Решења квадратне једначине

$$ax^2+bx+c=0$$

су дата формулама

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

1 Решити ј-не

а) $3x^2-x-10=0$ б) $9x^2+12x+4=0$ c) $x^2-6x+58=0.$

$\boxed{Р}$ а) $a=3,\ b=-1,\ c=-10$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot3\cdot(-10)}}{2\cdot3}=$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{1+120}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{121}}{6}=\frac{1\pm11}{6}$$

$$x_1=\frac{1+11}{6}=2 \qquad x_2=\frac{1-11}{6}=-\frac{5}{3}$$

б) $a=9,\ b=12,\ c=4$

$$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot9\cdot4}}{2\cdot9}=\frac{-12\pm\sqrt{144-144}}{18}=$$

$$=\frac{-12\pm\sqrt{0}}{18}$$

$$x_1=x_2=-\frac{12}{18}=-\frac{2}{3}$$

c) $a = 1, \quad b = -6, \quad c = 58$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 58}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 232}}{2} =$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-196}}{2}$$

$$\sqrt{-196} = i\sqrt{196} = i \cdot 14, \qquad i^2 = -1$$

$$x_1 = \frac{6 + i \cdot 14}{2} = 3 + 7i \qquad x_2 = \frac{6 - i \cdot 14}{2} = 3 - 7i$$

Природа решења квадратне ј-не

$D = b^2 - 4ac$ дискриминанта

$D > 0 \iff$ ј-на има два различита реална решења

$D = 0 \iff$ ј-на има једно двоструко реално решење

$D < 0 \iff$ ј-на има један пар коњуговано комплексних решења

(2.) Решити ј-не

a) $3x^2 = 0$ b) $2x^2 - 18 = 0$ c) $2x^2 + 18 = 0$ d) $-4x^2 + 3x = 0$.

P] a) $x_1 = x_2 = 0$

b) $2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -3$

c) $2x^2=-18 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x_1=3i, \quad x_2=-3i$

d) $-4x^2+3x=0$

$x(-4x+3)=0$

$\boxed{x_1=0}$ или $-4x+3=0 \Rightarrow \boxed{x_2=\frac{3}{4}}$

Непотпуне квадратне ј-не

$a\neq 0$

1) $ax^2=0 \qquad x_1=x_2=0$

2) $ax^2+c=0 \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a}$

$-\frac{c}{a}>0 \Rightarrow x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$-\frac{c}{a}<0 \Rightarrow x_1=i\sqrt{\frac{c}{a}}, \quad x_2=-i\sqrt{\frac{c}{a}}$

3) $ax^2+bx=0$

$x(ax+b)=0 \Rightarrow x_1=0, \quad x_2=-\frac{b}{a}$

Растављање квадратног тринома на линеарне чиниоце

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

3. Квадратни трином $mx^2-(m+n)x+n=0$, $m\neq 0$ раставити на просте чиниоце.

Р] $a=m \qquad b=-(m+n) \qquad c=n$

$$D = b^2 - 4ac = (-(m+n))^2 - 4 \cdot m \cdot n =$$

$$= m^2 + 2mn + n^2 - 4mn = m^2 + n^2 - 2mn = (m-n)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{m+n \pm \sqrt{(m-n)^2}}{2m} = \frac{m+n \pm (m-n)}{2m}$$

$$x_1 = \frac{m+n+(m-n)}{2m} = \frac{2m}{2m} = 1$$

$$x_2 = \frac{m+n-(m-n)}{2m} = \frac{2n}{2m} = \frac{n}{m}$$

$$mx^2 - (m+n)x + n = m(x-1)\left(x - \frac{n}{m}\right)$$

Вијетове ф-ле

Ако су x_1 и x_2 корени квадратне ј-не

$ax^2 + bx + c = 0$ тада важе ф-ле

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

4. У ј-ни $mx^2 - (3m+1)x + m = 0$ одредити m тако да је $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 7$.

