

Ekonomске funkcije

Matematika u inženjerskom menadžmentu

Osnovni pojmovi

Oznake

- P – cena (price)
- Q – količina (quantity)

Funkcija tražnje

$$Q_d = f(P) \quad (Q_d = Q_d(P))$$

– opadajuća funkcija.

Primer: $Q(P) = 180 - 3P$

Funkcija ponude

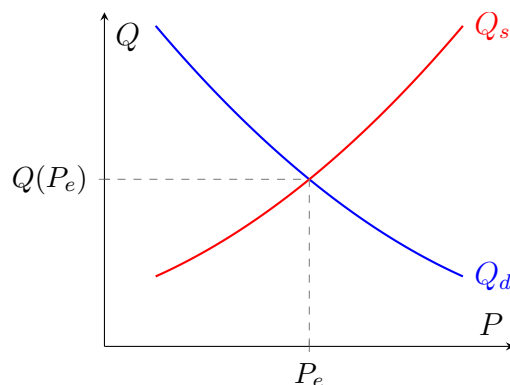
$$Q_s = g(P) \quad (Q_s = Q_s(P))$$

– rastuća funkcija

Ravnoteža na tržištu

Ravnoteža na tržištu: $Q_d = Q_s$

Tačka ravnoteže: $(P_e, Q(P_e))$



Odnos funkcije cene i funkcije tražnje

Funkcija cene: $P = P(Q)$, funkcija tražnje: $Q = Q(P)$ – inverzne su jedna drugoj.

Funkcija ukupnih prihoda (Total Revenue)

– u najprostijem obliku i pod uslovom da svi proizvodi imaju istu cenu:

$$TR(Q) = Q \cdot P(Q)$$

$$TR(P) = P \cdot Q(P)$$

Funkcija ukupnih troškova (Total Cost)

$$TC(Q) = C(Q) + C_0$$

C_0 – fiksni troškovi, $TC(0) = C_0$.

Funkcija prosečnih prihoda i troškova

$$AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q}, \quad AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}, \quad Q > 0$$

Funkcija dobiti (Profit)

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

Interval rentabilne proizvodnje

I_R : Q takvo da je $\Pi(Q) > 0$, tj. interval na kome je funkcija dobiti pozitivna. Dobija se rešavanjem nejednakosti $\Pi(Q) > 0$, tj. $TR(Q) > TC(Q)$.

Optimalna proizvodnja i maksimalna dobit

- Ukoliko postoji $Q = Q_{\max}$ iz intervala rentabilne proizvodnje za koji je dobit maksimalna, onda takav obim proizvodnje zovimo optimalna proizvodnja
- $\Pi_{\max} = \Pi(Q_{\max})$ – maksimalna dobit

Zadaci

Zadatak 1

Za koju cenu se postiže ravnoteža na tržištu ako je funkcija tražnje $Q_d = (P - 2)^2$, a ponude $Q_s = 2P - 1$?

Rešenje:

Ravnoteža: $Q_d(P) = Q_s(P)$:

$$(P - 2)^2 = 2P - 1$$

$$P^2 - 4P + 4 = 2P - 1$$

$$P^2 - 6P + 5 = 0$$

$$P_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$P_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad Q(P_1) = 9$$

$$P_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad Q(P_2) = 1$$

Zadatak 2

Dnevna tražnja za nekim artiklom data je funkcijom $Q(P) = -P^2 + 10P + 11$. Pri kojoj ceni P će tražnja biti maksimalna?

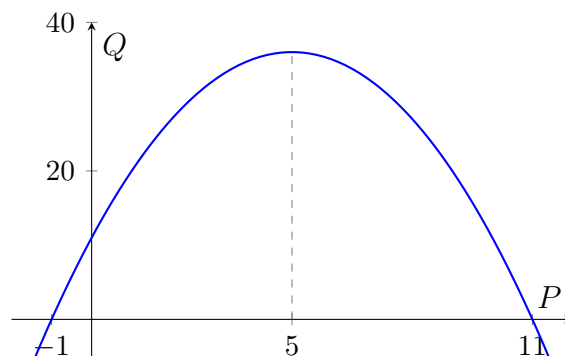
Rešenje:

Rešavamo $-P^2 + 10P + 11 = 0$:

$$P_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 44}}{-2} = \frac{-10 \pm 12}{-2} \quad \Rightarrow \quad P_1 = -1, \quad P_2 = 11$$

Parabola ima tememe (maksimum) u:

$$P_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{-2} = 5$$



Zadatak 3

Funkcija ukupnih troškova data je sa $TC(Q) = 3Q^2$, a funkcija prosečnih prihoda je $AR(Q) = -2Q + 5$.

