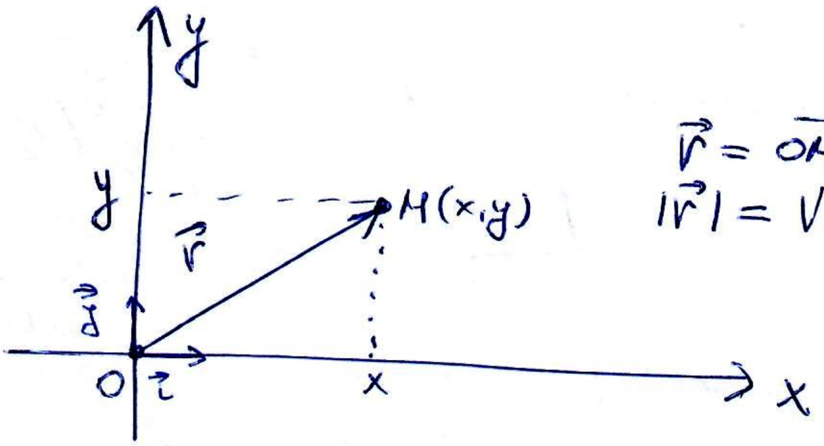
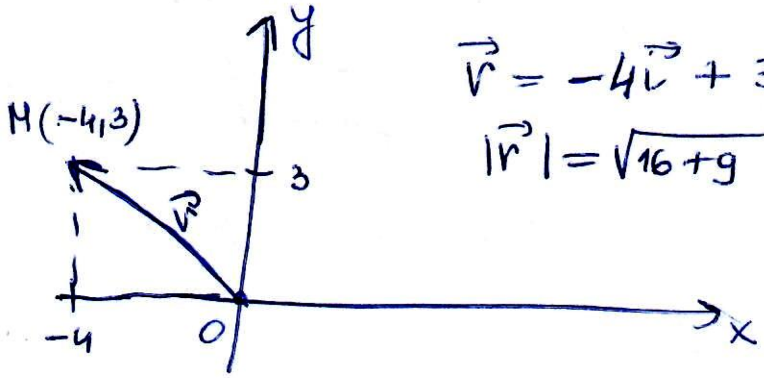
# Аналитичка геометрија




$\vec r = \vec{OM}$ → вектор положаја

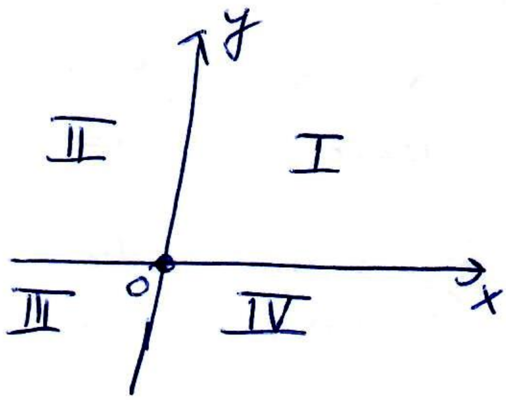
$|\vec r| = \sqrt{x^2+y^2}$ – интензитет вектора $\vec r$

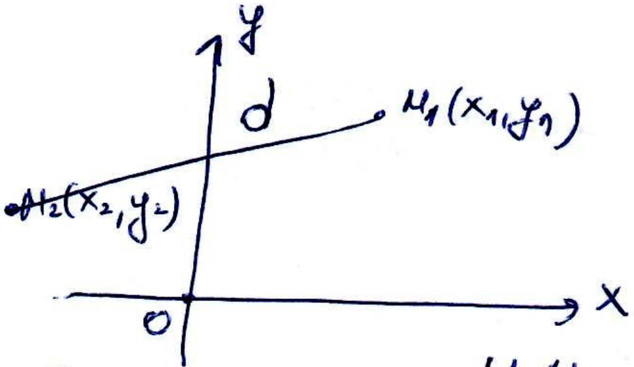
$\vec r = x\cdot\vec i + y\cdot\vec j$




$\vec r = -4\vec i + 3\vec j$

$|\vec r| = \sqrt{16+9} = 5$




$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

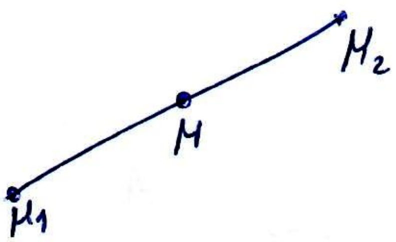
↓ Растојање између две тачке $M_1$ и $M_2$

