

Primena izvoda na ekonomske funkcije

Matematika u inženjerskom menadžmentu

Zadatak 1

Neka su date funkcija ukupnih prihoda $TR(P) = 2P - P^2$ i ukupnih troškova $TC(Q) = Q^2 - 6Q + 2$.

- a) Odrediti funkciju prihoda $TR(Q)$ u zavisnosti od Q .
- b) Odrediti funkciju dobiti i interval rentabilne proizvodnje.
- c) Na kom intervalu raste funkcija dobiti? Za koju količinu proizvodnje se ostvaruje optimalna proizvodnja i kolika je maksimalna dobit?

Rešenje:

a) $TR(P) = P \cdot Q(P)$, pa $P \cdot Q(P) = 2P - P^2 = P(2 - P)$

$$\Rightarrow \boxed{Q(P) = 2 - P} \quad - \text{ funkcija tražnje}$$

$$Q = 2 - P \Rightarrow P = 2 - Q \Rightarrow \boxed{P(Q) = 2 - Q} \quad - \text{ funkcija cene}$$

$$TR(Q) = Q \cdot P(Q) = Q(2 - Q)$$

$$\boxed{TR(Q) = 2Q - Q^2}$$

b)

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = 2Q - Q^2 - (Q^2 - 6Q + 2)$$

$$= 2Q - Q^2 - Q^2 + 6Q - 2$$

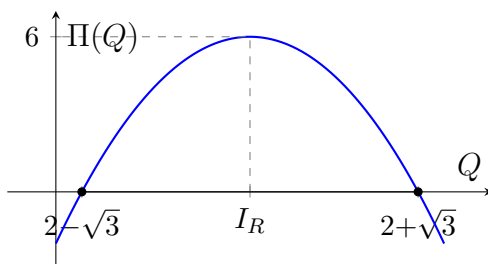
$$\Pi(Q) = -2Q^2 + 8Q - 2$$

Interval rentabilnosti I_R : $\Pi(Q) > 0$:

$$\Pi(Q) = 0 \Rightarrow Q_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 16}}{-4} = \frac{-8 \pm \sqrt{48}}{-4} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{3}}{-4} = 2 \mp \sqrt{3}$$

Budući da $2 - \sqrt{3} > 0$ i $2 + \sqrt{3} > 0$:

$$\boxed{I_R = (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})}$$



c) **I način** (tememe parabole):

$$Q_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-2)} = 2 \Rightarrow \Pi(Q) \text{ raste na } (0, 2)$$

II način (izvod):

$$\Pi'(Q) = (-2Q^2 + 8Q - 2)' = -4Q + 8$$

$$\Pi'(Q) = 0 \Rightarrow -4Q + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{Q = 2}$$

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$-4Q + 8$		+	0	-
$\Pi'(Q)$		+	0	-
$\Pi(Q)$		$\nearrow$	max	$\searrow$

$\Pi(Q)$ raste na $(0, 2)$, $Q_{\max} = 2$ – optimalna proizvodnja.

$$\Pi(Q_{\max}) = \Pi(2) = -2 \cdot 4 + 8 \cdot 2 - 2 = -8 + 16 - 2 = \boxed{6} \text{ – maksimalna dobit}$$

Zadatak 2

Data je funkcija ukupnih troškova $TC(Q) = Q^3 + 50$. Neka je funkcija tražnje u jediničnoj šelefoni zavisnosti od cene $Q(P) = -\frac{P}{4} + 15$. Za koju količinu proizvodnje se ostvaruje optimalna (maksimalna) dobit?

Rešenje:

$$Q(P) = -\frac{P}{4} + 15 \Rightarrow \frac{P}{4} = 15 - Q \Rightarrow \boxed{P(Q) = 60 - 4Q}$$

$$TR(Q) = Q \cdot P(Q) = Q(60 - 4Q) = 60Q - 4Q^2$$

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = 60Q - 4Q^2 - Q^3 - 50$$

$$\Pi(Q) = -Q^3 - 4Q^2 + 60Q - 50$$

$$\Pi'(Q) = -3Q^2 - 8Q + 60$$

$$\Pi'(Q) = 0 \Rightarrow -3Q^2 - 8Q + 60 = 0 \Rightarrow Q_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 720}}{-6} = \frac{8 \pm 28}{-6}$$

$$Q_1 = -6 \text{ (ne uzimamo, jer } Q \geq 0), \quad Q_2 = \frac{10}{3}$$

I način (drugi izvod):

$$\Pi''(Q) = -6Q - 8, \quad \Pi''\left(\frac{10}{3}\right) = -6 \cdot \frac{10}{3} - 8 = -28 < 0 \Rightarrow \text{maksimum}$$