- a) Odrediti funkciju ukupnih prihoda $TR(Q)$ i funkciju cene $P(Q)$.
- b) Odrediti funkciju tražnje.
- c) Odrediti interval rentabilne proizvodnje.
- d) Odrediti proizvodnju i cenu pri kojoj se dobiti ne postaje maksimalna.

Rešenje:

a) Iz $AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q}$ sledi $TR(Q) = Q \cdot AR(Q)$:

$$TR(Q) = Q(-2Q + 5) = -2Q^2 + 5Q$$

Iz $TR(Q) = Q \cdot P(Q)$:

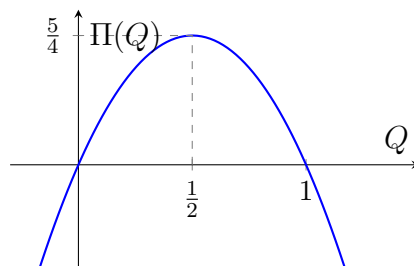
$$Q \cdot P(Q) = Q(-2Q + 5) \Rightarrow \boxed{P(Q) = -2Q + 5}$$

b) Funkcija tražnje (inverzna): iz $P = -2Q + 5$:

$$Q = \frac{-P + 5}{2} \Rightarrow \boxed{Q(P) = \frac{-P + 5}{2}}$$

c) Interval rentabilne proizvodnje $\Pi(Q) > 0$:

$$\begin{aligned}\Pi(Q) &= TR(Q) - TC(Q) = -2Q^2 + 5Q - 3Q^2 = -5Q^2 + 5Q \\ \Pi(Q) > 0 &\Leftrightarrow -5Q^2 + 5Q > 0 \Leftrightarrow -5Q(Q - 1) > 0 \\ -5Q^2 + 5Q &= 0 \Rightarrow Q_1 = 0, Q_2 = 1\end{aligned}$$



$$\boxed{I_R = (0, 1)}$$

d) Maksimum dobiti:

$$Q_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot (-5)} = \frac{1}{2}$$

$$\Pi\left(\frac{1}{2}\right) = -5 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5}{4} + \frac{5}{2} = \frac{5}{4} \quad \text{-- maksimalna dobit}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4 \quad \text{-- cena}$$

Zadatak 4

Data je funkcija ukupnih troškova $TC(Q) = e^Q(2Q^2 - Q + 1)$ i funkcija ukupnih prihoda $TR(Q) = e^Q(Q^2 + 3Q)$.

- Odrediti funkciju cene $P(Q)$, cenu pri granici $Q = 2$ i fiksne troškove.
- Odrediti funkciju dobiti.
- Odrediti interval rentabilne proizvodnje.

Rešenje:

a) $TR(Q) = Q \cdot P(Q)$:

$$\begin{aligned} e^Q(Q^2 + 3Q) &= Q \cdot P(Q) \\ e^Q \cdot Q(Q + 3) &= Q \cdot P(Q) \\ \Rightarrow P(Q) &= e^Q(Q + 3) \end{aligned}$$

Za $Q = 2$: $P(2) = e^2(2 + 3) = 5e^2$

Fiksni troškovi: $TC(0) = C_0$:

$$TC(0) = e^0(2 \cdot 0 - 0 + 1) = 1 \Rightarrow \boxed{C_0 = 1}$$

b)

$$\begin{aligned} \Pi(Q) &= TR(Q) - TC(Q) \\ &= e^Q(Q^2 + 3Q) - e^Q(2Q^2 - Q + 1) \\ &= e^Q(Q^2 + 3Q - 2Q^2 + Q - 1) \\ &= e^Q(-Q^2 + 4Q - 1) \end{aligned}$$

c) $I_R: \Pi(Q) > 0 \Leftrightarrow e^Q(-Q^2 + 4Q - 1) > 0$.

