

Zadaci iz Matematike u Inženjerskom menadžmentu

1. Naći maksimum funkcije cilja $F = 2x + y$ uz ograničenja

$$x - y \leq 5;$$

$$x + 2y \leq 8;$$

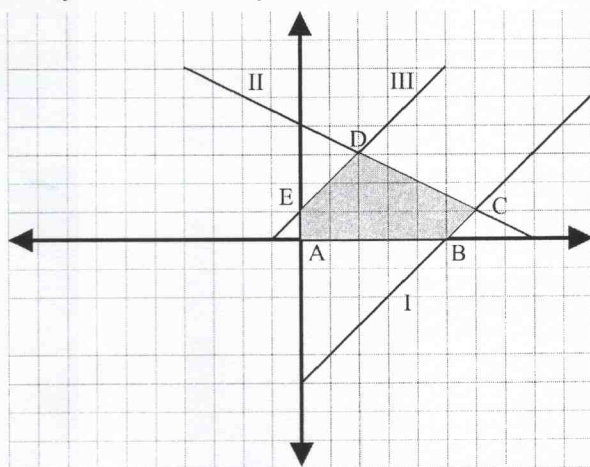
$$x - y \geq -1;$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Rešenje:

Ovo je zadatak linearnog programiranja i koristimo grafički metod. Određujemo dopustivu oblast rešenja pomoću pravih

$$I : x - y = 5; \quad II : x + 2y = 8; \quad III : x - y = -1; \quad x = 0; \quad y = 0.$$



Određujemo presečne tačke koje su temena dopustive oblasti rešenja:

$$A(0,0); \quad B(5,0); \quad E(0,1)$$

$$C : I \times II :$$

$$D : II \times III :$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{array} \right\} C(6,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ x - y = -1 \end{array} \right\} D(2,3)$$

Maksimum funkcije cilje biće u nekoj od određenih tačaka, pa izračunavamo vrednosti funkcije cilja u svakoj od njih:

$$F = 2x + y; \quad F(A) = 0; \quad F(B) = 10; \quad F(C) = 13; \quad F(D) = 7; \quad F(E) = 1.$$

Na osnovu dobijenih rezultata, zaključujemo da je maksimum funkcije cilja 13 koji ona dostiže za $x = 6, y = 1$.

2. Fabrika proizvodi dva modela automobila na I i II mašini. Za izradu prvog modela prva mašina radi 2 sata a druga 4 sata po autu, dok je za izradu drugog modela potrebno da prva mašina radi 6 sati a druga 4 sata po autu. Ako je zarada 3000 evra po prvom modelu i 5000 evra po drugom modelu, odrediti kako da se organizuje proizvodnja tako da zarada bude što veća, imajući u vidu da se mašine mogu koristiti 24 časa dnevno.

Rešenje:

Matematički model ovog zadatka odgovara problemu limeranog programiranja. Treba da odredimo optimalnu proizvodnju automobila po modelima imajući u vidu date uslove. Obeležimo sa x i y broj proizvedenih automobila redom prvog i drugog modela.

	prvi model (x)	drugi model (y)
I mašina	2h	6h
II mašina	4h	4h

Funkcija cilja kojoj treba naći maksimum je $F = 3000x + 5000y$ uz ograničenja

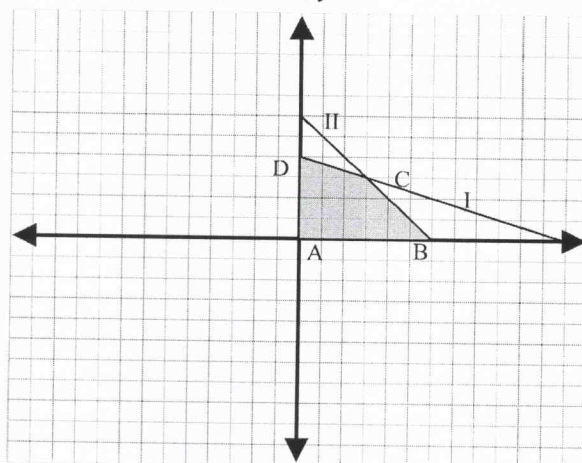
$$2x + 6y \leq 24;$$

$$4x + 4y \leq 24;$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Određujemo dopustivu oblast rešenja pomoću pravih