Подела дужи $M_1M_2$ у размери $m:n$ тачком $M(x,y)$:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow x = \frac{nx_1+mx_2}{n+m}$$

$$y = \frac{ny_1+ny_2}{n+m}$$

Средиште дужи $M(x,y)$




$$x = \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

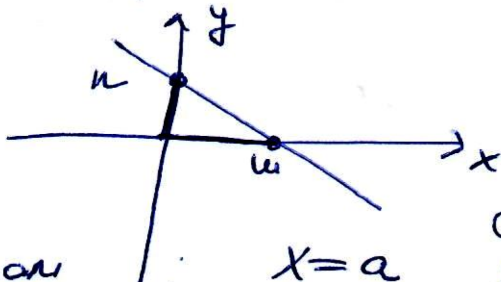
# Права

$Ax + By + C = 0$ – општа ј-на праве

$y = kx + n$ – директни облик

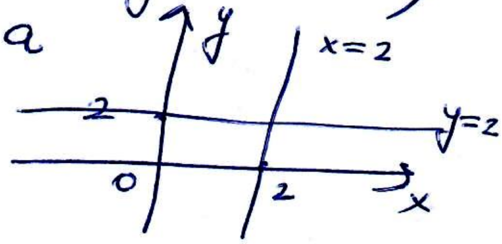
$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$

$k = tg\,\alpha$ – коефицијент правца ($\alpha$ угао који права заклапа са позитивним делом x-осе)




Праве паралелне са y-осом : $x = a$

Праве паралелне са x-осом : $y = a$




x-оса : $y = 0$

y-оса : $x = 0$

– Једначина праве која има коеф. правца $k$ и пролази кроз тачку $M_1(x_1, y_1)$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

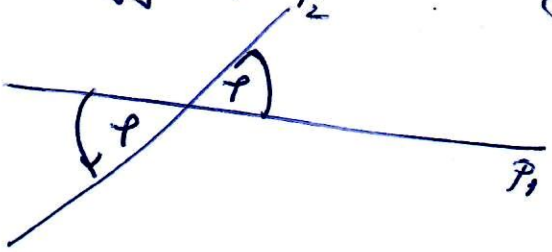
– Једначина праве кроз две тачке $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Две праве $y = k_1 x + n_1$ и $y = k_2 x + n_2$ су паралелне ако је $k_1 = k_2$

Праве су нормалне ако је $k_1 \cdot k_2 = -1$

Угао између правих $tg\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$

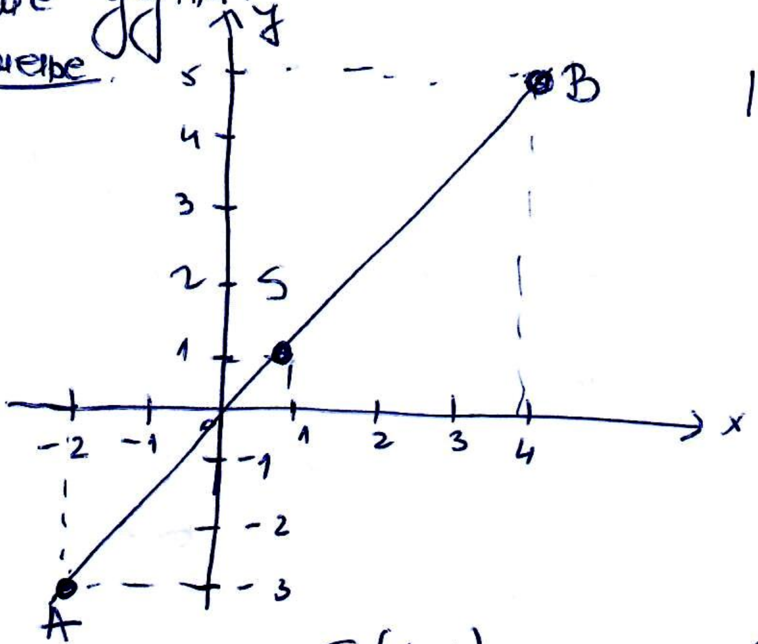



Растојање тачке $M_0(x_0, y_0)$ од праве $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

1. Нацртати дуж $AB$ са координатама $A(-2,-3)$, $B(4,5)$. Одредити дужину дужи $AB$ и координате средишта те дужи.