$\boxed{Р}$ $$7 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} - 2$$

Следи $\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1 x_2} = 9$, тј. $(x_1+x_2)^2 = 9x_1x_2$.

Из Вијетових ф-ла знамо да је $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

и $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, где је $a = m$, $b = -(3m+1)$, $c = m$.

Дакле, $x_1 + x_2 = \frac{3m+1}{m}$ и $x_1 x_2 = \frac{m}{m} = 1$, па је

$$\left(\frac{3m+1}{m}\right)^2 = 9$$

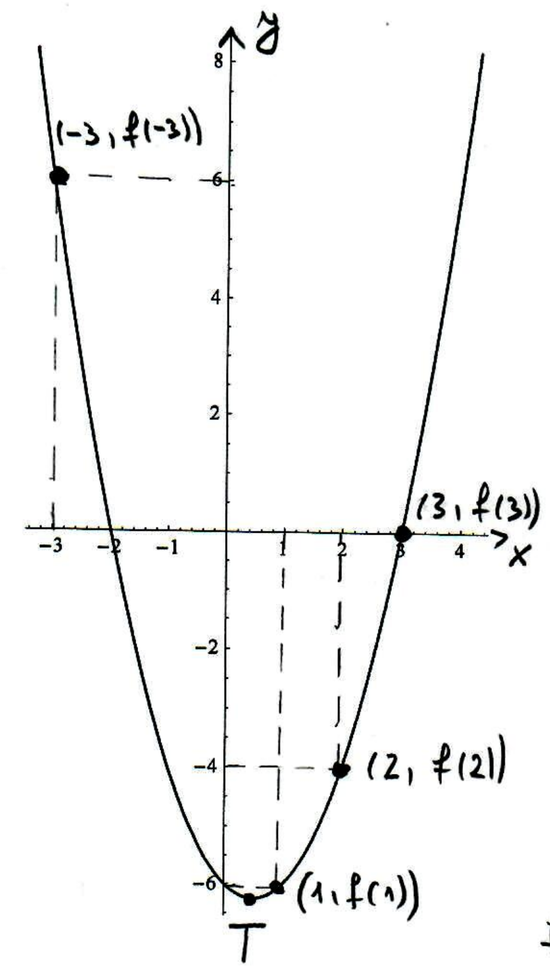
$$(3m+1)^2 = 9m^2$$

$$9m^2 + 6m + 1 = 9m^2$$

$$6m + 1 = 0$$

$$\boxed{m = -\frac{1}{6}}$$

График квадратне ф-је $f(x)=x^2-x-6$



$f(1)=1^2-1-6=-6$

$f(2)=2^2-2-6=-4$

$f(-3)=(-3)^2-(-3)-6=6$

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	6	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	-4	0

Нуле (корени) ф-је $f(x)=x^2-x-6$ су $x_1=-2$ и $x=3$, тј.

$f(-2)=0$ и $f(3)=0$.

$f(x)<0$ за $x\in(-2,3)$

$f(x)>0$ за $x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

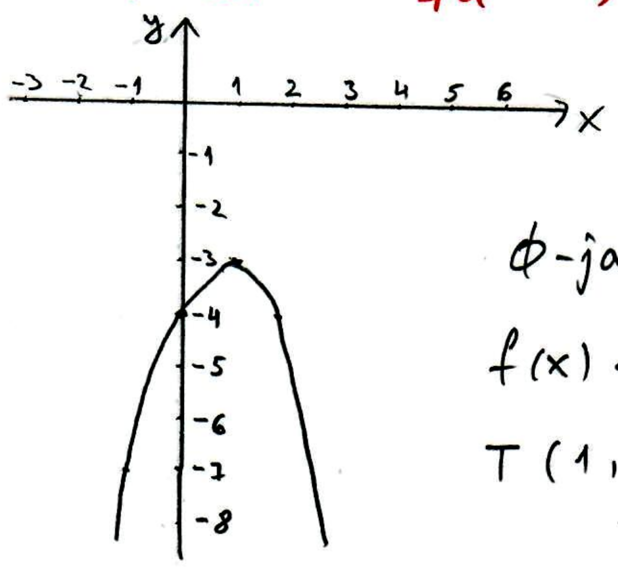
Ф-ја достиже најмању вредност у тачки $T\left(\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)$.