II način (tablica znaka):

	$-\infty$	-6	0	$\frac{10}{3}$	$+\infty$	
$-3Q^2 - 8Q + 60$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$\Pi'(Q)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$\Pi(Q)$	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$

Optimalna proizvodnja: $Q_{\max} = \frac{10}{3}$

Zadatak 3

Date su funkcija ukupnih prihoda $TR(Q) = e^Q(Q^2 + 3Q)$ i ukupnih troškova $TC(Q) = e^Q(2Q^2 - Q + 1)$.

- Odrediti funkciju cene $P(Q)$, cenu pri granici $Q = 2$ i fiksne troškove.
- Odrediti interval rentabilne proizvodnje.
- Odrediti optimalnu proizvodnju. Na kom intervalu raste funkcija dobiti?

Rešenje:

a) i b) (rešeno u skriptama br. 10 i 12 – isti zadatak):

$$P(Q) = e^Q(Q + 3), \quad P(2) = 5e^2, \quad C_0 = 1, \quad I_R = (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$$

c) Iz skripte 12 znamo:

$$\Pi(Q) = e^Q(-Q^2 + 4Q - 1), \quad \Pi'(Q) = (e^Q(-Q^2 + 4Q - 1))'$$

Izvod dobiti (izvod složene funkcije – izvod proizvoda):

$$\begin{aligned} \Pi'(Q) &= (e^Q)'(-Q^2 + 4Q - 1) + e^Q(-Q^2 + 4Q - 1)' \\ &= e^Q(-Q^2 + 4Q - 1) + e^Q(-2Q + 4) \\ &= e^Q(-Q^2 + 4Q - 1 - 2Q + 4) \\ &= e^Q(-Q^2 + 2Q + 3) \end{aligned}$$

$$\Pi'(Q) = 0 \Rightarrow e^Q(-Q^2 + 2Q + 3) = 0 \Rightarrow -Q^2 + 2Q + 3 = 0$$

$$Q_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \Rightarrow Q_1 = -1, \quad Q_2 = 3$$

	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
e^Q	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-Q^2 + 2Q + 3$	$-$	0	$+$	$+$	0
$\Pi'(Q)$	$-$	0	$+$	$+$	0
$\Pi(Q)$	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\max$

Π raste na $(0, 3)$, $Q_{\max} = 3$.

Zadatak 4

Date su funkcija prosečnih troškova $AC(Q) = \frac{1}{3}Q^2 - 7Q + 20 + \frac{28}{Q}$ i prosečnih prihoda $AR(Q) = -2Q + 4$.

- Odrediti funkcije ukupnih prihoda $TR(Q)$ i ukupnih troškova $TC(Q)$.
- Odrediti marginalne funkcije prihoda $MR(Q)$ i troškova $MC(Q)$.
- Na kom intervalu raste funkcija dobiti? Odrediti optimalnu količinu proizvodnje i maksimalnu dobit.
- Odrediti koeficijent elastičnosti funkcije dobiti.

Rešenje:

a)

$$AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} \Rightarrow TR(Q) = Q \cdot AR(Q) = Q(-2Q + 4)$$

$$\boxed{TR(Q) = -2Q^2 + 4Q}$$

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} \Rightarrow TC(Q) = Q \cdot AC(Q) = Q\left(\frac{1}{3}Q^2 - 7Q + 20 + \frac{28}{Q}\right)$$

$$\boxed{TC(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 20Q + 28}$$

b)

$$MR(Q) = TR'(Q) = (-2Q^2 + 4Q)' \Rightarrow \boxed{MR(Q) = -4Q + 4}$$

$$MC(Q) = TC'(Q) = \left(\frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 20Q + 28\right)' \Rightarrow \boxed{MC(Q) = Q^2 - 14Q + 20}$$

c) Kako se pita optimalna količina, nije neophodno odrediti $\Pi(Q)$ nego tražimo $\Pi'(Q)$:

I način:

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

$$\Pi'(Q) = TR'(Q) - TC'(Q) = MR(Q) - MC(Q)$$

$$= -4Q + 4 - (Q^2 - 14Q + 20) = -Q^2 + 10Q - 16$$

II način: direktno:

$$\Pi(Q) = -2Q^2 + 4Q - \left(\frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 20Q + 28\right)$$

$$= -\frac{1}{3}Q^3 + 5Q^2 - 16Q - 28$$

$$\Pi'(Q) = -Q^2 + 10Q - 16$$

$$\Pi'(Q) = 0 \Rightarrow -Q^2 + 10Q - 16 = 0 \Rightarrow Q_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 64}}{-2} = \frac{-10 \pm 6}{-2}$$

$$Q_1 = 2, \quad Q_2 = 8$$

	$-\infty$	0	2	8	$+\infty$	
$\Pi'(Q)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\Pi(Q)$	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Π raste na $(2, 8)$, $\boxed{Q_{\max} = 8}$.

$$\begin{aligned}\Pi(Q_{\max}) = \Pi(8) &= -\frac{1}{3} \cdot 512 + 5 \cdot 64 - 16 \cdot 8 - 28 = -\frac{512}{3} + 320 - 128 - 28 \\ &= \frac{-512 + 576}{3} = \frac{64}{3}\end{aligned}$$

d) Koeficijent elastičnosti funkcije dobiti:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\Pi}^Q &= \frac{Q}{\Pi(Q)} \cdot \Pi'(Q) = \frac{Q}{-\frac{1}{3}Q^3 + 5Q^2 - 16Q - 28} \cdot (-Q^2 + 10Q - 16) \\ &= \frac{-Q^3 + 10Q^2 - 16Q}{-\frac{1}{3}Q^3 + 5Q^2 - 16Q - 28} = \frac{3Q^3 - 30Q^2 + 48Q}{\dots}\end{aligned}$$

Elastičnost ekonomskih funkcija

Definicija elastičnosti

Pri upoređivanju promena dve veličine često nije korisno poređenje apsolutnih promena Δx i Δy , već se poređivanje vrši relativnim promenama $\frac{\Delta x}{x}$ i $\frac{\Delta y}{y}$.

Ako od promenljive $y = f(x)$ **diferencijalno elastičnost** od promenljive y od nezavisne promenljive x :

$$\mathcal{E}_y^x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'(x)$$

Koeficijent elastičnosti u tački x je priraštaj promenljive funkcije pri *jednopolotnom* povećanju argumenta x .

1° $|\mathcal{E}_y^x| < 1$ – neelastična

2° $|\mathcal{E}_y^x| = 1$ – jedinično elastična

3° $|\mathcal{E}_y^x| > 1$ – elastična

Elastičnost tražnje od cene $Q(P)$:

$$\mathcal{E}_Q^P = \frac{P}{Q(P)} \cdot Q'(P)$$

Elastičnost ukupnog prihoda od količine:

$$\mathcal{E}_{TR}^Q = \frac{Q}{TR(Q)} \cdot TR'(Q)$$

Zadatak 1 – Elastičnost tražnje

Data je funkcija tražnje $Q(P) = e^{P^2-2P}$. Naći koeficijent elastičnosti tražnje od cene pri $P = 2$. Objasniti dobijeni rezultat.

Rešenje:

$$Q'(P) = (e^{P^2-2P})' = e^{P^2-2P} \cdot (P^2 - 2P)' = e^{P^2-2P}(2P - 2)$$

$$\mathcal{E}_Q^P = \frac{P}{Q(P)} \cdot Q'(P) = \frac{P}{e^{P^2-2P}} \cdot e^{P^2-2P}(2P - 2) = P(2P - 2) = 2P^2 - 2P$$

$$\mathcal{E}_Q^P|_{P=2} = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4$$

Ukoliko se cena $P = 2$ poveća za 1% (tada $P = 2,02$), tražnja će se povećati za 4%. Kako je $|\mathcal{E}_Q^P| = 4 > 1$, funkcija je elastična.