$$I: 2x + 6y = 24; II: 4x + 3y = 24; x = 0; y = 0.$$



Određujemo presečne tačke koje su temena dopustive oblasti rešenja:

$$A(0,0); B(6,0); D(0,4)$$

$$C: I \times II:$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 12 \\ x + y = 6 \end{array} \right\} C(3,3)$$

Maksimum funkcije cilje biće u nekoj od određenih tačaka, pa izračunavamo vrednosti funkcije cilja u svakoj od njih:

$$F = 3000x + 5000y; F(A) = 0; F(B) = 18000; F(C) = 24000; F(D) = 20000.$$

Na osnovu dobijenih rezultata, zaključujemo da je maksimum funkcije cilja koji ona dostiže za dnevnu proizvodnju od po tri automobila od svakog modela.

3. Trgovinsko preduzeće je u 2014. godini ostvarilo promet od 320 miliona dinara. Izračunati koliko se prometa može ukupno ostvariti u periodu 2014-2018 god ako se predviđa godišnji porast prometa a) 100 mil. dinara b) 20%.

Rešenje:

a) Uz konstantni godišnji porast prometa od 100 mil. dinara, godišnji prometi čine aritmetički niz čiji je prvi član 320, a razlika 100. Treba izračunati ukupan promet u periodu od 2014. -2016, dakle u periodu od pet godina, pri čemu treba da izračunamo zbir prvih pet članova ovog aritmetičkog niza:

$$a_1 = 320; d = 100; n = 5;$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1) \cdot d);$$

$$S_5 = \frac{5}{2}(2 \cdot 320 + 4 \cdot 100) = 2600.$$

b) Ako je porast prometa na godišnjem novou 20% u odnosu na predhodnu goinu, onda godišnji prometi čine geometrijski niz čiji je prvi član 320. Ako je odnos članova geometrijskog niza određen stopom povećanja (rasta) ili smanjenja (pada) u odnosu na predhodni član, onda je količnik $q = 1 + s$ odnosno $q = 1 - s$, gde je s stopa rasta (pada). Treba da izračunamo zbir prvih pet članova ovog geometrijskog niza:

$$a_1 = 320; s = 20\% = 0,2; q = 1 + s = 1 + 0,2 = 1,2; n = 5;$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}; S_5 = 320 \frac{1,2^5 - 1}{1,2 - 1} = 2381,31.$$

4. Fabrika automobila je 2012. godine proizvela 6000 automobila. Za koliko godina ova fabrika može da proizvede 40000 automobila (računajući i proizvodnju iz 2012. godine) ako je planiran godišnji porast proizvodnje od 1000 automobila?

Rešenje:

$$a_1 = 6000; d = 1000; S_n = 40000; S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1) \cdot d);$$

$$40000 = \frac{n}{2}(2 \cdot 6000 + (n-1) \cdot 1000) \Rightarrow 40000 = \frac{n}{2}(12000 + 1000n - 1000);$$

$$1000n^2 + 11000n - 80000 = 0; n^2 + 11n - 80 = 0;$$

$$n_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 320}}{2} = \frac{-11 \pm 21}{2}; n_1 = -16; n_2 = 5;$$

S obzirom na prirodu veličine koja se traži, zaključujemo da negativno rešenje ne odgovara, pa je rešenje postavljenog problema $n_2 = 5$. Dakle, planirana proizvodnja se može realizovati u periodu 2012-2017 godine.

