

Izvodi i primena izvoda

Matematika u inženjerskom menadžmentu

Izvod funkcije

Definicija izvoda

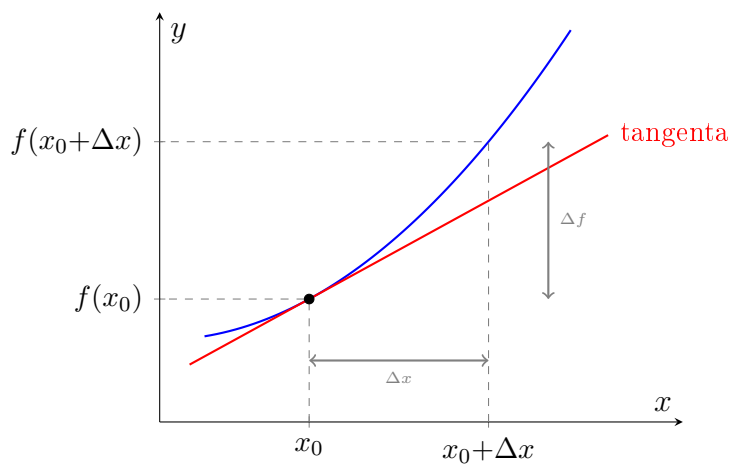
Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. **Izvod** funkcije f u tački x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Ekvivalentno, uz smenu $\Delta x = x - x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Geometrijski: $\tan \alpha = f'(x_0)$ – koeficijent pravca tangente na grafik funkcije u tački $(x_0, f(x_0))$.



Tablica izvoda

Osnovni izvodi			
f	f'	f	f'
$C = \text{const}$	0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\text{arctg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\text{arctg } x \quad (\text{arc cotg})$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$		
$\ln x$	$\frac{1}{x}$		
$\sin x$	$\cos x$		
$\cos x$	$-\sin x$		
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$		
$\text{ctg } x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		

Pravila diferenciranja

Pravila
$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$ $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ Izvod složene funkcije: $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ Korisno pamćenje: $(e^\square)' = e^\square \cdot (\square)'$, $(\ln \square)' = \frac{1}{\square} \cdot (\square)'$, $((\square)^\alpha)' = \alpha(\square)^{\alpha-1} \cdot (\square)'$

Primeri – Izvodi elementarnih funkcija

Primeri 1 – direktna primena tablice

$$1. f(x) = x \Rightarrow f'(x) = (x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$$

$$2. f(x) = 2x^4 \Rightarrow f'(x) = 2(x^4)' = 2 \cdot 4x^3 = 8x^3$$

$$3. f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$4. f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$5. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$6. f(x) = 3x^5 + 2x + e^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot 5x^4 + 2 \cdot 1 + 0 = 15x^4 + 2$$

$$7. f(x) = x^n \ln x \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \ln x + x^n \cdot \frac{1}{x} = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1}$$

$$8. f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)'(x^2+1) - (x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1) - (x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$9. f(x) = 2^x(x^2+1)$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 \cdot (x^2+1) + 2^x \cdot 2x = 2^x((\ln 2)(x^2+1) + 2x)$$

$$10. f(x) = e^x(x^3+2x+1)$$

$$f'(x) = e^x(x^3+2x+1) + e^x(3x^2+2) = e^x(x^3+3x^2+2x+3)$$

$$11. f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-(\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x) - (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-1 - 1}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2} \end{aligned}$$

Primeri 2 – Izvod složene funkcije

1. $f(x) = e^{-x}$: pišemo $f = h \circ g$, gde $h(t) = e^t$, $g(x) = -x$.

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

2. $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (sinus hiperbolni)

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x \quad (\text{kosinus hiperbolni})$$

3. $f(x) = e^{3x} + 3e^{x^2}$

$$f'(x) = e^{3x} \cdot 3 + 3e^{x^2} \cdot 2x = 3e^{3x} + 6xe^{x^2}$$

4. $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

5. $f(x) = 3 \cos 5x$

$$f'(x) = 3(-\sin 5x) \cdot 5 = -15 \sin 5x$$

6. $f(x) = (x^2 + x)^{50}$

$$f'(x) = 50(x^2 + x)^{49} \cdot (2x + 1)$$

7. $f(x) = (\ln x + 7x^2)^2$

$$f'(x) = 2(\ln x + 7x^2) \cdot \left(\frac{1}{x} + 14x\right)$$

8. $f(x) = x \ln \frac{4}{x}$: (napomena: $x \ln \frac{4}{x} = x(\ln 4 - \ln x)$)