Решење:




$S(1,1)$

$$|AB| = \sqrt{(4-(-2))^2 + (5-(-3))^2}$$
$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$
$$= \sqrt{100} = 10$$

$S(x,y)$

$$x = \frac{4+(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

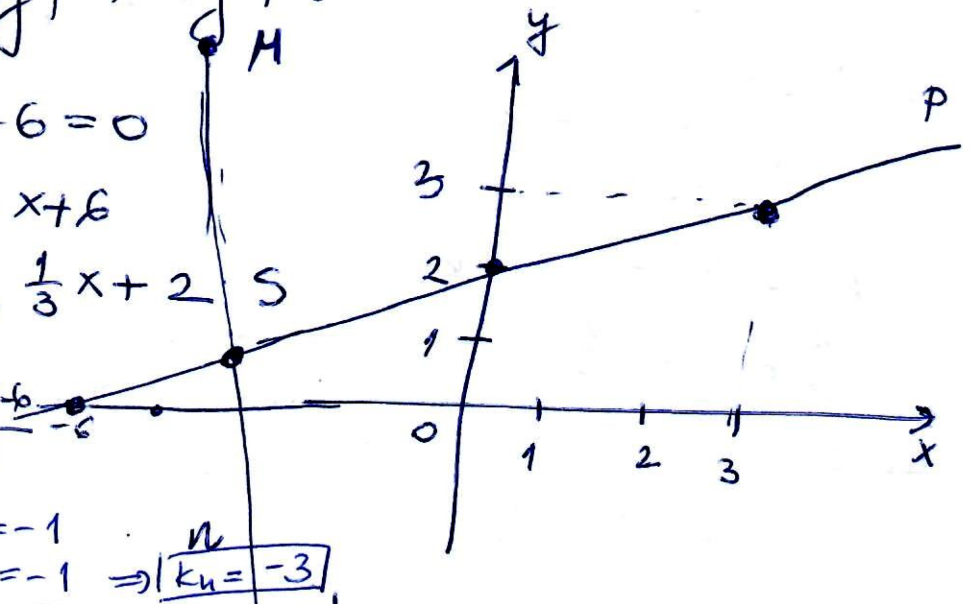
$$y = \frac{5+(-3)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

2. Наћи координате тачке $M'$ симетричне тачки $M(-5,7)$ у односу на праву $p: x-3y+6=0$

Решење:

$$x-3y+6=0$$
$$3y = x+6$$
$$y = \frac{1}{3}x + 2$$

| $x$ | 0 | 3 | −6 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 | 0 |




$k_n \cdot k_p = -1$

$k_n \cdot \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow \boxed{k_n = -3}$

$n \perp p \Rightarrow y = -3x + n$

$M(-5,7) \in n \Rightarrow 7 = -3\cdot(-5) + n$

$7 = 15 + n \Rightarrow \boxed{n = -8}$

$n: y = -3x - 8$

$\{S\} = n \cap p \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + 2 \\ y = -3x - 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}x + 2 = -3x - 8$

$\frac{10}{3}x = -10 \Rightarrow x = -3$

$y = \frac{1}{3}\cdot(-3) + 2$

$y = 1$

3

$S(-3,1)$

$M'(x_0,y_0)$ $\Rightarrow$ $-3 = \frac{-5+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -1$