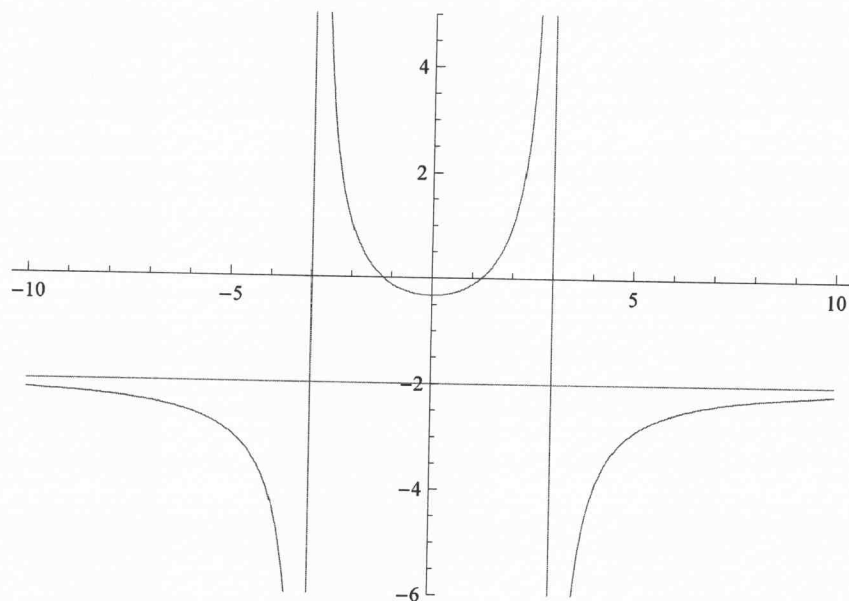
5. Jedna mašina vredi 120000 dinara. Koliku će vrednost imati za 8 godina ako je godišnja stopa otpisa 10% od vrednosti mašine u predhodnoj godini?

Rešenje:

$$a_1 = 120000; s = -10\% = -0,1; q = 1 - s = 1 - 0,1 = 0,9; n = 9;$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 120000 \cdot 0,9^8 = 51656,1.$$

6. Pronađi funkciju kojoj odgovara grafik (Zaokruži tačan odgovor)



- A) $\frac{2x^2 - 9}{x^2 - 3}$ B) $\frac{2x^2 - 3}{x^2 - 9}$ C) $\frac{3 - 2x^2}{x^2 - 9}$ D) $\frac{3 - 2x^2}{x^2 - 3}$ E) $\frac{x^2 - 2x - 9}{x^2 - 9}$

Uputstvo: Koristiti vertikalne i horizontalne asimptote kao i parnost funkcije.

7. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $f(x) = 20 \cdot x \cdot e^{\frac{-x}{20} + 4}$.

Rešenje: Ekstremne vrednosti funkcije nalazimo korišćenjem prvog izvoda funkcije:

$$f(x) = 20 \cdot x \cdot e^{\frac{-x}{20} + 4};$$

$$f'(x) = 20 \cdot e^{\frac{-x}{20} + 4} + 20 \cdot x \cdot e^{\frac{-x}{20} + 4} \cdot \left(\frac{-1}{20}\right) = e^{\frac{-x}{20} + 4} (20 - x);$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20$$

Našli smo stacionarnu tačku, ali treba proveriti da li u njoj funkcija ima ekstremnu vrednost i da li je u pitanju minimum ili maksimum. Ovo možemo uraditi ili pomoću drugog izvoda ili pomoću tablice za znak prvog izvoda. Ukoliko koristimo drugi izvod, dobijamo da je

$$f''(x) = e^{\frac{-x}{20} + 4} \cdot \left(\frac{-1}{20}\right) \cdot (20 - x) + e^{\frac{-x}{20} + 4} \cdot (-1) = e^{\frac{-x}{20} + 4} \left(\frac{x}{20} - 2\right);$$

$$f''(20) = -e^3 < 0$$

Zaključujemo da u $x = 20$ funkcija ima ekstremnu vrednost i dostiže svoj maksimum. Ukoliko koristimo tablicu za znak prvog izvoda, imamo u vidu da je eksponencijalna funkcija uvek pozitivna.

