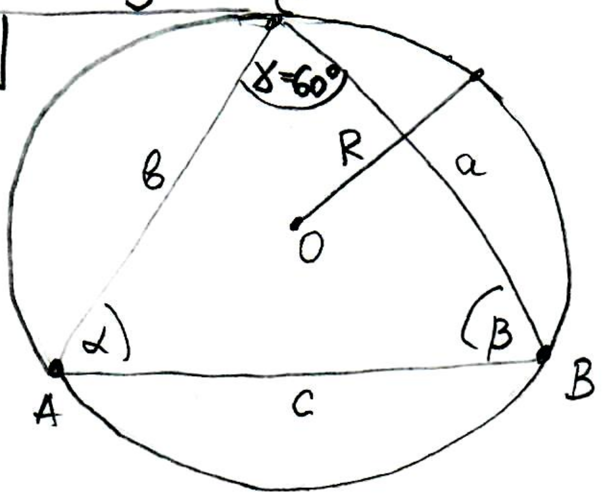
Геометрија

ЈУН 2020

(1) У троуглу $\triangle ABC$ разлика страница a и b је 3, угао $\gamma = 60^\circ$, а полупречник описане кружнице је $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. Одредити странице троугла ABC.

Р:



$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}$$

синусна теорема

$$c = 2R\cdot\sin\gamma = 2\cdot\frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot\sin 60^\circ$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{c = 7}$$

$$a - b = 3 \Rightarrow \boxed{a = b+3}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

косинусна теорема

$$\xRightarrow{\text{замена}} 7^2 = (b+3)^2 + b^2 - 2(b+3)\cdot b\cdot\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 49 = b^2 + 6b + 9 + b^2 - \cancel{2}(b+3)b\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \cancel{b^2} + 6b + 9 + b^2 - \cancel{b^2} - 3b$$

$$\Rightarrow 49 = b^2 + 3b + 9 \Rightarrow 0 = b^2 + 3b - 40 \Rightarrow b^2 + 3b - 40 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1(-40)}}{2\cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-3 \pm 13}{2} \rightarrow b_1 = 5, \; b_2 = -8$$

1° $\boxed{b = 5} \Rightarrow a = b+3 = 5+3 \Rightarrow \boxed{a = 8}$

2° $b = -8$ – немогуће да дужина странице буде негативан број

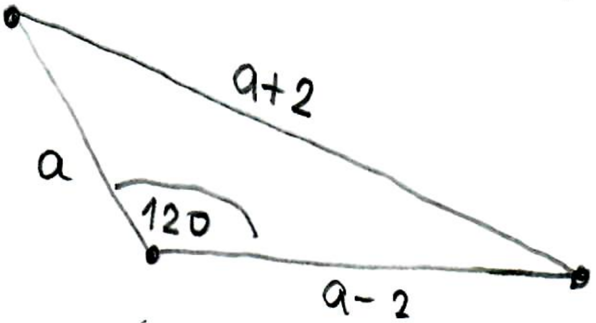
② Ако су странице троугла $a-2, a, a+2$, а један угао износи $120°$, одредити све странице троугла

Р:

Како је збир сва три угла у једном троуглу увек $180°$ што значи да је угао од $120°$ највећи.

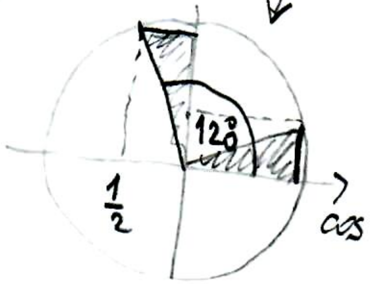
Наспрам највећег угла се налази највећа страница

Закључак: наспрам угла $120°$ је страница $a+2$



Примењујемо косинусну Т. за страницу $a+2$

$$(a+2)^2 = a^2 + (a-2)^2 - 2a(a-2)\cos 120°$$



$$\Rightarrow \cancel{a^2}+4a\cancel{+4} = a^2 + a^2 - 4a\cancel{+4} - \cancel{2}a(a-2)\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$\Rightarrow 4a = a^2 - 4a + a^2 - 2a$$

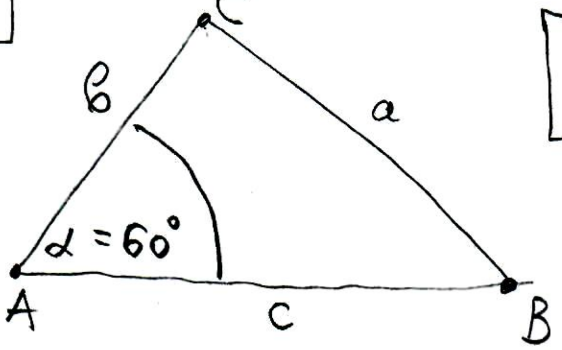
$$\Rightarrow 0 = 2a^2 - 10a = 2a(a-5) = 0$$