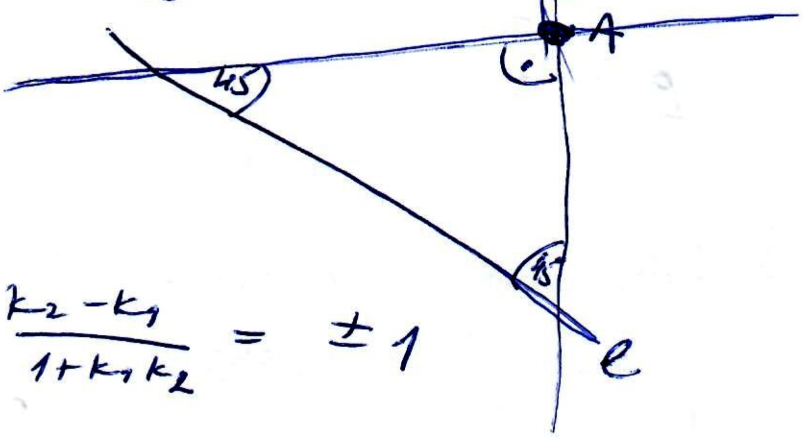
$1 = \frac{7+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -5$

$\boxed{M'(-1,-5)}$

③ Одредити ј-ну праве која пролази кроз тачку $A(2,1)$ и са правом $l: 2x+3y+4=0$ заклапа угао од $45^\circ$.

Решење: $l: 3y = -2x-4$

$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow k_1 = -\frac{2}{3}$




$p: y = k_2 x + n_2$

$tg\,45^\circ = 1 = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$

$\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right| = 1 \Rightarrow \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} = \pm 1$

$1^\circ$ $\frac{k_2+\frac{2}{3}}{1+(-\frac{2}{3})k_2} = 1$

$k_2 + \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3}k_2$

$\frac{5}{3}k_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow k_2 = \frac{1}{5}$

$A \in p$

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{5}\cdot 2 + n_2$

$n_2 = \frac{3}{5}$

$\boxed{p_1: y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}}$

$2^\circ$ $\frac{k_2+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}k_2} = -1$

$k_2 + \frac{2}{3} = -1 + \frac{2}{3}k_2$

$\frac{1}{3}k_2 = -\frac{5}{3}$

$k_2 = -5$

$A \in p$

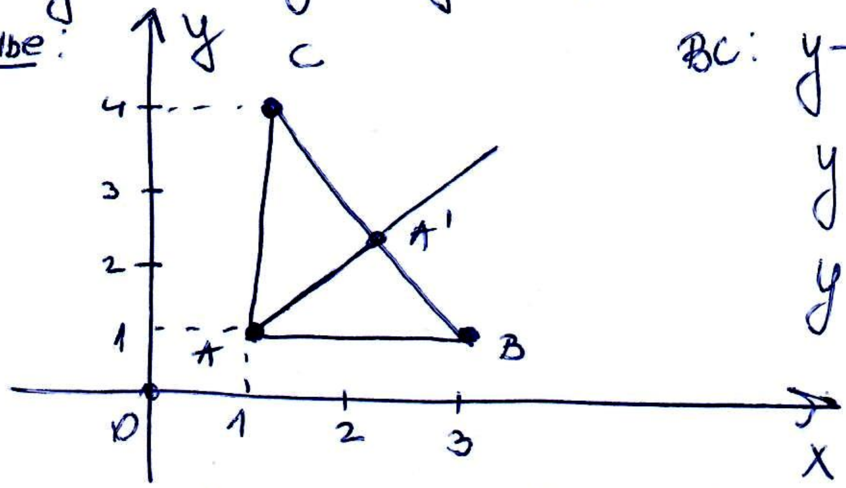
$\Rightarrow 1 = -5\cdot 2 + n_2$

$n_2 = 11$

$\boxed{p_2: y = -5x + 11}$

4. У Декартовом правоуглом координатном систему тачке $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(1,4)$ су темена правоуглог троугла. Одредити једначину праве која садржи хипотенузину висину и подножје нормале на хипотенузу.

Решење:




$BC:\ y-4 = \frac{4-1}{1-3}(x-1)$

$y-4 = -\frac{3}{2}(x-1)$

$y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + 4$

$$\boxed{y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}}$$

$AA' \perp BC \Rightarrow k_{AA'} \cdot k_{BC} = -1 \Rightarrow k_{AA'} = \frac{2}{3}$

$A \in AA' \Rightarrow y-1 = \frac{2}{3}(x-1)$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 1$

$$\boxed{AA':\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}$$

$\{A'\} = AA' \cap BC$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \ /\cdot 6$$

$4x + 2 = -9x + 33$

$13x = 31$

$x = \frac{31}{13}$

$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{31}{13} + \frac{1}{3}$

$y = \frac{62+13}{13\cdot 3} = \frac{75}{13\cdot 3}$

$= \frac{25}{13}$

$$\boxed{A'\left(\frac{31}{13}, \frac{25}{13}\right)}$$

5. Написати једначину нормале на праву $p: 2x+6y-3=0$ ако је растојање тачке $A(5,4)$ од тражене нормале $\sqrt{10}$.