Zadatak 2 – Elastičnost prihoda

Neka je funkcija ukupnih prihoda $TR(Q) = e^{-2Q}(Q^2 + 3Q)$. Odrediti funkciju elastičnosti prihoda od količine i funkciju ukupnih prihoda od cene komlinenu.

Rešenje:

$$\mathcal{E}_Q^P = \frac{Q}{P(Q)} \cdot P'(Q), \quad \mathcal{E}_{TR}^Q = \frac{Q}{TR(Q)} \cdot TR'(Q)$$

Iz $TR(Q) = Q \cdot P(Q)$:

$$e^{-2Q}(Q^2 + 3Q) = Q \cdot P(Q) \Rightarrow \boxed{P(Q) = e^{-2Q}(Q + 3)}$$

$$\begin{aligned} P'(Q) &= (e^{-2Q}(Q + 3))' = (e^{-2Q})'(Q + 3) + e^{-2Q}(Q + 3)' \\ &= e^{-2Q} \cdot (-2)(Q + 3) + e^{-2Q} \cdot 1 = e^{-2Q}(-2Q - 6 + 1) = e^{-2Q}(-2Q - 5) \end{aligned}$$

$$\boxed{P'(Q) = e^{-2Q}(-2Q - 5)}$$

$$\mathcal{E}_Q^P = \frac{Q}{e^{-2Q}(Q + 3)} \cdot e^{-2Q}(-2Q - 5) = \frac{-2Q^2 - 5Q}{Q + 3}$$

$$\begin{aligned} TR'(Q) &= (e^{-2Q}(Q^2 + 3Q))' \\ &= (e^{-2Q})'(Q^2 + 3Q) + e^{-2Q}(Q^2 + 3Q)' = e^{-2Q}(-2)(Q^2 + 3Q) + e^{-2Q}(2Q + 3) \\ &= e^{-2Q}(-2Q^2 - 6Q + 2Q + 3) = e^{-2Q}(-2Q^2 - 4Q + 3) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{TR}^Q = \frac{Q}{e^{-2Q}(Q^2 + 3Q)} \cdot e^{-2Q}(-2Q^2 - 4Q + 3) = \frac{-2Q^2 - 4Q + 3}{Q + 3}$$

Veza između $\mathcal{E}_Q^P$ i $\mathcal{E}_{TR}^Q$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{TR}^Q &= \frac{Q}{TR(Q)} \cdot TR'(Q) = \frac{Q}{Q \cdot P(Q)} \cdot (Q \cdot P(Q))' = \frac{1}{P(Q)} (P(Q) + Q \cdot P'(Q)) \\ &= 1 + \frac{Q}{P(Q)} P'(Q) = 1 + \mathcal{E}_Q^P\end{aligned}$$

Za $Q = 1$: $\mathcal{E}_{TR}^1 = -16 + 6 + 1 = -9$

Ukoliko se proizvodnja $Q = 1$ poveća za 1%, ukupni prihod će se smanjiti za 9%.

Zadatak 3 – Elastičnost prihoda

Funkcija cene nekog proizvoda data je sa $P(Q) = e^{-8Q^2+6Q}$.

a) Na kom intervalu raste funkcija ukupnih prihoda $TR(Q)$? Za koju količinu $Q_{\max}$ ukupnih prihoda je maksimalan?

b) Odrediti funkciju elastičnosti ukupnih prihoda od količine. Odrediti koeficijent elastičnosti prihoda komlinena. Objasniti rezultat. Za $Q = 1$.

Rešenje:

a)

$$TR(Q) = Q \cdot P(Q) = Q \cdot e^{-8Q^2+6Q}$$

$$\begin{aligned}TR'(Q) &= (Q)' \cdot e^{-8Q^2+6Q} + Q \cdot (e^{-8Q^2+6Q})' \\ &= e^{-8Q^2+6Q} + Q \cdot e^{-8Q^2+6Q} \cdot (-16Q + 6)\end{aligned}$$

$$= e^{-8Q^2+6Q}(1 + Q(-16Q + 6)) = e^{-8Q^2+6Q}(-16Q^2 + 6Q + 1)$$

$$TR'(Q) = 0 \Rightarrow e^{-8Q^2+6Q}(-16Q^2 + 6Q + 1) = 0, \text{ pa } -16Q^2 + 6Q + 1 = 0:$$

$$Q_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{-32} = \frac{-6 \pm 10}{-32} \Rightarrow Q_1 = -\frac{1}{8}, \quad Q_2 = \frac{1}{2}$$