8. Koja je najveća i najmanja vrednost koju funkcija $f(x) = x^3 - 12x + 5$ dostiže na intervalu $[-3, 5]$.

Rešenje: Najmanja i najveća vrednost neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu nalazi se korišćenjem ekstremnih vrednosti funkcije na tom intervalu kao i vrednosti funkcije na krajevima tog intervala. Korišćenjem prvog izvoda nalazimo

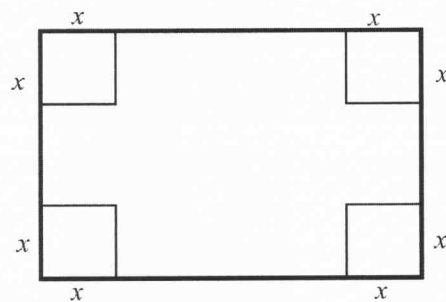
$$f(x) = x^3 - 12x + 5; f'(x) = 3x^2 - 12; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \vee x = -2.$$

I jedna i druga stacionarna tačka pripadaju datom intervalu. Na osnovu drugog izvoda $f''(x) = 6x$; $f''(-2) = -12 < 0$; $f''(2) = 12 > 0$; zaključujemo da u $x = -2$ data funkcija ima lokalni maksimum, koji iznosi $f(-2) = 21$, dok u $x = 2$ funkcija ima lokalni minimum koji iznosi $f(2) = -11$. Na krajevima intervala funkcija prima vrednosti $f(-3) = 14$, $f(5) = 70$,

Pa zaključujemo da funkcija $f(x) = x^3 - 12x + 5$ na intervalu $[-3, 5]$ dostiže najmanju vrednost $f(2) = -11$ a najveću $f(5) = 70$.

9. Od kartona oblika pravougaonika čije su dimenzije 30cm i 14 cm treba da se prave otvorene kutije najveće moguće zapremine. Odrediti dimenzije kutije.

Rešenje: Od datih pravougaonih kartona isecanjem kvadrata stranice x na svakom od čoškova dobijamo karton od koga se savijanjem dobija kutija.



Treba odrediti x tako da zapremina dobijene kutije bude najveća. Dimenzije te kutije biće $a = 30 - 2x$; $b = 14 - 2x$; $c = x$, a njena zapremina

$$V = abc = (30 - 2x) \cdot (14 - 2x) \cdot x = 4x^3 + -88x^2 + 420x.$$

Odredimo vrednost x za koju je zapremina maksimalna:

$$V'(x) = 12x^2 - 176x + 420 = 4(3x^2 - 44x + 105);$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = \frac{35}{3};$$

$$V''(x) = 24x - 176; \quad V''(3) < 0 \text{ (max)}; \quad V''\left(\frac{35}{3}\right) > 0 \text{ (min)}.$$

$$V_{\max} = V(3) = 576.$$

10. Dnevna tražnja za nekim artiklom je data sa $Q(P) = -P^2 + 10P + 11$. Pri kojoj ceni P će tražnja biti maksimalna?

$$\text{Rešenje: } Q(P) = -P^2 + 10P + 11 \Rightarrow Q'(P) = -2P + 10; Q'(P) = 0 \Rightarrow P = 5; \quad Q''(P) = -2.$$

Maksimalna proizvodnja se postiže pri ceni od $P = 5$.

11. Data je funkcija ukupnog prihoda $TR(Q) = Q^2 - 2Q + 6$ i funkcija ukupnih troškova

$$TC(Q) = 2Q^2 - 6Q + 1. \text{ Odrediti:}$$

a) Funkciju dobiti i interval rentabilne proizvodnje

b) Proizvodnju pri kojoj se ostvaruje maksimalna dobit kao i maksimalnu dobit.