Budući da $e^Q > 0$ uvek, rešavamo $-Q^2 + 4Q - 1 > 0$:

$$Q_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = 2 \mp \sqrt{3}$$

Dakle $Q_1 = 2 - \sqrt{3} > 0$, $Q_2 = 2 + \sqrt{3} > 0$.

	$(-\infty, 2-\sqrt{3})$	$(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$	$(2+\sqrt{3}, +\infty)$
e^Q	+	+	+
$-Q^2 + 4Q - 1$	-	+	-
$\Pi(Q)$	-	+	-

	$-\infty$	0	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$	
e^Q	+	+	+	+	+	
$-Q^2 + 4Q - 1$	-	-	0	+	0	-
$\Pi(Q)$	-	-	0	+	0	-

$$\boxed{I_R = (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})}$$

Zadatak 5

Jedna firma raspolaže dve strane odvojeno od strane. Za prvu stranu funkcija cene je $P(Q) = Q - 1$, a za drugu $P(Q) = 22 - Q$. Funkcija ukupnih troškova za obe strane je $TC(Q) = 10Q - 28$.

- Odrediti funkcije uvršine za obe strane (interval rentabilne proizvodnje).
- Odrediti funkcije dobiti (ukupno iskorišćenje) za svaku stranku i uporediti obe od stranaca.
- Preporuka menadžment funkcije dobiti i učinak koga treba koristiti, a gde bi trebalo prekinuti.

Rešenje:

Strana I: $P(Q) = Q - 1$

$$Q = P + 1 \Rightarrow \boxed{Q(P) = P + 1}$$

$$TR_I(Q) = Q \cdot P(Q) = Q(Q - 1) = Q^2 - Q$$

$$\Pi_I(Q) = TR_I(Q) - TC(Q) = Q^2 - Q - 10Q + 28 = Q^2 - 11Q + 28$$

Rešavamo $\Pi_I(Q) = 0$:

$$Q_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2} \Rightarrow Q_1 = 4, Q_2 = 7$$

$$I_R^I = (0, 4) \cup (7, +\infty)$$

Strana II: $P(Q) = 22 - Q$

$$Q = 22 - P \Rightarrow \boxed{Q(P) = 22 - P}$$

$$TR_{II}(Q) = Q(22 - Q) = -Q^2 + 22Q$$

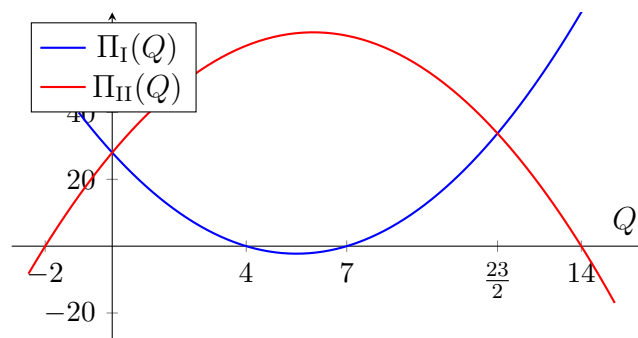
$$\Pi_{II}(Q) = -Q^2 + 22Q - 10Q + 28 = -Q^2 + 12Q + 28$$

Rešavamo $\Pi_{II}(Q) = 0$:

$$Q_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 112}}{-2} = \frac{-12 \pm 16}{-2} \Rightarrow Q_1 = -2, Q_2 = 14$$

$$I_R^{II} = (0, 14)$$

Maksimum dobiti (Strana II): $Q_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-2} = 6$



Presek $\Pi_I(Q) = \Pi_{II}(Q)$:

$$Q^2 - 11Q + 28 = -Q^2 + 12Q + 28$$

$$2Q^2 - 23Q = 0$$

$$Q(2Q - 23) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = 0, \quad Q_2 = \frac{23}{2}$$

- **Strana I** je isplativija za $Q > \frac{23}{2}$
- **Strana II** je isplativija za $Q \in \left(0, \frac{23}{2}\right)$