

Sistemi linearnih jednačina

Teorija

Opšti sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m – broj jednačina, n – broj nepoznatih, $m = n$ – kvadratni sistem.

U matičnom obliku: $AX = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}.$$

Proširena matrica sistema:

$$P(A) = [A \mid b]_{m \times (n+1)}$$

Kroneker–Kaperlijeva teorema

Za sistem $A_{m \times n}$, $P(A)_{m \times (n+1)}$:

1. Ako je $\text{rang}(A) = \text{rang}(P(A)) = n$, sistem ima **jedinsteno rešenje**.
2. Ako je $\text{rang}(A) = \text{rang}(P(A)) < n$, sistem ima **beskonačno mnogo rešenja** ($n - \text{rang}(A)$ promenljivih je slobodno).
3. Ako je $\text{rang}(A) < \text{rang}(P(A))$, sistem **nema rešenja**.

Napomena 1: Rang matrice može se tretirati kao broj “korisnih” jednačina, tj. onih koje se međusobno ne mogu dobiti kao njihova kombinacija.

Napomena 2: Kada rang transformišemo na stepenaste forme, kolone sa slobodnim članovima odgovaraju slobodnim promenljivima.

Kramerovo pravilo

Za kvadratni sistem ($m = n$):

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

gde je A_k matrica dobijena zamenom k -te kolone matrice A kolonom slobodnih članova b .

1. Ako je $\det A \neq 0$, sistem ima jedinstveno rešenje (Kramerovo pravilo).
2. Ako je $\det A = 0$ i bar jedan $\det A_k \neq 0$, sistem nema rešenja.
3. Ako je $\det A = 0$ i svi $\det A_k = 0$, sistem ima beskonačno mnogo rešenja ili nema rešenja.

Zadaci

Zadatak 1

Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Rešenje – Jacobi metod:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y = 4 & / \cdot (-2) & \\ 2x + y = 1 & & \end{array}$$

$$x + 2y = 4, \quad -3y = -7 \Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{3}}$$

$$x = 4 - 2y = 4 - \frac{14}{3} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

Rešenje – matricom proširenja:

$$P(A) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2V_1 \rightarrow V_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -7 \end{array} \right]$$

$$V_2: -3y = -7 \Rightarrow y = \frac{7}{3}; \quad V_1: x = 4 - 2 \cdot \frac{7}{3} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(P(A)) = n = 2 \Rightarrow \text{jedinstveno rešenje: } (x, y) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Zadatak 2

Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

Rešenje:

$$P(A) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{-2V_1 \rightarrow V_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\text{rang}(A) = 1 = \text{rang}(P(A)) = 1 < n = 2 \Rightarrow$ beskonačno mnogo rešenja.

Slobodna promenljiva: $y = t \in \mathbb{R}$, pa je $x = 4 - 2t$.

Rešenje: $\mathcal{R} = \{(t, \frac{4-t}{2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$, tj. $x = t, y = \frac{4-t}{2}$.

Zadatak 3

Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

Rešenje:

$$P(A) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{-2V_1 \rightarrow V_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$\text{rang}(A) = 1 < \text{rang}(P(A)) = 2 \Rightarrow$ sistem **nema rešenja**.

Zadatak 4

Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} P(A) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{array} \right] & \xrightarrow{-2V_1 \rightarrow V_2, -3V_1 \rightarrow V_3, V_1 \rightarrow V_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 8 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-V_2 \rightarrow V_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 8 \end{array} \right] & \xrightarrow{V_3 \leftrightarrow V_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(P(A)) = 3, n = 4 \Rightarrow$ beskonačno mnogo rešenja, $4 - 3 = 1$ slobodna promenljiva.

Slobodna promenljiva: $x_4 = t \in \mathbb{R}$.

$$V_3: 4x_3 + 4t = 8 \Rightarrow x_3 + t = 2 \Rightarrow \boxed{x_3 = 2 - t}$$

$$V_2: -x_2 - 5(2 - t) - 5t = -10 \Rightarrow -x_2 - 10 + 5t - 5t = -10 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$$

$$V_1: x_1 + 0 + 2(2 - t) + 2t = 5 \Rightarrow x_1 + 4 = 5 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

$$\mathcal{R} = \{(1, 0, 2 - t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Zadatak 5

Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 5x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Za dat uslov $x_1 + x_2 = -1$ naći određeno rešenje.

Rešenje:

$$P(A) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2V_1 \rightarrow V_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{V_2 \rightarrow V_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(P(A))$, $n = 4 \Rightarrow$ beskonačno mnogo rešenja, $x_3 = t \in \mathbb{R}$ slobodna.

V_3 : $x_4 = 3$

V_2 : $-5x_2 + 8t - 3 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{8t-5}{5} = -1 + \frac{8}{5}t$

V_1 : $x_1 = -3x_2 + 2t - x_4 = -3(-1 + \frac{8}{5}t) + 2t - 3 = 3 - \frac{24}{5}t + 2t - 3 = -\frac{14t}{5}$

$$\mathcal{R} = \left\{ \left(-\frac{14t}{5}, -1 + \frac{8}{5}t, t, 3 \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Uslov $x_1 + x_2 = -1$: $-\frac{14t}{5} + (-1 + \frac{8}{5}t) = -1 \Rightarrow -\frac{6t}{5} = 0 \Rightarrow t = 0$

Određeno rešenje: $\boxed{x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 3}$

Zadatak 6

Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Rešenje:

$$P(A) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{-V_1 \rightarrow V_2, -3V_1 \rightarrow V_3, -4V_1 \rightarrow V_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-V_2 \rightarrow V_3, -V_2 \rightarrow V_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(P(A)) = n = 3 \Rightarrow$ jedinsteno rešenje.

V_3 : $2x_3 = -2 \Rightarrow \boxed{x_3 = -1}$

$$V_2: 2x_2 - 3(-1) = 3 \Rightarrow 2x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$$

$$V_1: x_1 - 0 + 2(-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

Rešenje: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, -1)$.

Zadatak 7

Rešiti sistem linearnih jednačina Kramerovim pravilom:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

Rešenje:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 2 - (-9 + 1 - 4) = 11 - (-12) = 23 \neq 0$$

Sistem ima jedinstveno rešenje.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 23 \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 46 \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 69$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{23}{23} = 1, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{46}{23} = 2, \quad z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{69}{23} = 3$$

Rešenje: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Zadatak 8

Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 2 \\ 5x - 5y + 3z = 3 \\ 6x - 8y + 5z = 5 \end{cases}$$

Rešenje:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & -5 & 3 \\ 6 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -25 - 54 - 80 - (-75 - 24 - 60) = -159 + 159 = 0$$

Pošto je $\det A = 0$, prelažimo na Jacobi metod:

$$P(A) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 3 & 3 \\ 6 & -8 & 5 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{-5V_1 \rightarrow V_2, -6V_1 \rightarrow V_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & -7 & -7 \\ 0 & 10 & -7 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{-V_2 \rightarrow V_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(P(A)), n = 3 \Rightarrow$ beskonačno mnogo rešenja ($z = t \in \mathbb{R}$ slobodna).

$$V_2: 10y - 7t = -7 \Rightarrow y = \frac{7t - 7}{10}$$

$$V_1: x = 2 + 3y - 2t = 2 + \frac{21t - 21}{10} - 2t = \frac{20 + 21t - 21 - 20t}{10} = \frac{t - 1}{10}$$

$$\mathcal{R} = \left\{ \left(\frac{t-1}{10}, \frac{7t-7}{10}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$