

Linearno programiranje

Problem linearnog programiranja

Opšti problem linearnog programiranja

Funkcija cilja

$$\Pi = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n \longrightarrow \max \text{ (ili min)}$$

uz ograničenja:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Dopustiva oblast i rešenja

Skup rešenja sistema ograničenja naziva se **dopustiva oblast**. Svako rešenje sistema ograničenja zove se **dopustivo rešenje**. Rešenje za koje funkcija cilja Π ima maksimum ili minimum naziva se **optimalno rešenje**.

Dopustiva oblast može biti:

- **Ograničena** – postoje $G_1, G_2 > 0$ tako da je $0 \leq x_1 \leq G_1, 0 \leq x_2 \leq G_2$.
- **Neograničena** – ako nije ograničena.
- **Prazna** – ako sistem ograničenja nema rešenja.

Ključna osobina

Ako linearna funkcija cilja Π ima maksimum (ili minimum) na dopustivoj oblasti, ona ga dostiže u nekoj od **ekstremnih tačaka** (temena) dopustive oblasti. Optimalno rešenje tražimo izračunavanjem vrednosti Π u svim temenim tačkama dopustive oblasti.

Zadaci

Zadatak 1

Naći maksimum funkcije cilja $\Pi = x + 3y$ za ograničenu oblast:

$$x - y \leq 4, \quad x + 2y \leq 6, \quad x - y \geq -1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Rešenje:

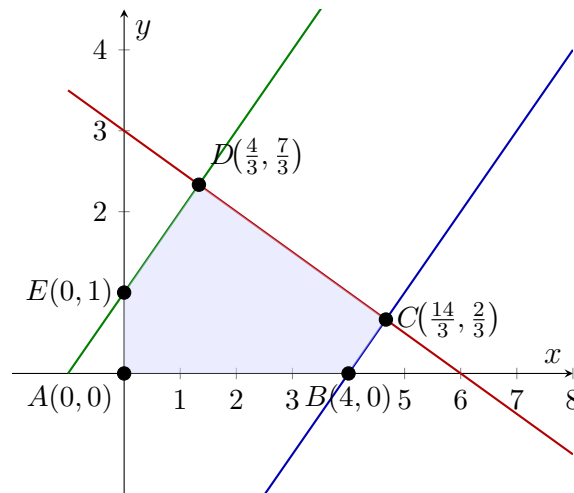
Crtamo prave i određujemo dopustivu oblast proverom tačke $(0, 0)$:

I $x - y \leq 4$: prava $x - y = 4$ (tačke $(0, -4)$ i $(4, 0)$); $(0, 0)$: $0 \leq 4$ ✓ – oblast ispod prave.

II $x + 2y \leq 6$: prava $x + 2y = 6$ (tačke $(0, 3)$ i $(6, 0)$); $(0, 0)$: $0 \leq 6$ ✓ – oblast ispod prave.

III $x - y \geq -1$: prava $x - y = -1$ (tačke $(0, 1)$ i $(-1, 0)$); $(0, 0)$: $0 \geq -1$ ✓ – oblast iznad prave.

IV $x \geq 0, y \geq 0$: prvi kvadrant.



Temene tačke dopustive oblasti: $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C = I \cap II$, $D = II \cap III$, $E(0, 1)$.

$C = I \cap II$:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow 3y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}, \quad x = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \Rightarrow C\left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$D = II \cap III$:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow 3y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{3}, \quad x = -1 + \frac{7}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow D\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Vrednosti funkcije cilja $\Pi = x + 3y$ u temenim tačkama:

$$\Pi(A) = 0, \quad \Pi(B) = 4, \quad \Pi(C) = \frac{14}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3}, \quad \Pi(D) = \frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{7}{3} = \frac{25}{3}, \quad \Pi(E) = 0 + 3 \cdot 1 = 3$$

$$\boxed{\max \Pi = \frac{25}{3} \text{ u tački } D\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)}$$

Zadatak 2

Fabrika proizvodi dva tipa proizvoda (y kg) na **mašini I** i **mašini II**. Za izradu jednog kg prvog tipa potrebno je tri sata rada na I mašini i jedan sat rada na II mašini. Za izradu jednog kg drugog tipa potrebno je po jedan sat rada na I i II mašini. Prvi tip proizvoda se prodaje po ceni od 500 dinara, a drugog po ceni od 400 dinara. Troškovi proizvodnje prvog su 300 dinara, a drugog 250 dinara. Odrediti kako da se organizuje proizvodnja (koliko kg svakog tipa da se napravi) da bi zarada bila maksimalna, imajući u vidu da prva mašina može raditi do 12 sati dnevno, druga do 6 sati dnevno i da je minimalna proizvodnja:

- jedan kg dnevno (za oba tipa zajedno) ;
- po jedan kg dnevno od svakog tipa.

Rešenje:

x – količina prvog tipa (kg), y – količina drugog tipa (kg).

Zarada po kg: $(500 - 300) = 200$ din/kg za prvi tip, $(400 - 250) = 150$ din/kg za drugi tip.