Теме параболе – екстремна вредност

$T\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$a>0 \Rightarrow$ минимум

$a<0 \Rightarrow$ максимум



$f(x)=-x^2+2x-4$

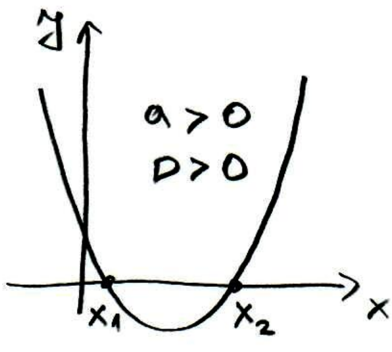
Ф-ја нема корене.

$f(x)<0,\ \forall x\in R$

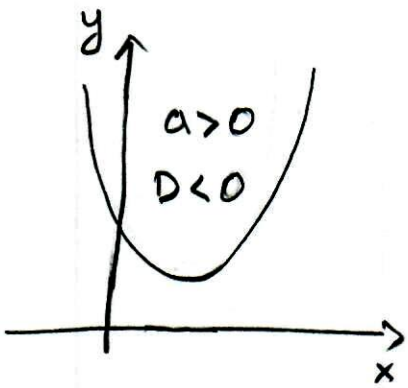
$T(1,-3)$ максимум

График квадратне ф-је $f(x) = ax^2 + bx + c$

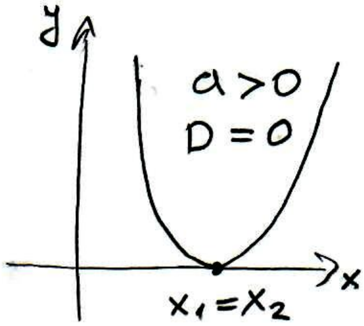
Облик графика зависи од знака коефицијента a и знака дискриминанте $D = b^2 - 4ac$.



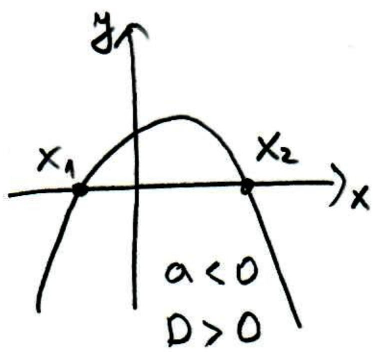
(1)



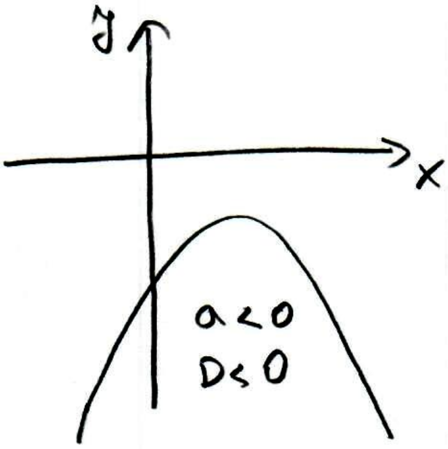
(2)



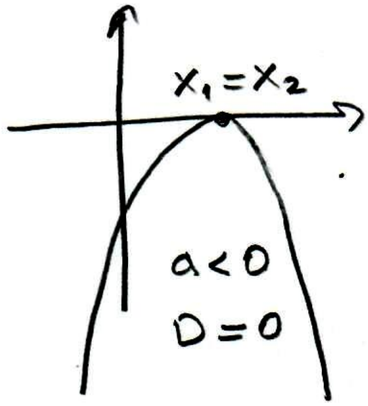
(3)



(4)



(5)



(6)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

① Решити неједначину $\frac{x^2-6x+7}{2-x} \le 2$.