<u>Решење</u>: $p: \quad 2x+6y-3=0$

$$6y = -2x+3$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$q$ је тражена нормала $\Rightarrow k_q \cdot k_p = -1$

$$\boxed{k_q = 3}$$

$\Rightarrow q: \quad y = 3x + n \Leftrightarrow 3x - y + n = 0$

$A = 3$
$B = -1$
$C = n$

$$\sqrt{10} = \frac{|3\cdot 5 - 4\cdot 1 + n|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$$

$$\sqrt{10} = \frac{|11+n|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 10 = |11+n|$$

$1^\circ \quad 11+n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq -11 \Rightarrow 10 = 11+n$

$$\boxed{n = -1}$$

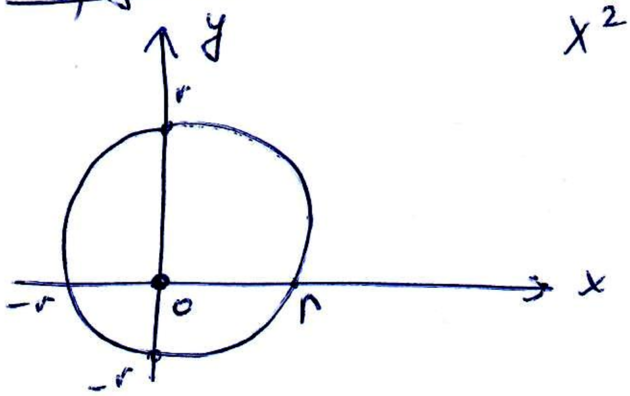
$q: \quad y = 3x - 1$

$2^\circ \quad 11+n < 0 \Leftrightarrow n < -11 \Rightarrow 10 = -11-n$

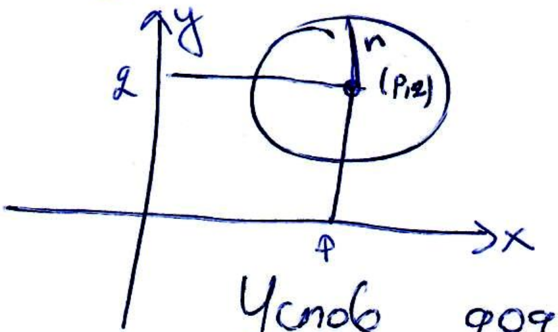
$$\boxed{n = -21}$$

$q: \quad y = 3x - 21$

# Круг




$$x^2+y^2=r^2$$




$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

## Услов додира са правом $y=kx+n$

$r^2(1+k^2)=n^2$

$r^2(1+k^2)=(n+kp-q)^2$ $\Rightarrow$ Права $y=kx+n$ је тангента круга

---

$r^2(1+k^2)>n^2$

$r^2(1+k^2)>(n+kp-q)^2$ $\Rightarrow$ Права $y=kx+n$ је сечица (пресек у две тачке)

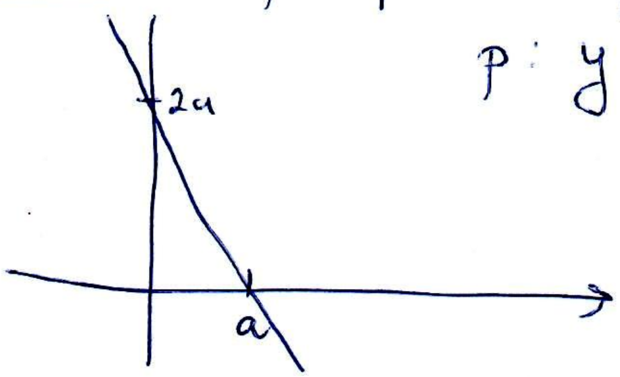
---

$r^2(1+k^2)<n^2$

$r^2(1+k^2)<(n+kp-q)^2$ — нема пресека

1. Одредити ј-ну праве $p$ која одсеца на позитивном делу $y$-осе два пута већи одсечак него на позитивном делу $x$-осе и додирује кружницу $x^2+(y-3)^2=20$.