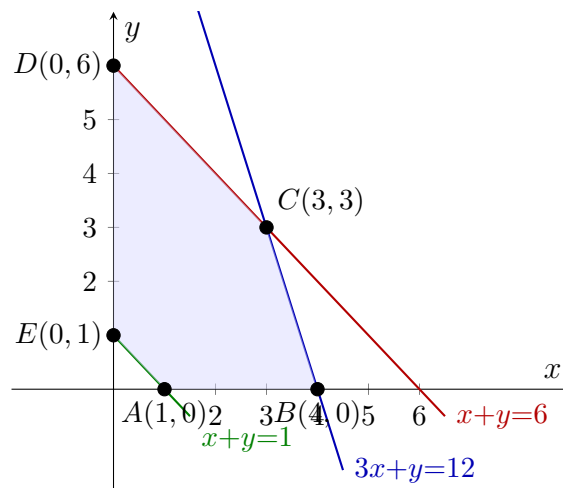
$$\Pi(x, y) = 200x + 150y \rightarrow \max$$

Ograničenja mašina:

	Prvi tip (x)	Drugi tip (y)	Kapacitet
Maš. I	3	1	≤ 12
Maš. II	1	1	≤ 6

$$I : 3x + y \leq 12, \quad II : x + y \leq 6, \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

a) **Dodatno ograničenje:** $x + y \geq 1$ (min. 1 kg zajedno).



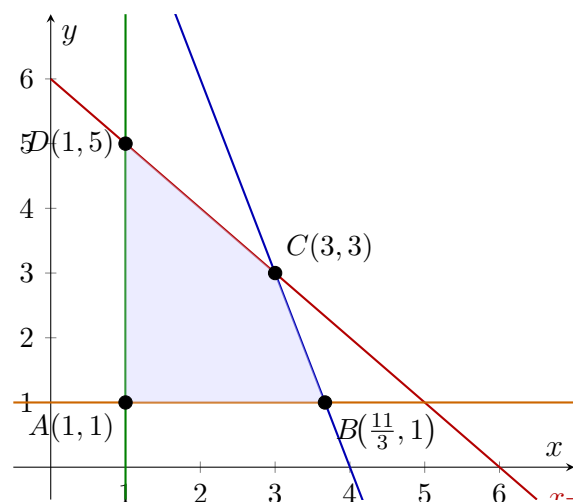
Temene tačke: $A(1, 0)$, $B(4, 0)$, $C = I \cap II$, $D(0, 6)$, $E(0, 1)$.

$$C = I \cap II: 3x + y = 12 \text{ i } x + y = 6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3, y = 3.$$

$$\Pi(A) = 200 \cdot 1 + 0 = 200, \quad \Pi(B) = 800, \quad \Pi(C) = 200 \cdot 3 + 150 \cdot 3 = 1050, \quad \Pi(D) = 900, \quad \Pi(E) = 150$$

$\max \Pi = 1050$ u tački $C(3, 3)$ – Treba proizvesti 3 kg prvog i 3 kg drugog tipa.

b) **Dodatno ograničenje:** $x \geq 1, y \geq 1$.



Temene tačke: $A(1, 1)$, $B = I \cap \{y = 1\}$, $C(3, 3)$, $D = \Pi \cap \{x = 1\}$.

B : $3x + 1 = 12 \Rightarrow x = \frac{11}{3}$, dakle $B(\frac{11}{3}, 1)$. D : $1 + y = 6 \Rightarrow y = 5$, dakle $D(1, 5)$.

$$\Pi(A) = 200 + 150 = 350, \quad \Pi(B) = 200 \cdot \frac{11}{3} + 150 = \frac{2650}{3} \approx 883,$$

$$\Pi(C) = 1050, \quad \Pi(D) = 200 + 750 = 950$$

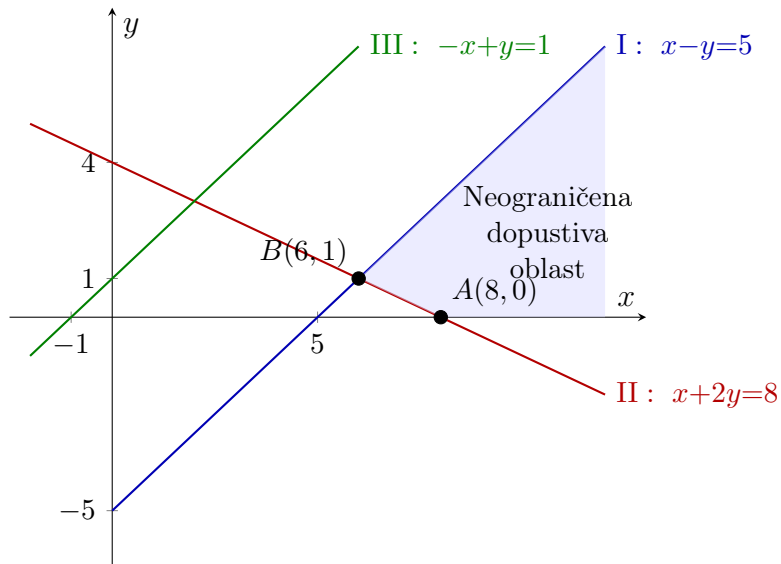
$\max \Pi = 1050$ u tački $C(3, 3)$ – Treba proizvesti 3 kg prvog i 3 kg drugog tipa.

Zadatak 2

Naći minimum funkcije cilja $\Pi = 2x + y$ za ograničenu oblast:

$$x - y \geq 5, \quad x + 2y \geq 8, \quad x - y \geq -1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Rešenje:



Proverom tačke $(0, 0)$ za nejednakosti: $0 - 0 \geq 5$ (ne), $0 + 0 \geq 8$ (ne), $0 - 0 \geq -1$ (da).
Oblast je neograničena – tražimo minimum u temenim tačkama.

Temene tačke: $A(8, 0)$ i $B = I \cap II$.

$B = I \cap II$:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1, \quad x = 6 \Rightarrow B(6, 1)$$

$$\Pi(A) = 2 \cdot 8 + 0 = 16, \quad \Pi(B) = 2 \cdot 6 + 1 = 13$$

$\min \Pi = 13$ u tački $B(6, 1)$