$\boxed{a=0 \text{ немогуће}}$ $\boxed{a=5}$

Странице су: $a=\boxed{5}$, $a-2=5-2=\boxed{3}$ и $a+2=5+2=\boxed{7}$

③ Одредити странице троугла површине $P = 3\sqrt{3}$ ако је угао $\alpha = 60°$ а збир дужина страница које образују дати угао је $b + c = 7$

Р:



$$\boxed{P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha} \Rightarrow 3\cancel{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} bc \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{bc}{4} \Rightarrow \boxed{b \cdot c = 12}$$

Из $\boxed{b + c = 7} \Rightarrow \boxed{c = 7 - b}$

Заменом се добија:

$$b \cdot c = 12 \Rightarrow b \cdot (7 - b) = 12 \Rightarrow 7b - b^2 = 12 \Rightarrow \boxed{b^2 - 7b + 12 = 0}$$

$$b_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} b_1 = 4 \\ b_2 = 3 \end{array}}$$

Како је $b + c = 7$ добија се:

1° $\boxed{b = 4} \Rightarrow \boxed{c = 3}$ или 2° $\boxed{b = 3} \Rightarrow \boxed{c = 4}$

Из косинусне теореме налазимо трећу страницу a

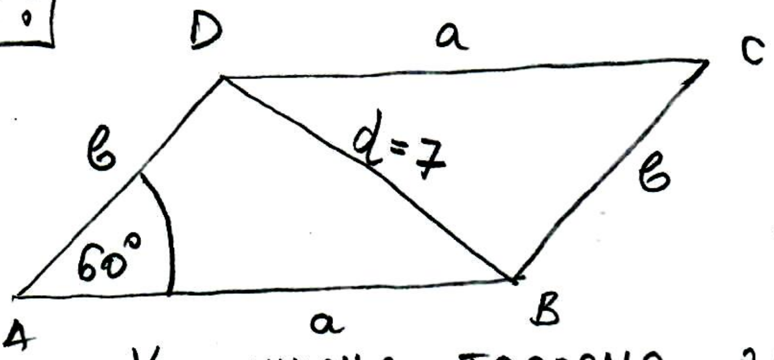
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 60° \Rightarrow$$

$$a^2 = 16 + 9 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 13 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{13}}$$

Коментар: (Вредност $a = -\sqrt{3}$ се одбацује!)

(8) Израчунати стране паралелограма чији је обим $O=22cm$, оштар $60°$ и мања дијагонала је $7cm$.

P:



$O = 2a + 2b = 22 \ /:2$

$\Rightarrow a+b = 11$

$\Rightarrow \boxed{b = 11-a}$

Косинусна теорема за дијагоналу $d=7$

$d^2 = a^2+b^2-2a\cdot b\cdot \cos 60°$. Заменом $d=7$ и $b=11-a$ је:

$7^2 = a^2+(11-a)^2 - \cancel{2}\cdot a(11-a)\cdot \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 49 = a^2+121-22a+a^2-11a+a^2 = 3a^2-33a+121$

$\Rightarrow 3a^2-33a+121-49=0 \Rightarrow 3a^2-33a+72=0 \ /:3$

$\Rightarrow \boxed{a^2-11a+24=0}$

$a_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-4\cdot 1\cdot 24}}{2} = \frac{11\pm 5}{2}$ → $\boxed{a_1 = 8}$, → $\boxed{a_2 = 3}$