Rešenje:

a) Funkciju dobiti računamo kao razliku između ukupnih prihoda i ukupnih troškova

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (Q^2 - 2Q + 5) - (2Q^2 - 6Q) = -Q^2 + 4Q + 5.$$

Interval rentabilne proizvodnje je interval proizvodnje pri kojoj je dobit pozitivna

$\pi(Q) > 0 \Leftrightarrow -Q^2 + 4Q + 5 > 0 \Leftrightarrow Q \in (-1, 5)$. Imajući u vidu prirodu ekonomskih funkcija, te da proizvodnja ne može da bude negativna, zaključujemo da je interval rentabilne proizvodnje $Q \in (0, 5)$.

b) Da bi odredili pri kojoj proizvodnji se ostvaruje maksimalna dobit, koristićemo prvi izvod funkcije dobiti

$$\pi(Q) = -Q^2 + 4Q + 5 \Rightarrow \pi'(Q) = -2Q + 4; \pi'(Q) = 0 \Rightarrow Q = 2; \pi''(Q) = -2 < 0 \text{ (max)}.$$

Dakle, maksimalna dobit se ostvaruje pri $Q = 2$ (koje pripada intervalu rentabilne proizvodnje), i tada je dobit $\pi(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 9$.

12. Neka je funkcija ukupnih prihoda $TR(Q) = 8 + 11Q - Q^2$, a ukupnih troškova

$TC(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 6Q^2$, gde je Q količina proizvoda. Pri kojoj količini proizvoda je dobit najveća?

Rešenje:

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (8 + 11Q - Q^2) - \left(\frac{1}{3}Q^3 - 6Q^2\right) = -\frac{1}{3}Q^3 + 5Q^2 + 11Q + 8.$$

$$\Rightarrow \pi'(Q) = -Q^2 + 10Q + 11; \pi'(Q) = 0 \Rightarrow Q_1 = -1, Q_2 = 11.$$

Odbacujemo negativno rešenje, i proveravamo da li za drugu vrednost funkcija ima minimum ili maksimum (pomoću drugog izvoda)

$$\pi''(Q) = -2Q + 10; \pi''(11) = -12 < 0 \text{ (max)}.$$

Zaključujemo da se pri proizvodnji od $Q = 11$ ostvaruje maksimalna dobit.

13. Date su funkcije prosečnih troškova i prosečnih prihoda jednog modela mobilnog

telefona $AC(Q) = \frac{1}{3}Q^2 - 7Q + 20 + \frac{48}{Q}$, $AR(Q) = -2Q + 4 + \frac{20}{Q}$. Odrediti funkcije

ukupnih troškova, ukupnih prihoda, marginalnih troškova i marginalnih prihoda kao i funkciju profita. Za koju količinu proizvoda se ostvaruje optimalna proizvodnja?

Rešenje:

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} \wedge AC(Q) = \frac{1}{3}Q^2 - 7Q + 20 + \frac{28}{Q} \Rightarrow$$

$$TC(Q) = AC(Q) \cdot Q = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 20Q + 28;$$

$$AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} \wedge AR(Q) = -2Q + 4 \Rightarrow TR(Q) = AR(Q) \cdot Q = -2Q^2 + 4Q;$$

$$MC(Q) = TC'(Q) = Q^2 - 14Q + 20; MR(Q) = TR'(Q) = -4Q + 4;$$

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (-2Q^2 + 4Q) - \left(\frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 20Q + 28\right);$$

$$\pi(Q) = -\frac{1}{3}Q^3 + 5Q^2 - 16Q - 28;$$

$$\pi'(Q) = -Q^2 + 10Q - 16; \quad \pi'(Q) = 0 \Rightarrow Q_1 = 2, \quad Q_2 = 8;$$

$$\pi''(Q) = -2Q + 10; \quad \pi''(2) = 6 > 0 \text{ (min)}; \quad \pi''(8) = -6 < 0 \text{ (max)}.$$

Optimalna proizvodnja se ostvaruje pri proizvodnji $Q = 8$.

