Експоненцијална ф-ја

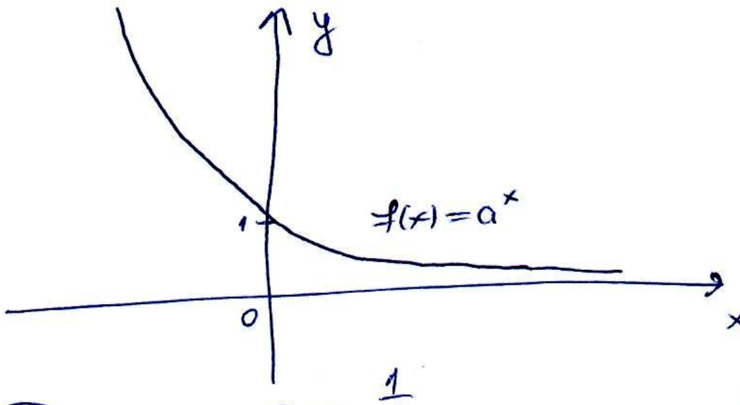
$f(x) = a^x, \quad a>0, \quad a \neq 1$

a – основа

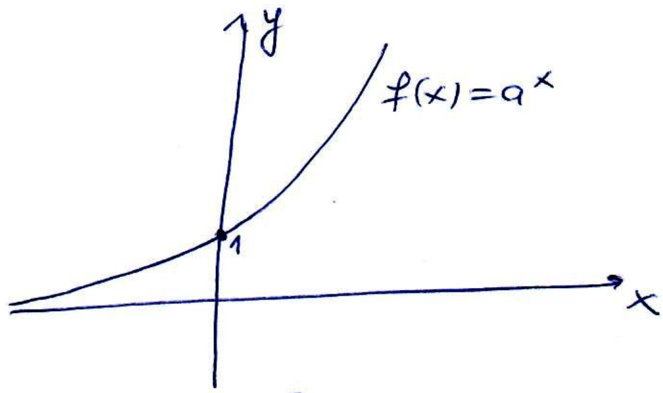
x – експонент

Домен $D = \mathbb{R}$

$1^\circ \quad 0<a<1$



$2^\circ \quad a>1$



Пример $a = \frac{1}{2}$

x	-2	-1	0	1	2
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Пример $a = 2$

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$f(D) = (0, +\infty)$ – кодомен

Пресек са y-осом $(0,1)$ $\quad f(0)=1$

Нема нула $\Rightarrow$ нема пресек са x-осом

Монотоност: за $0<a<1$ – монотоно опадајућа

$a>1$ – монотоно растућа

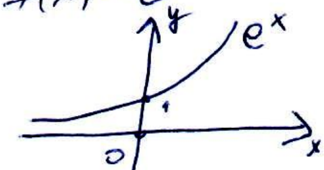
$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y} = (a^y)^x$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad (ab)^x = a^x b^x \qquad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

$a = e \approx 2,71$

$f(x) = e^x$



За $0<a<1$

$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$

За $a>1$

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x) \qquad a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$$

Експоненцијалне ј-не

1. Решити ј-ну

$$100 \cdot 10^{2x-2} = \cancel{10^2}\ 1000^{\frac{x+1}{9}} \quad (J)$$

Решење:

$$100 \cdot 10^{2x-2} = 10^2 \cdot 10^{2x-2} = 10^{2+(2x-2)} = 10^{2x}$$

$$1000^{\frac{x+1}{9}} = \left(10^3\right)^{\frac{x+1}{9}} = 10^{3\cdot\frac{x+1}{9}} = 10^{\frac{x+1}{3}}$$

$$(J) \iff 10^{2x} = 10^{\frac{x+1}{3}} \iff 2x = \frac{x+1}{3} \iff$$

$$\iff 6x = x+1$$

$$\iff 5x = 1$$

$$\iff \boxed{x = \frac{1}{5}}$$

2. Решити једначину:

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

Решење:

$$4^x + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$$

$$\iff 4^x + \frac{2^{2x}}{2} = 3^x \cdot 3^{\frac{1}{2}} + \frac{3^x}{3^{\frac{1}{2}}}$$

$$\iff 4^x + \frac{1}{2}4^x = \sqrt{3}\cdot 3^x + \frac{1}{\sqrt{3}}3^x$$

$$\iff 4^x\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\iff 4^x \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3^x$$

$$\iff 4^x = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3^x$$

$$\iff \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\iff \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3+1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