9. $f(x) = \sqrt[3]{2x+3} = (2x+3)^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x+3)^{-2/3} \cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$

10. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

11. $f(x) = e^{3x^2+2}(x^2+x+5)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{3x^2+2} \cdot 6x \cdot (x^2+x+5) + e^{3x^2+2}(2x+1) = e^{3x^2+2}(6x^3+6x^2+30x+2x+1) \\ &= e^{3x^2+2}(6x^3+6x^2+32x+1) \end{aligned}$$

Primer 3 – Izvod višeg reda i vrednost u tački

Naći prvi i drugi izvod funkcije $f(x) = e^{x+2}(x^2 + 3x + 1)$ i izračunati $f'(-2)$ i $f''(-2)$.

Rešenje:

Izvod višeg reda:

$$f''(x) = (f'(x))' \quad - \text{ drugi izvod, } \quad f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$$

$f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{x+2})'(x^2 + 3x + 1) + e^{x+2}(x^2 + 3x + 1)' \\ &= e^{x+2} \cdot (x + 2)' \cdot (x^2 + 3x + 1) + e^{x+2}(2x + 3) \\ &= e^{x+2}(x^2 + 3x + 1) + e^{x+2}(2x + 3) \\ &= e^{x+2}(x^2 + 5x + 4) \end{aligned}$$

$$f'(-2) = e^0(4 - 10 + 4) = 1 \cdot (-2) = -2$$

$f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^{x+2}(x^2 + 5x + 4))' \\ &= e^{x+2}(x^2 + 5x + 4) + e^{x+2}(2x + 5) \\ &= e^{x+2}(x^2 + 7x + 9) \end{aligned}$$

$$f''(-2) = e^0(4 - 14 + 9) = 1 \cdot (-1) = -1$$

Primena izvoda – Monotonost i ekstremi

Teoreme o monotonosti

T₁: Ako je $f'(x) \geq 0$ (>0) za $x \in (a, b)$, tada je f monotonu rastuća na (a, b) .
Ako je $f'(x) \leq 0$ (<0) za $x \in (a, b)$, tada je f monotonu opadajuća na (a, b) .

$$f' > 0 \Rightarrow f \nearrow, \quad f' < 0 \Rightarrow f \searrow$$

Lokalni ekstremi – T₂ i T₃

T₂: Neka je $f'(c) = 0$.

1° Ako je $f'(x) < 0$ za $x < c$ i $f'(x) > 0$ za $x > c$, tada f u tački c dostignuće lokalni minimum: $T_{\min}(c, f(c))$.

2° Ako je $f'(x) > 0$ za $x < c$ i $f'(x) < 0$ za $x > c$, tada f u tački c dostignuće lokalni maksimum: $T_{\max}(c, f(c))$.

T₃: Neka je $f'(c) = 0$.

1° Ako je $f''(c) < 0$, tada f u tački c dostignuće lokalni maksimum.

2° Ako je $f''(c) > 0$, tada f u tački c dostignuće lokalni minimum.

Zadatak 1 – Monotonost i ekstremi

Odrediti intervale monotonosti i ekstremične vrednosti sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^2 - 14$ b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 3$

b) $f(x) = xe^{-x}$ d) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$

Rešenje:

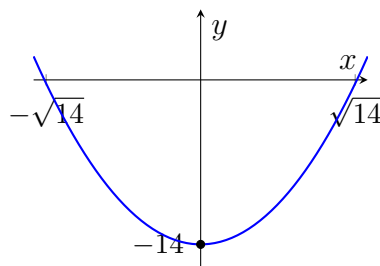
a) $f(x) = x^2 - 14$, $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$2x$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

f je opadajuća na $(-\infty, 0)$, rastuća na $(0, +\infty)$.

$T_{\min}(0, -14)$, jer $f(0) = 0 - 14 = -14$.



b) $f(x) = xe^{-x}$, $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1 - x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
e^{-x}	+	+
$1 - x$	+	-
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

f je rastuća na $(-\infty, 1)$, opadajuća na $(1, +\infty)$.

$T_{\max}\left(1, \frac{1}{e}\right)$, jer $f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$.

