3



21. Da li biste implementirali softver ako biste znali da će sa sigurnošću povećati produktivnost proizvodnog procesa, a sa... [More details](#)

● Da	32
● Ne	0



22. Kolika je verovatnoća da ćete ovakav softver i primenu naprenih tehnika optimizacije preporučiti prijatelju ili kolegi? [More details](#)

Promoters	13
Passives	15
Detractors	6



Prilog 3: Biografija autora doktorske disertacije:



ALEKSANDAR STANKOVIĆ

Asistent na Mašinskom Fakultetu u Nišu

Aleksandar Stanković rođen je 08.10.1992. godine u Vranju sa prebivalištem u Nišu, ul. Lazara Trifunovića 17

KONTAKT INFORMACIJE

+381 604810992

aleksandar.stankovic@masfak.ni.ac.rs

AKADEMSKA KARIJERA

Doktorske akademske studije upisuje 2016. godine na Mašinskom fakultetu u Nišu, obima 120 ESPB bodova, na studijskom programu Mašinsko inženjerstvo na katedri za Transportnu tehniku i logistiku. Nakon upisa doktorskih akademskih studija u narednom periodu polaže sve ispite. Kao student doktorskih akademskih studija bio je stipendista doktoranta Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije od 2016. do 2020. godine, od kada je angažovan kao istraživač na projektu: „Teorijsko – eksperimentalna istraživanja dinamike transportnih mašinskih sistema“, evidencioni broj projekta TR 3504.

Iste godine 30. decembra 2020.godine biran je u zvanje asistent i zaposlenje na Mašinskom fakultetu u Nišu. Profesionalna orijentacija Aleksandra Stankovića na doktorskim akademskim studijama je u okviru transporta i logistike, operacionih istraživanja, veštačke inteligencije, planiranja i raspoređivanja resursa. Angažovan je u okviru pedagoškog rada, angažovanje u nastavi na Mašinskom fakultetu u Nišu u izvođenju vežbi na osnovnim akademskim i master akademskim studijama na sledećim predmetima: Logistika preduzeća, Informacione tehnologije I, Operaciona istraživanja, Uvod u inteligentne transportne sisteme, Logistički centri, Urbani transport i logistika, Upravljanje održavanjem, Transportni tokovi, Uvod u inteligentne transportne sisteme, Logistika 4.0 i robotika.

U okviru doktorskih akademskih studija učestvuje na seminaru ECDL 2017. godine i stiče sertifikat pod nazivom „Akreditovani ispitivač“, 08.11.2017. godine. Takođe, učestvuje na jednogodišnjem modulu u okviru ERASMUS+ projekta: „Održivi inteligentni i ekološki transport i logistika u urbanom kontekstu: promocija standarda i principa Evropske unije u regionu jugoistočne Srbije“ u trajanju od 120 časova u periodu od 25.02.2017. do 17.06.2017. godine. Učestvuje kao član organizacionog odbora šeste, sedme i osme međunarodne konferencije Transport i logistika. Takođe, učestvuje i u poslovima Instituta Mašinskog fakulteta – saradnja sa privredom i izradom preko 20 izveštaja o ispitivanju.

Trenutno je angažovan na jednom nacionalnom i jednom međunarodnom projektu. Prijavio je temu doktorske disertacije i stekao sve uslove za odbranu iste. Objavio je preko 40 naučnih radova u časopisima od međunarodnog značaja kategorije: M14, M21a, M23, M50 i M33.

Budući planovi uključuju dalji napredak u akademskoj zajednici, kao i pokretanje sopstvenog biznisa u softverskoj industriji sa fokusom na razvoj aplikacija i inovativnih softverskih rešenja.

Trenutno obavlja funkciju predsednika Organizacionog odbora konferencije TIL2025.

OBRAZOVANJE

Osnovne studije: Mašinski fakultet u Nišu, 2015.

Master studije: Mašinski fakultet u Nišu, 2016. Nakon završetka master studija, dobio je pohvalu kao najbolji diplomirani student master akademskih studija za školsku 2015/2016. godinu.