14. Date su funkcije ukupnih troškova $TC(Q) = 6Q^2 + 50$ i funkcija tražnje $Q = -\frac{P}{4} + 15$ jednog modela mobilnog telefona u zavisnosti od njegove cene P . Odrediti funkciju ukupnih prihoda $TR(Q) = P \cdot Q$. Za koju količinu proizvoda i pri kojoj ceni se ostvaruje optimalna proizvodnja? Kolika je maksimalna dobit?

Rešenje: Kako treba odrediti funkciju prihoda u zavisnosti od količine proizvoda, to prvo treba da cenu izrazimo preko količine proizvoda:

$$Q = -\frac{P}{4} + 15 \Rightarrow -\frac{P}{4} = Q - 15 \Rightarrow P = 60 - 4Q;$$

$$TR(Q) = P \cdot Q = (60 - 4Q) \cdot Q = 60Q - 4Q^2;$$

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (60Q - 4Q^2) - (6Q^2 + 50) = -10Q^2 + 60Q - 50;$$

$$\pi'(Q) = -20Q + 60; \quad \pi'(Q) = 0 \Rightarrow Q = 3;$$

$$\pi''(3) = -20 < 0 \text{ (max)}.$$

Optimalna proizvodnja se ostvaruje pri $Q = 3$.

15. Neka su funkcije marginalnih prihoda i marginalnih troškova definisane sa

$$MR(P) = 4 - 2P, \quad MC(Q) = 4Q - 14, \text{ pri čemu je } TC(1) = 12.$$

a) Odrediti funkciju prihoda $TR(P)$ i funkciju troškova $TC(Q)$;

b) Odrediti funkciju tražnje $Q = Q(P)$ i funkciju cene $P = P(Q)$;

c) Odrediti funkciju prihoda $TR(Q)$ u zavisnosti od Q ;

d) Odrediti funkciju dobiti $\pi = \pi(Q)$, optimalni obim proizvodnje i maksimalnu dobit.

f) Odrediti interval rentabilne proizvodnje.

Rešenje:

a) Ukupni prihodi i troškovi se dobijaju integracijom marginalnih:

$$TR(P) = \int (4 - 2P) dP = 4P - P^2 + C; \quad TR(0) = 0 \Rightarrow C = 0;$$

$$TR(P) = 4P - P^2;$$

$$TC(Q) = \int (4Q - 14) dQ = 2Q^2 - 14Q + C; \quad TC(1) = 12 \Rightarrow C = 24;$$

$$TC(Q) = 2Q^2 - 14Q + 24;$$

b) Iz funkcije prihoda dobijamo:

$$TR(P) = P \cdot Q \wedge TR(P) = 4P - P^2 \Rightarrow P \cdot Q = 4P - P^2 \Rightarrow Q(P) = 4 - P, \quad P(Q) = 4 - Q;$$

c) Ukupne prihode u zavisnosti od količine proizvoda Q dobijamo kada cenu prikažemo kao funkciju od Q

$$TR(Q) = P(Q) \cdot Q = (4 - Q) \cdot Q = 4Q - Q^2;$$

d) Nađimo funkciju dobiti:

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (4Q - Q^2) - (2Q^2 - 14Q + 24) = -3Q^2 + 18Q - 24;$$

$$\pi(Q) > 0 \Leftrightarrow -3Q^2 + 18Q - 24 > 0 \Rightarrow Q \in (2, 4);$$

Rentabilna proizvodnja se ostvaruje pri $Q \in (2, 4)$.

f) Potražimo ekstremne vrednosti pomoću prvog izvoda:

$$\pi'(Q) = -6Q + 18; \quad \pi'(Q) = 0 \Rightarrow Q = 3;$$

Kako je $\pi''(Q) = -6$, to je i $\pi''(3) = -6 < 0$, dobit je maksimalna pri $Q = 3$ i iznosi

$$\pi(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 24 = 3.$$

16. Funkcija ukupnih prihoda od nekog artikla (u zavisnosti od količine x) je data sa

$$TR(x) = ax^2 + bx,$$

a) Odrediti parametre a i b ako $TR(10) = 425$, $TR'(10) = 55$.

b) Ako su ukupni troškovi dati sa $TC(x) = 2.25x^2 + 15x - 50$, odrediti interval rentabilne proizvodnje, optimalni obim proizvodnje i maksimalnu dobit.