Решење: $p$ пролази кроз тачке $(a,0)$ и $(0,2a)$




$p: y=kx+n \Rightarrow 0=ak+n$

$2a=n$

$\Rightarrow 0=ak+2a$

$ak=-2a$

$\boxed{k=-2}$

Услов додира:

$$r^2(1+k^2) = (n+kp-q)^2$$

$$20(1+(-2)^2) = (n+(-2)\cdot 0-3)^2$$

$$20\cdot 5 = (n-3)^2 \Rightarrow |n-3| = 10$$

$$n_1 = 13 \quad \Rightarrow \quad p: y = -2x+13$$
$$n_2 = -7 \quad \quad p: y = -2x-7$$

(2.) Написати ј-ну круга описаног око $\Delta ABC$

$A(3,-7)$, $B(8,-2)$, $C(6,2)$

Решење $\quad k: (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$

$A, B, C \in k \Rightarrow$ I $\quad (3-p)^2 + (-7-q)^2 = r^2$

II $\quad (8-p)^2 + (-2-q)^2 = r^2$

III $\quad (6-p)^2 + (2-q)^2 = r^2$

I, II

$$\Rightarrow 9 - 6p + \cancel{p^2} + 49 + 14q + \cancel{q^2} = 64 - 16p + \cancel{p^2} + 4 + 4q + \cancel{q^2}$$

$$10p + 10q + 58 - 68 = 0$$

$$10p + 10q - 10 = 0$$

$$\boxed{p+q-1=0} \Rightarrow p = 1-q, \quad \boxed{-p = -1+q} \; (*)$$

II, III

$$\Rightarrow 64 - 16p + \cancel{p^2} + \cancel{4} + 4q + \cancel{q^2} = 36 - 12p + \cancel{p^2} + \cancel{4} - 4q + \cancel{q^2}$$

$$-4p + 8q + 28 = 0 \;/ :4$$

$$\boxed{-p + 2q + 7 = 0}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} 3q + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{q = -2}$$

$$p = 1-q$$

$$\boxed{p=3}$$

$$\Rightarrow (3-3)^2 + (-7+2)^2 = r^2$$

$$5^2 = r^2 \Rightarrow \boxed{r=5}$$

$$\boxed{k: (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25}$$

8

(3.) Из тачке $M(2,-6)$ су повучене тангенте на круг $k: x^2+y^2=20$. Наћи ј-не њих тангенти. Наћи угао под којим се види круг $k$ из тачке $M$ (тј. наћи угао између тангенти)


Решење:

$t: y = kx + n$

$M \in t \Rightarrow -6 = 2k + n \quad \boxed{n = -6 - 2k}$

$r^2(1+k^2) = n^2$

$20(1+k^2) = (2k+6)^2 \Rightarrow 2k^2 - 3k - 2 = 0$

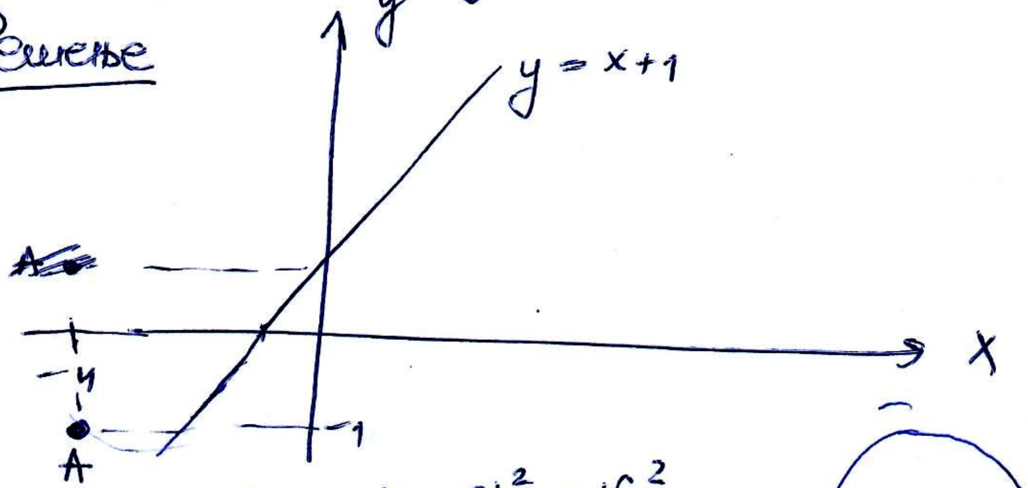
$k_1 = 2 \Rightarrow n_1 = -10 \Rightarrow t_1: y = 2x - 10$