Р) Област дефинисаности: $x \neq 2$, тј. $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Све пребацујемо на једну страну.

$$\frac{x^2-6x+7}{2-x} - 2 \le 0$$

$$\frac{x^2-6x+7}{2-x} - \frac{2(2-x)}{2-x} \le 0 \quad \text{тј.} \quad \frac{x^2-6x+7-2(2-x)}{2-x} \le 0$$

$$\boxed{\frac{x^2-4x+3}{2-x} \le 0}$$

$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$$

$$2-x=0 \Rightarrow x=2$$

	$-\infty$ до 1	1 до 2	2 до 3	3 до $+\infty$
x^2-4x+3	+	−	−	+
$2-x$	+	+	−	−
$\frac{x^2-4x+3}{2-x}$	+	−	+	−

$x^2-4x+3>0$ за $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

$x^2-4x+3<0$ за $x \in (1, 3)$

Решење неједначине је $x \in [1, 2) \cup [3, +\infty)$.

2. Решити неједначину $\dfrac{4x^2+9x-19}{-x^2+2x+15} \ge -1$.

Р Област дефинисаности

$$-x^2+2x+15=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 15}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{-2}= \begin{cases} \dfrac{-2+8}{-2}=-3 \\[2ex] \dfrac{-2-8}{-2}=5 \end{cases}$$

$x \neq -3$ и $x \neq 5$

$$\frac{4x^2+9x-19}{-x^2+2x+15}+1\ge 0 \qquad \frac{4x^2+9x-19+(-x^2+2x+15)}{-x^2+2x+15}\ge 0$$

$$\boxed{\frac{3x^2+11x-4}{-x^2+2x+15}\ge 0}$$

$$3x^2+11x-4=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3}=\frac{-11\pm\sqrt{121+48}}{6}=\frac{-11\pm\sqrt{169}}{6}$$

$$x_1=\frac{-11+13}{6}=\frac{1}{3} \qquad x_2=\frac{-11-13}{6}=-4$$

	$-\infty$ — -4	-4 — -3	-3 — $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ — 5	5 — $+\infty$
$3x^2+9x-19$	+	−	−	+	+
$-x^2+2x+15$	−	−	+	+	−
$\dfrac{3x^2+9x-19}{-x^2+2x+15}$	−	+	−	+	−

Решење неједначине је $x\in[-4,3)\cup[\frac{1}{3},5)$.

③ Решити неједначину $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x^2+x-2} > 1.$

Р] Област дефинисаности

$x+2 \neq 0 \implies x \neq -2$

$x^2+x-2=0 \implies x_1 = -2, \quad x_2 = 1$

$\boxed{x \neq -2 \text{ и } x \neq 1}$

$x^2+x-2 = (x-(-2))(x-1) = (x+2)(x-1)$

$$\frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)(x-1)} - 1 > 0$$

$$\frac{2(x-1) - 1 - (x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)} > 0$$

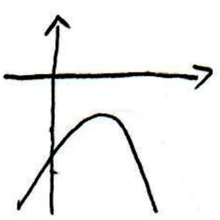
$$\boxed{\frac{-x^2+x-1}{(x+2)(x-1)} > 0}$$

$-x^2+x-1=0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-1)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{-2}$$

$D = -3 < 0 \implies$ ј-на нема реалних решења

$a = -1 < 0, \quad D < 0 \implies -x^2+x-1 < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$



	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$-x^2+x-1$	$-$	$-$	$-$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{-x^2+x-1}{(x+2)(x-1)}$	$-$	$+$	$-$

Решење неједначине је $x \in (-2, 1)$.