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 3$, $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$3x^2 - 6x - 9$	+	-	+
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$T_{\max}(-1, 2)$: $f(-1) = -1 - 3 + 9 - 3 = 2$

$T_{\min}(3, -30)$: $f(3) = 27 - 27 - 27 - 3 = -30$

d) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$, $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ili $x = 1$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	-	+	+
$(x - 1)^2$	+	+	+
$f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

$T_{\min}(0, 0)$: $f(0) = 0$.

$x = 1$ nije ekstrema – samo promjenište vrednosti (stacionarna tačka).

Zadatak 2 – Optimizacija

Od svakog pravougaonika obima 5 naći onaj čija je površina najveća.

Rešenje:

Neka su stranice x i y . Obim: $2(x + y) = 5$, pa $y = \frac{5}{2} - x$.

Površina: $P(x) = x \cdot y = x\left(\frac{5}{2} - x\right) = \frac{5}{2}x - x^2$

$P'(x) = \frac{5}{2} - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{4}}, \quad y = \frac{5}{2} - \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$

	$\left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$
$P'(x)$	+	-
$P(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Drugi način: $P''(x) = -2 < 0$, pa $x = \frac{5}{4}$ daje maksimum.

$$P_{\max}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{8} - \frac{25}{16} = \frac{25}{16}$$

Kvadrat sa stranicom $\frac{5}{4}$ ima maksimalnu površinu $\frac{25}{16}$.

Zadatak 3 – Ekstremi na intervalu

Naći najmanji i najveći vrednosti funkcije $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ na intervalu $[-1, 2]$.

Rešenje:

Funkcija je neprekidna i ona na zatvorenom intervalu dostigne najmanju i najveću vrednost – poredimo vrednosti u kritičnim tačkama i krajevima.

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 5x^2(x - 1)(x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ili } x = 1 \text{ ili } x = 3$$

Kritične tačke u $[-1, 2]$: $x = 0$ i $x = 1$ (jer $x = 3 \notin [-1, 2]$).

$$f(-1) = (-1)^5 - 5(-1)^4 + 5(-1)^3 = -1 - 5 - 5 = -11$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1 - 5 + 5 = 1$$

$$f(2) = 32 - 80 + 40 = -8$$

- **Najmanji** vrednost je -11 (za $x = -1$)
- **Najveća** vrednost je 1 (za $x = 1$)

Konveksnost i prevojne tačke

Konveksnost

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je **konveksna** na $[a, b]$ ako za svaka $x, y \in [a, b]$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

f je **konkavna** na $[a, b]$ ako:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Ako je $f''(x) > 0$ za $x \in (a, b)$, tada je f konveksna ($\cup$) na (a, b) .

Ako je $f''(x) < 0$ za $x \in (a, b)$, tada je f konkavna ($\cap$) na (a, b) .

Prevojne tačke: tačke gde $f''(x) = 0$ i menja znak.

Zadatak 4 – Konveksnost i prevojne tačke

Odrediti konveksnost i prevojne tačke funkcija:

a) $f(x) = x^2 - 14$ b) $f(x) = xe^{-x}$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 3$ d) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$

a) $f''(x) = 2 > 0$ za sve $x \in D = \mathbb{R} \Rightarrow f$ je konveksna na $\mathbb{R}$. Nema prevojnih tačaka.

b) $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$

$$f''(x) = (e^{-x})'(1 - x) + e^{-x}(1 - x)' = -e^{-x}(1 - x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x - 2)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
e^{-x}	+	+
$x - 2$	-	+
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

$P\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ – predobna tačka, $f(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$.

c) $f''(x) = 6x - 6$, $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$6x - 6$	-	+
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

f je konveksna na $(1, +\infty)$, konkavna na $(-\infty, 1)$.

$P(1, -14)$ – predobna tačka: $f(1) = 1 - 3 - 9 - 3 = -14$.

d) $f'(x) = x^3 - 2x^2 + x$, $f''(x) = 3x^2 - 4x + 1$
 $f''(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$, pa $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, 1)$	$(1, +\infty)$
$3x^2 - 4x + 1$	+	-	+
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

f je konveksna na $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$, konkavna na $(\frac{1}{3}, 1)$.

Prevojne tačke: $P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{324}\right)$ i $P_2\left(1, \frac{1}{12}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4 \cdot 81} - \frac{2}{3 \cdot 27} + \frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{1}{324} - \frac{8}{324} + \frac{18}{324} = \frac{11}{324}$$

$$f(1) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3 - 8 + 6}{12} = \frac{1}{12}$$