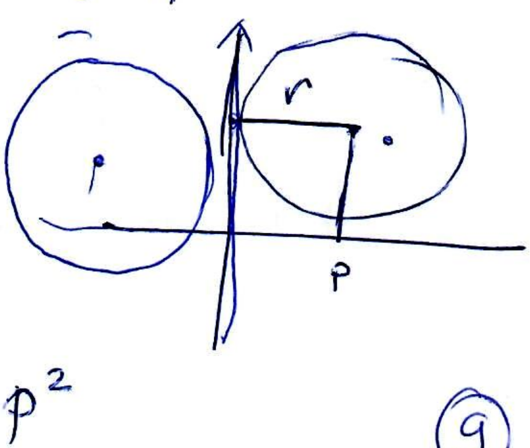
$k_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow n_2 = -5 \Rightarrow t_2: y = -\frac{1}{2}x - 5$

$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow \measuredangle(t_1, t_2) = 90^\circ$

(4.) Одредити ј-ну кружнице чији центар лежи на правој $l: y = x+1$ чија је тангента $y$-оса и која пролази кроз тачку $A(-4,-1)$

Решење




$k: (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$

$O \in l \Rightarrow \boxed{q = p+1}$

$y$-оса тангента $\Rightarrow |p| = r$

$A \in k \Rightarrow (-4-p)^2 + (-1-q)^2 = p^2$

$(4+p)^2 + (1+p+1)^2 = p^2$

$16+8p+p^2+\cancel{p^2}+4+4p=\cancel{p^2}$

$p^2+12p+20=0$

$\Rightarrow p_1=-2 \qquad p_2=-10$

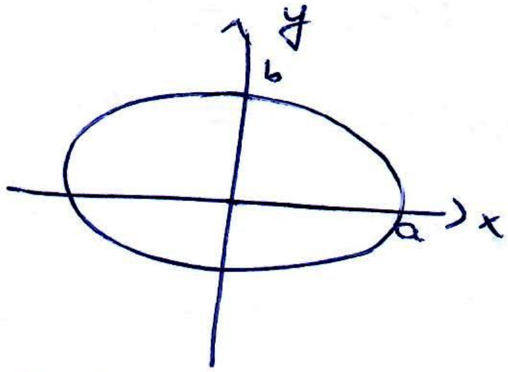
$q_1=-1 \qquad q_2=-9$

$k_1: (x+2)^2+(y+1)^2=4$

$k_2: (x+10)^2+(y+9)^2=100$

Елипса

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



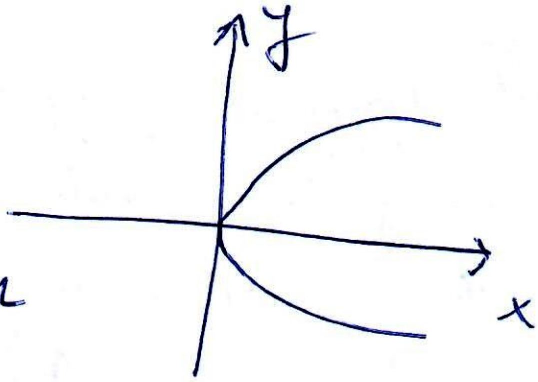

Услов додира $y=kx+n$

је тангента

$k^2a^2+b^2=n^2$

Парабола

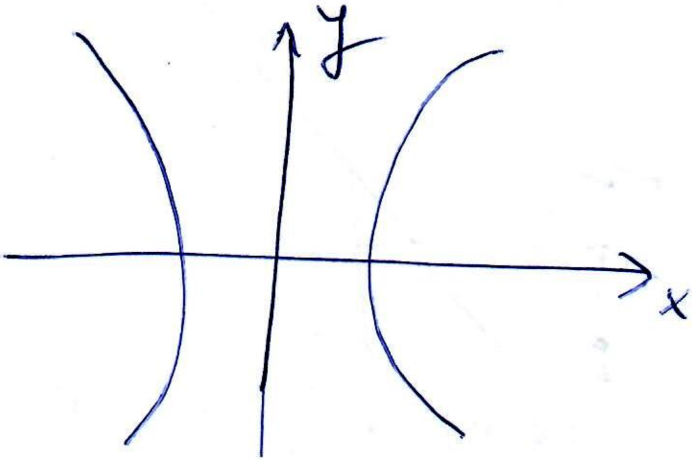
$y^2=2px$




Услов додира $p=2kn$

Хипербола

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$




Услов додира

$k^2a^2-b^2=n^2$

① Од свих правих које су паралелне са правом $y = 2x + 3$ нађи оне које додирују елипсу $x^2 + 2y^2 = 8$

Решење: $e: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

$t: y = 2x + n \quad k = 2,\ a^2 = 8,\ b^2 = 4$