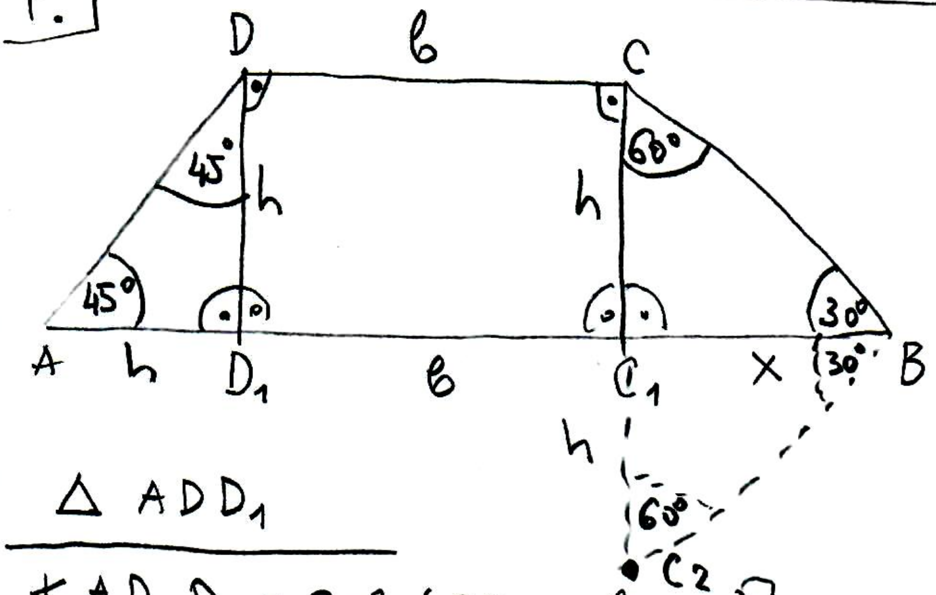
1° Ако је $\boxed{a=8} \Rightarrow b = 11-a \Rightarrow \boxed{b=3}$

2° Ако је $\boxed{a=3} \Rightarrow b = 11-a \Rightarrow \boxed{b=8}$

У оба случаја добијамо исте странице $\boxed{8cm \text{ и } 3cm}$

(16) Основе трапеза су $a = 8cm$ и $b = 4cm$, а углови на већој основици су $30°$ и $45°$. Израчунати површину овог трапеза.

P:



$\triangle ADD_1$

$\sphericalangle AD_1D = 90°$ (DD_1 је висина)

$\sphericalangle D_1AD = 45°$ – дато

Трећи угао је:

$\sphericalangle ADD_1 = 180° - 90° - 45° = 45°$

$\Rightarrow \sphericalangle D_1AD = \sphericalangle ADD_1 = 45°$

$\triangle ADD_1$ је једнакокрак, па је $\boxed{AD_1 = DD_1 = h}$

$\triangle CC_1B$

$\sphericalangle BC_1C = 90°$ (CC_1 је висина)

$\sphericalangle C_1BC = 30°$ – дато

Трећи угао је

$\sphericalangle C_1CB = 180° - 90° - 30° = 60°$

$\Rightarrow$

I начин

$x = C_1B$ је висина једнакостраничног троугла $\triangle CBC_2$

$x = \frac{2h}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{x = h\sqrt{3}}$

II начин

из дефиниције ф-је тангенс:

$tg(\sphericalangle C_1BC) = tg30° = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow x = \frac{h}{tg30°} = \frac{h}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3h}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}h}{\cancel{3}}$

$\Rightarrow \boxed{x = h\sqrt{3}}$

$a = h + b + x \Rightarrow 8 = h + 4 + h\sqrt{3}$

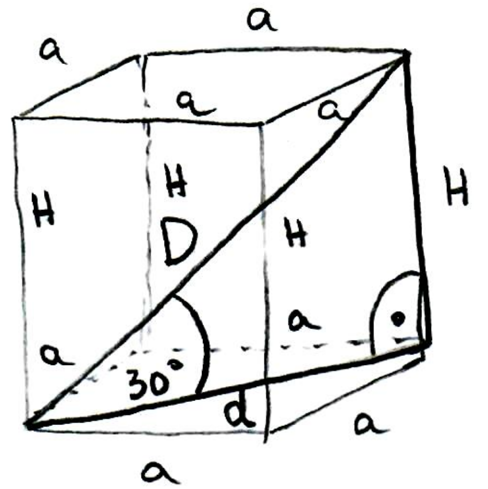
$\Rightarrow 4 = h(1+\sqrt{3}) \Rightarrow \boxed{h = \frac{4}{1+\sqrt{3}}}$

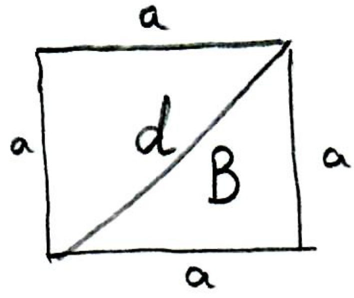
$\boxed{P = \frac{a+b}{2} \cdot h} = \frac{8+4}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{\,2}}{1+\sqrt{3}} =$

$= \boxed{\frac{24}{1+\sqrt{3}}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{24(1-\sqrt{3})}{1^2 - (\sqrt{3})^2}$