(3.) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0 \qquad D_J = R$

Решење: $(3^2)^{x^2-1} - \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} \cdot 4 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

$(3^{x^2-1})^2 - 4 \cdot 3^{x^2-1} + 3 = 0$

Смена $t = 3^{x^2-1} > 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$t_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

$1^\circ \; t_1 = 3 \Leftrightarrow 3^{x^2-1} = 3^1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$

$2^\circ \; t_2 = 1 \Leftrightarrow 3^{x^2-1} = 1 = 3^0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x_3 = -1$ или $x_4 = 1$

(4.) $4^{\sqrt{x-2}} - 12 = 2^{\sqrt{x-2}}$

Решење

$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_J = [2, +\infty)$

$(J) \Leftrightarrow (2^2)^{\sqrt{x-2}} - 12 = 2^{\sqrt{x-2}}$

$\Leftrightarrow (2^{\sqrt{x-2}})^2 - 2^{\sqrt{x-2}} - 12 = 0$

~~$\Leftrightarrow$~~ Смена: $t = 2^{\sqrt{x-2}}$, $t > 0$

$t^2 - t - 12 = 0$

$t_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$

$1^\circ \; t_1 = 4 \Leftrightarrow 4 = 2^{\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow 2^2 = 2^{\sqrt{x-2}}$

$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{x-2} \quad /^2$

$\Leftrightarrow 4 = x - 2$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 6}$ $\quad x=6$ припада $D_J \Rightarrow \boxed{x=6}$ јесте решење

$2^\circ \; t_2 = -3$ немогуће јер је $t = 2^{\sqrt{x-2}} > 0$,

Експоненцијалне неједначине

(5) $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0 \qquad D = \mathbb{R}$

Решење

$\Leftrightarrow x^2 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x \leq 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3) \cdot 3^x \leq 0$

Како је $3^x > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $x^2 - 3$ мора бити мање или једнако од 0.

$x^2 - 3 \leq 0$

$x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3$

$x_1 = \sqrt{3} \qquad x_2 = -\sqrt{3}$

$x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

Решење $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

(6) $5^{2x+1} > 5^x + 4$

Решење $5 \cdot 5^{2x} > 5^x + 4$

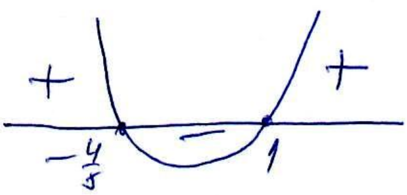
$\Leftrightarrow 5 \cdot (5^x)^2 - 5^x - 4 > 0$

Смена $t = 5^x > 0$

$\Leftrightarrow 5t^2 - t - 4 > 0$

$5t^2 - t - 4 = 0$

$t_{1/2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{10} = \dfrac{1 \pm 9}{10} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{4}{5} \end{cases}$



$t \in (-\infty, -\frac{4}{5}) \cup (1, +\infty)$

Како је $t = 5^x > 0$

$\Rightarrow t \in (1, +\infty)$

тј $t > 1$

$5^x > 1 = 5^0$

$\boxed{x > 0}$

7. $$\frac{4^x+2x-4}{x-1} \le 2$$

$D = R \setminus \{1\}$

$x-1 \ne 0$

$x \ne 1$

Решење

$$N \Leftrightarrow \frac{4^x+2x-4}{x-1} - 2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^x+2x-4-2(x-1)}{x-1} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^x+\cancel{2x}-4-\cancel{2x}+2}{x-1} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^x-2}{x-1} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (4^x-2 \le 0 \wedge x-1>0) \vee (4^x-2 \ge 0 \wedge x-1<0)$$

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
4^x-2	$-$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$+$	
$\frac{4^x-2}{x-1}$	$+$	$-$	$+$	

$4^x-2=0$

$4^x=2$

$(2^2)^x=2$

$2^{2x}=2^1 \Leftrightarrow 2x=1$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Решење $x \in [\frac{1}{2}, 1)$

8. $$\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \ge 1$$

Решење $x^2 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 0$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$N \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \ge 1 = \left(\frac{3}{7}\right)^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{\underbrace{x^2}_{>0}} \le 0$$ (јер су $\frac{3}{7}<1$ па је опадајућа)

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x_1=0 \qquad x_2=2$

	$-\infty$ ... 0	0 ... 2	2 ... $+\infty$
x^2-2x	$+$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-2x}{x^2}$	$+$	$-$	$+$