Услов додира $k^2a^2 + b^2 = n^2$

$4 \cdot 8 + 4 = n^2 \Rightarrow n^2 = 36$

$\Rightarrow n = \pm 6$

$t_1: y = 2x + 6$

$t_2: y = 2x - 6$

② На правој $a: x - y + 7 = 0$ одредити тачку најближу параболи $P: y^2 = 12x$

$a: y = x + 7$

$k_a = 1$

Решење $M(x, y) \in P$

$$d(M, a) = \frac{|x - y + 7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|x - y + 7|$$

$$d(M, a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{y^2}{12} - y + 7\right| = \frac{1}{12\sqrt{2}}\left|y^2 - 12y + 84\right|$$

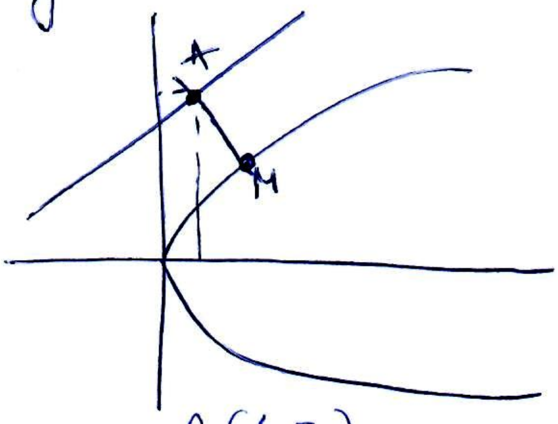
$\underbrace{y^2 - 2\cdot 6\cdot y + 36}-36+84$

$|\underbrace{(y-6)^2 + 48}_{\geq 48}| \geq 48$

$$= \frac{(y-6)^2 + 48}{12\sqrt{2}}$$

$36 = 12x$

$y = 6 \Rightarrow x = 3 \qquad M(3, 6)$




$k_n \cdot k_a = -1$

$k_a = -\frac{1}{k_n} = -1$

$n: y - 6 = -(x - 3)$

$n: y = -x + 9 \qquad \boxed{A(1,8)}$

$2y = 16$

$y = -x + 9$
$y = x + 7$ $\Rightarrow$ $y = 8$, $x = 1$

Решење $A(1, 8)$

3. Одредити једначину тангенте $t$ хиперболе $H$: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ када је паралелна правој

$p: 10x - 3y + 9 = 0$

Решење:

$p: 3y = 10x + 9$

$y = \frac{10}{3}x + 3$

$t: y = \frac{10}{3}x + n$

Услов додира $\left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot 16 - 64 = n^2$

$n^2 = \frac{1024}{9} \Rightarrow n = \pm \frac{32}{3}$

$t_1: y = \frac{10}{3}x + \frac{32}{3}$

$t_2: y = \frac{10}{3}x - \frac{32}{3}$