$= \frac{24(1-\sqrt{3})}{-2} = \boxed{12(\sqrt{3}-1)}\, cm^2$

23) Израчунати површину и запремину правилне четворостране призме код које је површина омотача $M = 18\sqrt{6}\ cm^2$ а нагибни угао њене дијагонале према основи је 30°

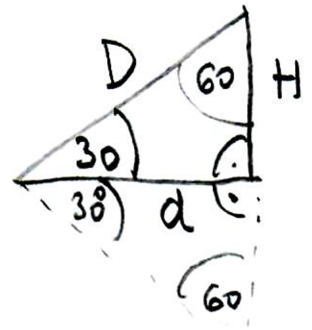




$a^2 + a^2 = d^2$

$d = \sqrt{2a^2} \Rightarrow$

$\boxed{d = a\sqrt{2}}$



$tg30^\circ = \frac{H}{d}$

$\Rightarrow H = d \cdot tg30^\circ$

$H = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{H = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}}$

$M = 4 \cdot a \cdot H = 4 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}a^2\sqrt{6}$

$M = 18\sqrt{6}$

$\Rightarrow \frac{4}{3}a^2\cancel{\sqrt{6}} = 18\cancel{\sqrt{6}}$

$a^2 = \frac{3 \cdot \cancel{18}^{9}}{\cancel{4}_2} = \frac{27}{2}$

$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\boxed{a = \frac{3\sqrt{6}}{2}}$

$H = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\cancel{3}} \Rightarrow \boxed{H = 3}$

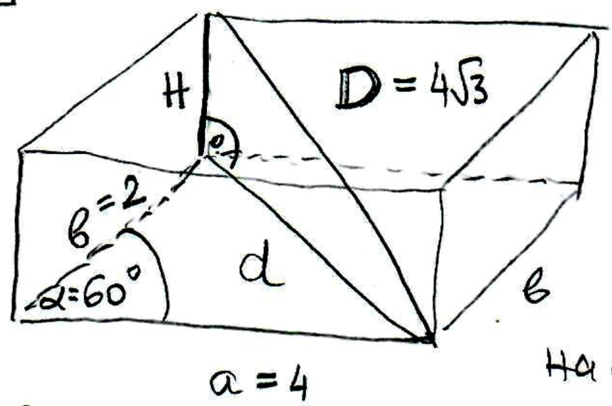
$P = 2B + M = 2a^2 + 18\sqrt{6} = 2\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 18\sqrt{6} =$

$= \cancel{2}\frac{9 \cdot 6^3}{\cancel{4}2} + 18\sqrt{6} = \boxed{(27 + 18\sqrt{6})\ cm^2}$

$V = B \cdot H = a^2 \cdot H = \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 \cdot 3 = \frac{9 \cdot \cancel{6}^3}{\cancel{4}_2} \cdot 3 \Rightarrow \boxed{V = \frac{81}{2}}$

(26) Основа правог паралелопипеда је паралелограм са страницама 4 cm и 2 cm и оштрим углом $\alpha = 60^\circ$. Краћа дијагонала паралелопипеда је $4\sqrt{3}$ cm. Израчунати запремину тог паралелопипеда

P:



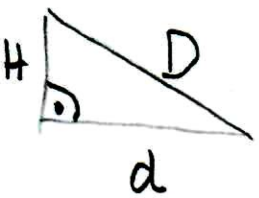
$\boxed{B = a \cdot b \cdot \sin 60^\circ} = 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{4\sqrt{3}}$ cm²

$\boxed{V = B \cdot H}$ $\quad H = ?$

Краћу дијагоналу у базису налазимо из косинусне теореме

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 16 + 4 - 16 \cdot \frac{1}{2} = 12 \Rightarrow d = \sqrt{12} \Rightarrow \boxed{d = 2\sqrt{3}} \text{ cm}$$

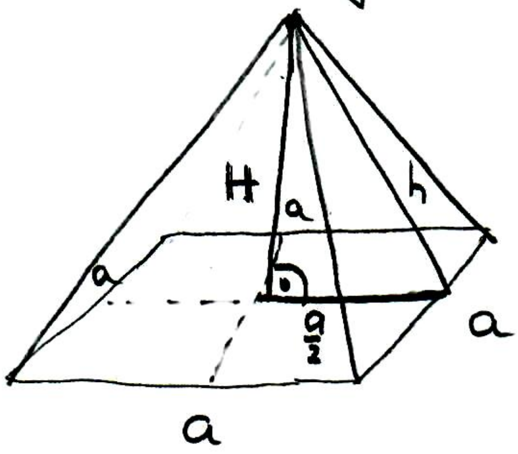


$\boxed{H^2 = D^2 - d^2} = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$

Питагорина Т. $\Rightarrow H = \sqrt{36} \Rightarrow \boxed{H = 6 \text{ cm}}$

$$V = B \cdot H = 4\sqrt{3} \cdot 6 = \boxed{24\sqrt{3} \text{ cm}^3}$$

31) Правилна четворострана пирамида има површину основе $72cm^2$, а омотача $12\sqrt{41}\ cm^2$. Израчунати њену запремину.