Решење $x \in (0,2]$

⑨ $(0{,}2)^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$

Решење

Домен: $x^2-1 \neq 0$

$x^2 \neq 1$

$x \neq \pm 1$

$D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

$D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$0{,}2=\frac{1}{5}=5^{-1}$

$25=5^2$

$N \Leftrightarrow 5^{-\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 5^2$

$(5>1)$

$\Leftrightarrow -\frac{x^2+2}{x^2-1} > 2$

(растућа)

$\Leftrightarrow 2+\frac{x^2+2}{x^2-1} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-1)+x^2+2}{x^2-1} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{x^2-1} < 0$

$3x^2=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

	$-\infty$ ... -1	-1 ... 0	0 ... 1	1 ... $+\infty$
$3x^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{3x^2}{x^2-1}$	$+$	$-$	$-$	$+$

Решење: $x \in (-1,0)\cup(0,1)$

(10) $\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}$

Решење   Домен $3^{x+1}-1 \neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$3^{x+1} \neq 1 = 3^0$

$x+1 \neq 0$

$x \neq -1$

$3^{x+1} = 3^x \cdot 3$

$\Rightarrow$ Смена $t = 3^x > 0$

$N \Leftrightarrow \frac{1}{t+5} < \frac{1}{3t-1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{t+5} - \frac{1}{3t-1} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{3t-1-t-5}{(t+5)(3t-1)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{2t-6}{(t+5)(3t-1)} < 0$

	$-\infty$ … -5	-5 … $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ … 3	3 … $+\infty$
$2t-6$	$-$	$-$	$-$	$+$
$t+5$	$-$	$+$	$+$	$+$
$3t-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{2t-6}{(t+5)(3t-1)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\Rightarrow t < -5 \quad \vee \quad t \in (\frac{1}{3}, 3)$

немогуће
јер је $t>0$

$\Rightarrow \frac{1}{3} < t < 3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < 3^x < 3$

$\Leftrightarrow 3^{-1} < 3^x < 3^1 \Rightarrow \boxed{x \in (-1, 1)}$

$\Leftrightarrow -1 < x < 1$

(11.) $\dfrac{1}{2^{2x}+3} \geq \dfrac{1}{2^{x+2}-1}$

Решење Домен $2^{x+2}-1 \neq 0$

$$2^{x+2} \neq 1 = 2^0$$

$$x+2 \neq 0$$

$$x \neq -2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Смена: $t = 2^x > 0$

$$N \Leftrightarrow \frac{1}{(2^x)^2+3} \geq \frac{1}{2^x \cdot 4 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t^2+3} \geq \frac{1}{4t-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t^2+3} - \frac{1}{4t-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4t-1-t^2-3}{(t^2+3)(4t-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-t^2+4t-4}{(t^2+3)(4t-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(t^2-4t+4)}{(t^2+3)(4t-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-2)^2 \geq 0}{\underbrace{(t^2+3)}_{>0}(4t-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (4t-1<0) \vee ((t-2)^2=0)$$

$$\Leftrightarrow (4t<1) \vee (t-2=0)$$

$$\Leftrightarrow \left(t<\tfrac{1}{4}\right) \vee (t=2)$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x<\tfrac{1}{4}\right) \vee (2^x=2)$$