Doktorske studije: Prijavio je doktorsku disertaciju pod naslovom „Razvoj modela za optimalno planiranje i raspoređivanje resursa u malim i srednjim preduzećima u uslovima neizvesnosti“ i ispunio sve uslove za njenu odbranu. Objavio je preko 40 naučnih radova u međunarodno priznatim časopisima iz svoje oblasti. Trenutno je zaposlen kao asistent na Mašinskom fakultetu u Nišu. Ispunio je sve uslove potrebne za odbranu doktorske disertacije. Trenutno obavlja funkciju predsednika Organizacionog odbora konferencije TIL2025.

VEŠTINE

- Veštačka inteligencija
- Mašinsko učenje
- Optimizacija
- Planiranje i raspoređivanje resursa
- Razvoj softverskih aplikacija
- Fazi logika
- Iskustvo u pisanju projekata
- Služi se engleskim jezikom

Izjava 1.**IZJAVA O AUTORSTVU**

Izjavljujem da je doktorska disertacija, pod naslovom:

„Razvoj modela za optimalno planiranje i raspoređivanje resursa u malim i srednjim preduzećima u uslovima neizvesnosti“

koja je odbranjena na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Nišu:

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da ovu disertaciju, ni u celini, niti u delovima, nisam prijavljivao/la na drugim fakultetima, niti univerzitetima;
- da nisam povredio/la autorska prava, niti zloupotrebio/la intelektualnu svojinu drugih lica.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci, koji su u vezi sa autorstvom i dobijanjem akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada, i to u katalogu Biblioteke, Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Nišu, kao i u publikacijama Univerziteta u Nišu.

U Nišu, 23.05.2025

Potpis autora disertacije:

Stanković Aleksandar

Izjava 2.

**IZJAVA O ISTOVETNOSTI ELEKTRONSKOG I ŠTAMPANOG OBLIKA
DOKTORSKE DISERTACIJE**

Naslov disertacije:

**„Razvoj modela za optimalno planiranje i raspoređivanje resursa u malim i srednjim
preduzećima u uslovima neizvesnosti“**

Izjavljujem da je elektronski oblik moje doktorske disertacije, koju sam predao/la za
unošenje u **Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu**, istovetan štampanom obliku.

U Nišu, 23.05.2025

Potpis autora disertacije:



Stanković Aleksandar

Izjava 3.**IZJAVA O KORIŠĆENJU**

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Nikola Tesla“ da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu unese moju doktorsku disertaciju, pod naslovom:

„Razvoj modela za optimalno planiranje i raspoređivanje resursa u malim i srednjim preduzećima u uslovima neizvesnosti“

Disertaciju sa svim prilogima predao/la sam u elektronskom obliku, pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju, unetu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, mogu koristiti svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la.

1. Autorstvo (CC BY)
2. Autorstvo – nekomercijalno (CC BY-NC)
- ③ 3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade (CC BY-NC-ND)
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima (CC BY-NC-SA)
5. Autorstvo – bez prerade (CC BY-ND)
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)²

U Nišu, 23.05.2025

Potpis autora disertacije:

Stanković Aleksandar

² Autor disertacije obavezan je da izabere i označi (zaokruži) samo jednu od šest ponuđenih licenci; opis licenci dat je u nastavku teksta.

TIPOVI LICENCE KREATIVNE ZAJEDNICE³

1. Autorstvo (CC BY)

Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora, na način određen od autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.

2. Autorstvo – nekomercijalno (CC BY-NC)

Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora, na način određen od autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada (CC BY-NC-ND)

Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora, na način određen od autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.

4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima (CC BY-NC-SA)

Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora, na način određen od autora ili davaoca licence, i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada

5. Autorstvo – bez prerada (CC BY-ND)

Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora, na način određen od autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)

Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora, na način određen od autora ili davaoca licence, i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.

³ Više o licencama Kreativne zajednice na adresi:

http://creativecommons.org.rs/?page_id=74CC. Ovaj tekst NIJE sastavni deo izjava autora!