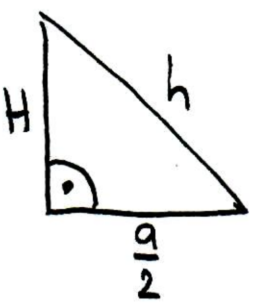
$$B = a^2 = 72 \Rightarrow a = \sqrt{72} = \sqrt{2 \cdot 36}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 6\sqrt{2}}$$

Површина бочне стране је $\frac{a \cdot h}{2}$ па је површина целог омотача $M = \cancel{4} \cdot \frac{a \cdot h}{\cancel{2}} = 2ah$. У задатку је дата површина омотача $M = 12\sqrt{41}$. Дакле,

$$\left.\begin{matrix} M = 2ah \\ M = 12\sqrt{41} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \cancel{2}ah = \overset{6}{\cancel{12}}\sqrt{41} \,/ : 2 \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{41}}{a}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\cancel{6}\sqrt{41}}{\cancel{6}\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}}}$$



Налазимо висину пирамиде из Питагорине теореме

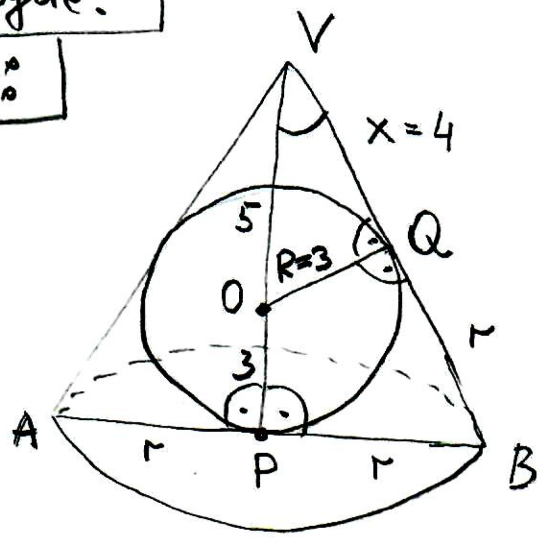
$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{41}{2} - \frac{36 \cdot \cancel{2}}{\cancel{4}2}$$

$$\Rightarrow H^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow H = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{H = \frac{\sqrt{10}}{2}}$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{\overset{12}{\cancel{36}}}{\cancel{72}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{V = 12\sqrt{10}}$$

(36) У праву купу висине $H = 8cm$ уписана је лопта полупречника $R = 3cm$. Израчунати површину те купе.

Р:



Како је полупречник лопте $R = 3$ то је $R = OP = OQ = 3$ тада је $OV = PV - OP = 8 - 3 = \boxed{5}$

Како су тангентне дужи повучене из исте тачке на исти круг увек једнаке следи $\boxed{BQ = BP = r}$ - полупречник базиса

$\triangle OQV$ је правоугли јер полупречник OQ и тангента BV граде угао од $90°$

Питагорина Т: $x^2 = QV^2 = OV^2 - OQ^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

I начин

Питагорина Т у $\triangle BPV$

$BP^2 + PV^2 = BV^2$ тј.

$\cancel{r^2} + 8^2 = (r+4)^2 = \cancel{r^2} + 8r + 16$

$\Rightarrow 8r + 16 - 64 = 0 \Rightarrow 8r = 48$

$\boxed{r = 6}$

II начин

$\triangle BPV \underset{\text{(сличност)}}{\sim} \triangle OQV$

(два једнака угла)

$\sphericalangle BPV = \sphericalangle OQV = 90°$

$\sphericalangle PVB = \sphericalangle OVQ$ (исти угао)

Следи: $\frac{QV}{VP} = \frac{OQ}{PB} \Rightarrow \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{8}_2} = \frac{3}{r}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{r} \Rightarrow \boxed{r = 6}$

$P = B + M = r^2\pi + rs\pi = 6^2\pi + 6(6+4)\pi = (36+60)\pi$

$\Rightarrow \boxed{P = 96\pi} cm^2$