$$\Leftrightarrow (2^x<2^{-2}) \vee (x=1)$$

$$\Leftrightarrow (x<-2) \vee x=1$$

$\Rightarrow$ Решење $x \in (-\infty, -2) \cup \{1\}$

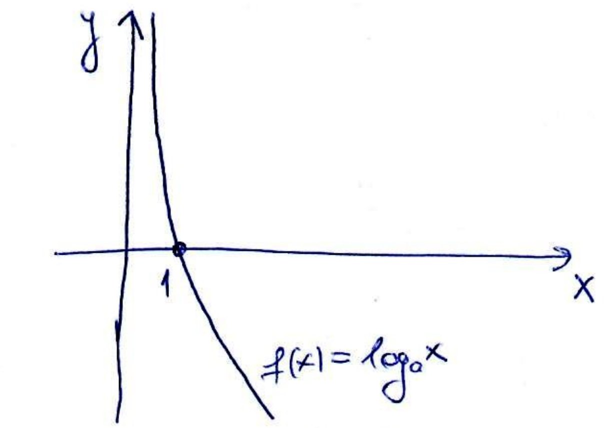
Логаритамска ф-ја

– са основом $a>0,\ a\neq 1$ је дефинисана са

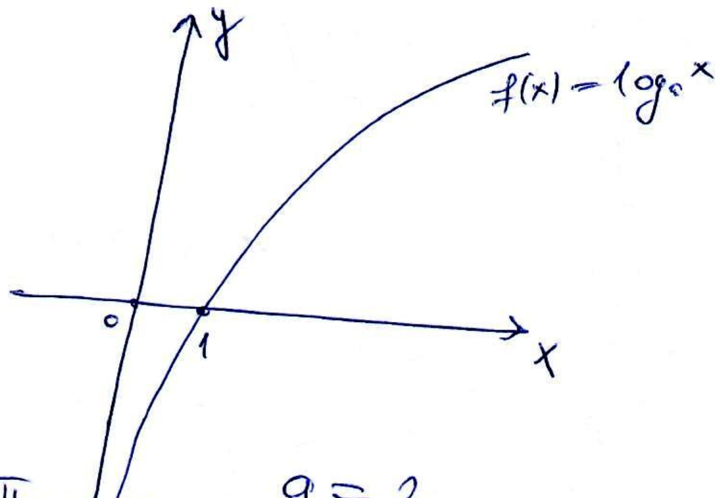
$$y=\log_a x = a^y = x$$

Домен: $D=(0,+\infty)$

1° $0<a<1$



2° $a>1$



Пример $a=\frac{1}{2}$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2

Пример $a=2$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2

$\log_5 25 = 2$ јер је $5^2=25$

$\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$ јер је $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$

За $a=e$ $\log_e x = \ln x$

$a=10$ $\log_{10} x = \log x$

$f(D)=\mathbb{R}$ – кодомен

Нула ф-је $\boxed{x=1}$ – пресек са x-осом

Нема пресека са y-осом

Монотоност:

за $0<a<1$ – монотоно опадајућа

за $a>1$ – монотоно растућа

$\log_a 1 = 0$

$y=\log_a x \iff a^y = x \iff a^{\log_a x} \iff x$

#1

Својства:

$\log_a x\cdot y = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

$\log_a x^c = c\log_a x \;;\; \log_{a^c} x = \frac{1}{c}\log_a x$

$\log_a x = \frac{\log_k x}{\log_k a}, \; k>0, \; k\neq 1$

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

За $0<a<1$

$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

За $a>1$

$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

7. Логаритамске ј-не

1. Решити једначину:

$$9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} = 5^{\log_{\frac{1}{5}}(2x^2+1)} \quad (J)$$

Домен: $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \Rightarrow D_J = (-1, +\infty)$

$2x^2+1>0$ тачно увек

$$9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} = (3^2)^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} = 3^{2\cdot\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}$$

$$= 3^{\log_{3^{-1}}(x+1)^2} = 3^{-\log_3(x+1)^2} = 3^{\log_3(x+1)^{-2}}$$

$$= (x+1)^{-2}$$

2

$$5^{\log_{\frac{1}{5}}(2x^2+1)} = 5^{-\log_5(2x^2+1)} = 5^{\log_5(2x^2+1)^{-1}}$$

$$= (2x^2+1)^{-1}$$

(J) $\iff (x+1)^{-2} = (2x^2+1)^{-1}$

$\iff \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2+1}$

$\iff 2x^2+1 = (x+1)^2$

$\iff 2x^2+\cancel{1} = x^2+2x+\cancel{1}$

$\iff x^2-2x=0$

$\iff x(x-2)=0$

$\iff x_1=0$ и $x_2=2$

$x_1, x_2 \in D_J$

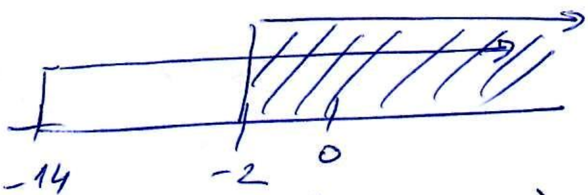
$\Rightarrow$ $\boxed{x_1=0,\ x_2=2 \text{ јесу решења}}$

2. $\log_2(x+14) = 6 - \log_2(x+2)$

<u>Домен</u>

$x+14>0 \iff x>-14$

$x+2>0 \iff x>-2$



$D_J = (-2, +\infty)$

(J) $\iff \log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$

$\log_2(x+14)(x+2) = 6 = \log_2 64$

$(x+14)(x+2) = 64$

$x^2+16x+28 = 64$

$x^2+16x-36=0$

$$x_{1/2} = \frac{-16\pm\sqrt{256-4\cdot 36}}{2} = \frac{-16\pm 20}{2} = \begin{cases} 2 \\ -18 \end{cases}$$