	$-\infty$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
e^{-8Q^2+6Q}	+	+	+	+	
$-16Q^2+6Q+1$	-	0	+	+	-
$TR'(Q)$	-	0	+	+	-
$TR(Q)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$TR \text{ raste na } \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \boxed{Q_{\max} = \frac{1}{2}}.$$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{TR}^Q &= \frac{Q}{TR(Q)} \cdot TR'(Q) = \frac{Q}{Q \cdot e^{-8Q^2+6Q}} \cdot e^{-8Q^2+6Q}(-16Q^2 + 6Q + 1) \\ &= -16Q^2 + 6Q + 1\end{aligned}$$

Za $Q = 1$:

$$\mathcal{E}_{TR}^1 = -16 + 6 + 1 = -9$$

Ukoliko se proizvodnja $Q = 1$ poveća za 1%, ukupni prihod će se smanjiti za 9%.

Zadatak 4 – Određivanje funkcije cene

Funkcija cene nekog artikla u zavisnosti od količine data je sa $P(Q) = aQ^2 + b$, a funkcija ukupnih troškova je $TC(Q) = Q^3 + 6Q^2 - 7Q + C$. Funkcija ukupnih troškova pri ceni $P(2) = 10$ i $P'(2) = 8$.

- a) Odrediti parametre a i b i funkciju $TR(Q)$ i ukupnih troškova $TC(Q)$.
- b) Odrediti funkciju dobiti. Odrediti optimalnu količinu proizvodnje i maksimalnu dobit.
- c) Odrediti na kom intervalu raste funkcija dobiti.
- d) Odrediti funkciju elastičnosti funkcije dobiti od cene komlinenu.

Rešenje:

a) Iz uslova $P(2) = 10$:

$$P(2) = a \cdot 4 + b = 10 \Rightarrow \boxed{4a + b = 10}$$

$$P'(Q) = (aQ^2 + b)' = 2aQ, \quad P'(2) = 4a = 8 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$b = 10 - 4 \cdot 2 = 2 \Rightarrow \boxed{P(Q) = 2Q^2 + 2}$$

$$TR(Q) = Q \cdot P(Q) = Q(2Q^2 + 2) \Rightarrow \boxed{TR(Q) = 2Q^3 + 2Q}$$

Fiksni troškovi: $TC(0) = C_0 = 2$, pa $C = 2$:

$$\boxed{TC(Q) = Q^3 + 6Q^2 - 7Q + 2}$$

b)

$$\begin{aligned} \Pi(Q) &= TR(Q) - TC(Q) = 2Q^3 + 2Q - Q^3 - 6Q^2 + 7Q - 2 \\ &= Q^3 - 6Q^2 + 9Q - 2 \end{aligned}$$

$$\Pi'(Q) = 3Q^2 - 12Q + 9$$

$$\Pi'(Q) = 0 \Rightarrow 3Q^2 - 12Q + 9 = 0 \Rightarrow Q^2 - 4Q + 3 = 0:$$

$$Q_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6} \Rightarrow Q_1 = 1, \quad Q_2 = 3$$

	$-\infty$	0	1		3	$+\infty$
$3Q^2 - 12Q + 9$		+	0	−	0	+
$\Pi'(Q)$		+	0	−	0	+
$\Pi(Q)$		↗	max	↘	min	↗

Π raste na $(0, 1)$, $Q_{\max} = 1$:

$$\Pi(Q_{\max}) = \Pi(1) = 1 - 6 + 9 - 2 = \boxed{2} \quad - \text{maksimalna dobit}$$

c) Π raste na $(0, 1) \cup (3, +\infty)$.

d) Koeficijent elastičnosti funkcije dobiti:

$$\mathcal{E}_{\Pi}^Q = \frac{Q}{\Pi(Q)} \cdot \Pi'(Q) = \frac{Q(3Q^2 - 12Q + 9)}{Q^3 - 6Q^2 + 9Q - 2} = \frac{3Q^3 - 12Q^2 + 9Q}{Q^3 - 6Q^2 + 9Q - 2}$$