Rešenje:

a)

$$TR(x) = ax^2 + bx$$

$$TR(10) = 425 \Rightarrow 100a + 10b = 425;$$

$$TR'(10) = 55 \wedge TR'(x) = 2ax + b \Rightarrow 20a + b = 55$$

$$100a + 10b = 425$$

$$200a + 10b = 550$$

$$100a = 125 \Rightarrow a = 1,25 \quad b = 30$$

$$TR(x) = 1,25x^2 + 30x.$$

b) Funkcija dobiti:

$$\pi(x) = TR(x) - TC(x) = (1,25x^2 + 30x) - (2.25x^2 + 15x - 50) = -x^2 + 15x + 50;$$

Interval rentabilne proizvodnje:

$$\pi(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 15x + 50 > 0 \Rightarrow x \in (5, 10);$$

Optimalna proizvodnja:

$$\pi'(x) = -2x + 15; \quad \pi'(x) = 0 \Rightarrow x = 3;$$

$$\pi''(x) = -2; \quad \pi''(3) = -2 < 0 \quad (\text{max}).$$

17. Date su funkcija marginalnih prihoda $TR'(P) = -8P + 4000$, funkcija marginalnih troškova $TC'(Q) = 0.5Q + 2000$ i prosečni troškovi pre obimu proizvodnje od 1000 jedinica proizvoda $AC(Q = 1000) = 16250$. Naći optimalni obim proizvodnje.

Rešenje:

Potražimo funkciju ukupnih prihoda na osnovu podataka koji su dati:

$$TR'(P) = -8P + 40000 \Rightarrow TR(P) = \int (-8P + 40000) dP = -4P^2 + 40000P + C$$

$$TR(0) = 0 \Rightarrow C = 0; \quad TR(P) = -4P^2 + 40000P;$$

Na osnovu dobijene funkcije, možemo naći vezu između količine proizvoda i cene:

$$TR(P) = P \cdot Q(P) = -4P^2 + 40000P = P \cdot (-4P + 40000) \Rightarrow$$

$$Q(P) = -4P + 40000; \quad P(Q) = -0.25Q + 10000;$$

Na osnovu dobijenog, možemo odrediti funkciju prihoda preko količine proizvoda

$$TR(Q) = Q \cdot P(Q) = Q \cdot (-0.25Q + 10000) = -0.25Q^2 + 10000Q;$$

Potražimo sada funkciju rashoda:

$$TC'(Q) = 0.5Q + 2000 \Rightarrow TC(Q) = \int (0.5Q + 2000) dQ = 0.25Q^2 + 2000Q + C;$$

Za određivanje konstante $C = TC(0)$ iskoristićemo funkciju prosečnih rashoda:

$$AC(Q) = \frac{0.25Q^2 + 2000Q + TC(0)}{Q} = 0.25Q + 2000Q + \frac{TC(0)}{Q}$$

$$AC(Q=1000) = 16250 \Rightarrow 0.25 \cdot 1000 + 2000 \cdot 1000 + \frac{TC(0)}{1000} = 16250;$$

$$TC(0) = 14000000 = 14 \cdot 10^6;$$

$$TC(Q) = 0.25Q^2 + 2000Q + 14 \cdot 10^6;$$

Sada možemo da izračunamo i funkciju dobiti:

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (-0.25Q^2 + 10000Q) - (0.25Q^2 + 2000Q + 14 \cdot 10^6);$$

$$\pi(Q) = -0.5Q^2 + 8000Q - 14 \cdot 10^6;$$

Optimalnu proizvodnju naćhalimo na osnovu prvog izvoda i ekstremnih vrednosti

$$\pi'(Q) = -Q + 8000; \quad \pi'(Q) = 0 \Rightarrow Q = 8000$$

$$\pi''(Q) = -1; \quad \pi''(8000) = -1 < 0 \quad (\text{max}).$$

Dakle, optimalna proizvodnja se ostvaruje pri $Q=8000$.

18. Firma proizvodi da artikla x i y pri ćemu je poznata funkcija dobiti u zavisnosti od fizićkog obima njihove proizvodnje $\pi = 32x - x^2 + 2xy - 2y^2 + 16y - 7$. Odrediti obim proizvodnje pri kome je dobit maksimalna.

Rešenje:

Odredimo prve parcijalne izvode i izjednaćimo ih sa nulom:

$$\pi = 32x - x^2 + 2xy - 2y^2 + 16y - 7$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = 32 - 2x + 2y; \quad \frac{\partial \pi}{\partial y} = 2x - 4y + 16;$$

$$\left. \begin{array}{l} -2x + 2y + 32 = 0 \\ 2x - 4y + 16 = 0 \end{array} \right\} -2y + 48 = 0 \Rightarrow y = 24, \quad x = 40$$

Odredimo druge parcijalne izvode

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} = -4 \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial y \partial x} = 2;$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0$$

Zaključujemo da funkcija ima ekstremnu vrednost za $x = 40$, $y = 24$. Kako je $\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} < 0$ zaključujemo da je u pitanju maksimum koji iznosi 825.

19. Funkcija tražnje ulaznica za finale fudbalskog kupa je data sa $Q_d(P) = 192 - P^2$.

Odrediti elastičnost tražnje prema ceni. Odrediti cenu za koju je $E_{Q_d, P} = -1$. Koliko je ulaznica na raspolaganju za tu cenu?

Rešenje:

$$E_{Q_d, P} = \frac{P}{Q} \cdot Q'(P) = \frac{P}{192 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{192 - P^2};$$

$$E_{Q_d, P} = -1 \Rightarrow \frac{-2P^2}{192 - P^2} = -1 \Rightarrow -2P^2 = P^2 - 192 \Rightarrow P^2 = 64 \Rightarrow P = 8;$$

$$Q_d(8) = 192 - 64 = 128.$$

Pri ceni od osam novčanih jedinica, elastičnost tražnje prema ceni je -1. Pri toj ceni na raspolaganju je 128 ulaznica.

20. Data je funkcija tražnje u implicitnom obliku $4Q + P - 160 = 0$. Odrediti obim proizvodnje pri kome se ostvaruje maksimalan ukupan prihod (TR). Odrediti elatičnost prosečnih prihoda (AR) prema količini proizvoda za $Q = 30$.

Rešenje:

$$4Q + P - 160 = 0 \Rightarrow P = 160 - 4Q$$

$$TR(Q) = P(Q) \cdot Q = (160 - 4Q) \cdot Q = 160Q - 4Q^2;$$

$$TR'(Q) = 160 - 8Q; \quad TR'(Q) = 0 \Rightarrow Q = 20$$

$$TR''(Q) = -8, \quad TR''(20) = -8 < 0 \quad (\text{max}).$$

Elastičnost prosečnih prihoda prema količini proizvoda

$$AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} = 160 - 4Q;$$

$$E_{AR, Q} = \frac{Q}{AR(Q)} \cdot AR'(Q) = \frac{Q}{160 - 4Q} \cdot (-4) = \frac{-4Q}{160 - 4Q};$$

$$E_{AR, Q=30} = \frac{-4 \cdot 30}{160 - 4 \cdot 30} = \frac{-120}{40} = -3.$$