$x_1 = 2 \in D \Rightarrow x_1=2$ јесте решење

$x_2 = -18 \notin D \Rightarrow x_2$ није решење

(3) $\log \sqrt[3]{10(x-1)^2} - \frac{1}{3} \log (3+x)^2 = \frac{1}{3}$

Домен: $x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$ $\quad D_J = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

$3+x \neq 0 \iff x \neq -3$ $\quad D_J = (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\log \sqrt[3]{10(x-1)^2} = \log \left(10(x-1)^2\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 10(x-1)^2$$

$$(J) \iff \frac{1}{3} \log 10(x-1)^2 - \frac{1}{3} \log (3+x)^2 = \frac{1}{3} \quad / \cdot 3$$

$$\iff \log 10(x-1)^2 - \log (3+x)^2 = 1$$

$$\iff \log \frac{10(x-1)^2}{(3+x)^2} = 1 = \log 10$$

$$\iff \frac{\cancel{1}0(x-1)^2}{(3+x)^2} = \cancel{1}0$$

$$\iff \frac{(x-1)^2 - (3+x)^2}{(3+x)^2} = 0$$

$$\iff \frac{x^2 - 2x + 1 - (9 + 6x + x^2)}{(3+x)^2} = 0$$

$$\iff \frac{-8x - 8}{(3+x)^2} = 0 \iff -8x - 8 = 0$$

$$\iff \boxed{x = -1}$$

(4) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = \frac{21}{2}$

$D_J = (0, +\infty)$

$$\log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x = \frac{21}{2}$$

$$\frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = \frac{21}{2}$$

$$\cancel{\log_2 x} \quad \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right) \log_2 x = \frac{21}{2}$$

$$\frac{7}{4} \log_2 x = \frac{21}{2} \quad / \cdot \frac{4}{7}$$

$$\log_2 x = 6 \Rightarrow x = 2^6 = 64$$

јесте решење

4

(5.) $\log_3 x + \log_x 3 = \frac{1}{2} + \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x}$

Домен $x > 0$
$x \neq 1$ $\Rightarrow D_J = (0, +\infty) \setminus \{1\}$

$J \Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log_3 \sqrt{x}} + \frac{1}{2}\log_3 x$

$\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}\log_3 x} + \frac{1}{2}\log_3 x$

Смена $t = \log_3 x$

$t + \frac{1}{t} = \frac{1}{2} + \frac{2}{t} + \frac{1}{2}t$

$t - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{t}$

$\frac{1}{2}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{t} \quad / \cdot 2t$

$t^2 = t + 2$

$t^2 - t - 2 = 0$

$t_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right.$

$t_1 = 2 = \log_3 x \Rightarrow x_1 = 3^2 = 9$

$t_2 = -1 = \log_3 x \Rightarrow x_2 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$x_1, x_2 \in D_J \Rightarrow$ јесу решења

Логаритамске неједначине

6. $\log 10^{\log(x^2+21)} - \log x \le 1$

Домен: $D = (0, +\infty)$

$\Leftrightarrow \log(x^2+21) - \log x \le 1$

$\Leftrightarrow \log \frac{x^2+21}{x} \le 1 = \log 10$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+21}{x} \le 10$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+21}{x} - 10 \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+21-10x}{x} \le 0$

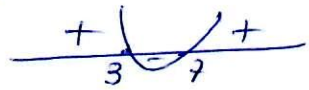
$\cancel{x^2+4}$

$x^2 - 10x + 21 = 0$

$x_1 = 7$

$x_2 = 3$

	$-\infty$ … 0	0 … 3	3 … 7	7 … $+\infty$
$x^2-10x+21$		$+$	$-$	$+$
x		$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-10x+21}{x}$		$+$	$-$	$+$



$\boxed{x \in [3, 7]}$

7. $\log \frac{2x-1}{x+2} \ge 0$

Домен: $\frac{2x-1}{x+2} > 0$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$x + 2 = 0$

$x = -2$

	$-\infty$ … -2	-2 … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … $+\infty$
$2x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$\frac{2x-1}{x+2}$	$+$	$-$	$+$

$D_{NJ} = (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

$\log \frac{2x-1}{x+2} \ge 0 = \log 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+2} \ge 1$

$\Leftrightarrow \frac{2x-1-x-2}{x+2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} \ge 0$