4. Дата је ј-на $px^2+2(p+2)x+2p+4=0$.

Одредити вредност параметра p тако да су задовољени следећи услови.

1) Ј-на има два различита реална решења.

2) Ј-на има једно двоструко решење.

3) Ј-на нема реалних решења

4) Функција $f(x)=px^2+2(p+2)x+2p+4$ је позитивна за свако $x\in R$.

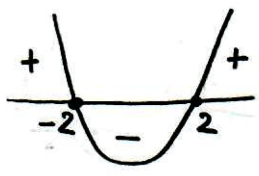
5) Ф-ја $f(x)$ је негативна за свако $x\in R$.

Р] $a=p \qquad b=2(p+2) \qquad c=2p+4$

$$D=b^2-4ac=\left(2(p+2)\right)^2-4\cdot p\cdot(2p+4)=$$
$$=4(p^2+4p+4)-8p^2-16p=-4p^2+16=-4(p^2-4)$$

1) Важи ако и само ако је $D>0$.

$$D=-4(p^2-4)>0$$
$$p^2-4<0$$
$$p^2-4=0 \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow p_1=2,\quad p_2=-2$$



$\Rightarrow p^2-4<0$ за $p\in(-2,2)$

Важи за $p\in(-2,2)$.

2) Важи акко је $D=0$.

$$D=-4(p^2-4)=0$$

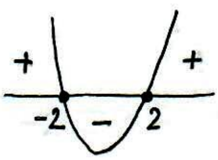
$$p^2-4=0 \Rightarrow p=\pm 2$$

Ј-на има једно двоструко решење за $p=2$ или $p=-2$.

3) Важи акко је $D<0$.

$$D=-4(p^2-4)<0$$

$$p^2-4>0$$



Ј-на нема реалних решења за $p\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

4) $f(x)>0 \Leftrightarrow a>0$ и $D<0$

$$a=p>0$$

$$D<0 \Leftrightarrow p\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$$

$f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ за $p\in(2,+\infty)$.

5) $f(x)<0 \Leftrightarrow a<0$ и $D<0$

$$a=p<0$$

$$D<0 \Leftrightarrow p\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$$

$f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ за $p\in(-\infty,-2)$.

(5.) Дата је ф-ја $f(x) = (p^2-1)x^2 + 2(p-1)x + 2$.

Одредити p тако да ф-ја $f(x)$ буде позитивна за сваки реалан број x.

Р) $a = p^2 - 1 \qquad b = 2(p-1) \qquad c = 2$

$D = b^2 - 4ac = \left(2(p-1)\right)^2 - 4(p^2-1)\cdot 2 =$

$= 4(p^2 - 2p + 1) - 8p^2 + 8 = -4p^2 - 8p + 12 =$

$= -4(p^2 + 2p - 3)$

$f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \iff a > 0$ и $D < 0$

$a > 0$

$p^2 - 1 > 0$

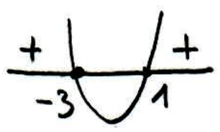
$\boxed{p \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}$

$D < 0$

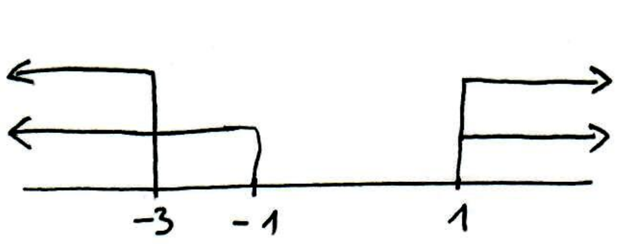
$-4(p^2 + 2p - 3) < 0$

$p^2 + 2p - 3 > 0$

$p^2 + 2p - 3 = 0 \Rightarrow p_1 = 1,\ p_2 = -3$



$\boxed{p \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)}$



Коначно решење је

$p \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right)$$

Следи

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$