	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	
$x+2$	$-$	$+$	$+$	
	$+$	$-$	$+$	

$$R=(-\infty,-2)\cup[3,+\infty)$$

8.
$$\frac{\log^2 x-3\log x+3}{\log x-1}\le 1$$

$x\geq 0$
$\log x-1\neq 0$
$\log x=1\neq \log 10$
$x\neq 10$

$$D_{HJ}=(0,10)\cup(10,+\infty)$$
$$=(0,+\infty)\setminus\{10\}$$

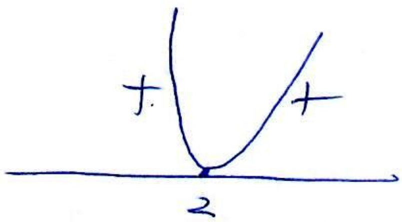
Смена $t=\log x$

$$(N)\Leftrightarrow \frac{t^2-3t+3}{t-1}\le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2-3t+3-t+1}{t-1}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2-4t+4}{t-1}\le 0$$

$t^2-4t+4=0$
$(t-2)^2=0 \Rightarrow t_{1/2}=2$



	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$(t-2)^2$	$+$	$+$	$+$	
$t-1$	$-$	$+$	$+$	
	$-$	$+$	$+$	

$t\in(-\infty,1)\vee t=2$
$t<1$

1° за $t=2$ $\quad \log x=2 \Rightarrow x=10^2=100$

2° за $t<1$ $\quad$ т.е. $\log x<1=\log 10 \Leftrightarrow x<10$

$$R=(0,10)\cup\{100\}$$

⑨ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1-2x}{1+x} \geq 2$

Решење

Домен $\frac{1-2x}{1+x} > 0$

$1-2x=0 \Leftrightarrow 2x=1$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$

	$-\infty$ … -1	-1 … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … $+\infty$
$1-2x$	+	+	−
$1+x$	−	+	+
$\frac{1-2x}{1+x}$	−	+	−

$D_{НД} = (-1, \frac{1}{2})$

$N \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1-2x}{1+x} \geq 2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1-2x}{1+x} \leq \frac{1}{4} \quad / \cdot 4$

$\Leftrightarrow \frac{4-8x}{1+x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4-8x}{1+x} - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{4-8x-(1+x)}{1+x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4-8x-1-x}{1+x} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-9x+3}{1+x} \leq 0$

$-9x+3=0$

$-9x=-3$

$\boxed{x=+\frac{1}{3}}$

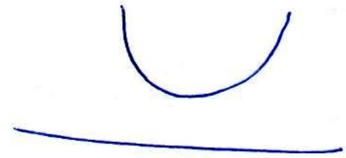
	$-\infty$ … -1	-1 … $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … $+\infty$
$-9x+3$	+	+	−	−
$1+x$	−	+	+	+
$\frac{-9x+3}{1+x}$	−	+	−	$\cancel{+}$

$\boxed{x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})}$

⑩ $1 < \log_2(x^2+3x+4) \le 2$

Решење

Домен: $x^2+3x+4>0$



$$x^2+3x+4=0$$

$$D=9-4\cdot4\cdot1=9-16<0$$

$$\Rightarrow x^2+3x+4>0 \text{ за } \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{D=\mathbb{R}}$$

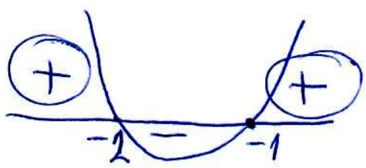
$$N \Leftrightarrow \log_2 2 < \log_2(x^2+3x+4) \le \log_2 4$$

$$\Leftrightarrow 2 < x^2+3x+4 \le 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2+3x+2>0) \wedge (x^2+3x\le 0)$$

$$x^2+3x+2=0$$

$$x_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm1}{2}=\begin{cases}-1\\-2\end{cases}$$

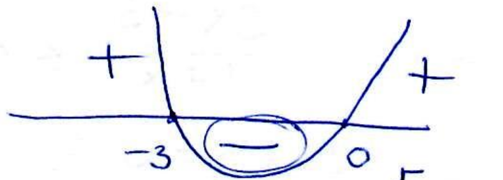


$x\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$

$$x^2+3x=0$$

$$x(x+3)=0$$

$x_1=0$ $x_2=-3$



$x\in[-3,0]$

~~$x\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$~~

~~$\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty$~~

$$\boxed{x\in[-3,-2)\cup(-1,0]}$$